E.S. VENTSEL

PROBLÈMES APPLIQUÉS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ, Л. А. ОВЧАРОВ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «РАДИО И СВЯЗЬ»
МОСКВА

PRÉFACE À L'ÉDITION FRANÇAISE

Les auteurs sont très heureux de pouvoir présenter au lecteur français leurs recettes méthodologiques de résolution des problèmes appliqués de la théorie des probabilités.

L'ouvrage a ceci de particulier que, d'une part, il peut être envisagé comme un manuel dans le domaine, et d'autre part, comme un recueil de près de 700 problèmes. Chaque chapitre est précédé d'une section théorique qui, avec les procédés méthodologiques de résolution, rendent possible l'utilisation de l'ouvrage dans des buts didactiques. Nombreuses solutions ont un intérêt de par elles-mêmeset peuvent être utilisées pour l'exploration de diverses tâches posées surtout par l'activité d'un ingénieur. La traduction anglaise de ce livre a été éditée par les Editions Mir en 1986.

Les principes méthodiques et le système de notations adoptées sont empruntés essentiellement à l'ouvrage de V. Pougatchev [12] paru en français aux Editions Mir en 1982.

Les auteurs ont apporté à la traduction française des retouches notables, en remaniant complètement les sections théoriques des premiers cinq chapitres et en modifiant de la façon correspondante les problèmes de ces chapitres et des chapitres qui suivent. Une grande aide dans ce travail a été prêtée par le chargé de cours G. Danilov, et les auteurs lui expriment toute leur reconnaissance.

H. Ventsel, L. Ovtcharov

AVANT-PROPOS

Ce livre est le fruit de l'expérience acquise par de nombreuses années d'enseignement de la théorie des probabilités et de ses applications au sein de diverses écoles techniques supérieures. Il a également à sa base les multiples problèmes appliqués que les auteurs ont eus à résoudre au cours de leur activité de recherche et de consultation et qui portent sur les divers domaines pratiques, tels l'électrotechnique, la radio, la transmission des messages, les ordinateurs, les systèmes informatiques; la fiabilité des dispositifs techniques, leur révision et travaux de prévision, la précision de l'appareillage, le service public, les transports, la santé publique, etc.

Le livre compte onze chapitres dont chacun débute par un résumé sommaire des propositions théoriques et des formules principales nécessaires pour la résolution des problèmes. Les problèmes que propose le recueil diffèrent entre eux aussi bien en difficulté que d'après le domaine de leur application. Relativement simples, au début du chapitre, pour permettre au lecteur d'assimiler les concepts fondamentaux, d'acquérir et d'affermir l'habitude du maniement des méthodes probabilistes, ils deviennent ensuite plus compliqués et sont orientés vers la pratique, leur résolution nécessitant l'application des connaissances théoriques et des habitudes acquises.

Les auteurs évitent de donner les problèmes « types », standard, dont la résolution est banale. Nombreux parmi les problèmes proposés peuvent sembler difficiles non seulement à un novice, mais aussi à un lecteur rompu à la théorie des probabilités (les plus difficiles, d'après les auteurs, sont marqués à l'astérisque). Pour rendre au lecteur la tâche plus facile la plupart des problèmes sont munis non seulement de réponses, mais encore de solutions développées; ces réponses et solutions sont données non pas à la fin de l'ouvrage, mais suivent directement l'énoncé (les auteurs s'adressent à un lecteur laborieux et réfléchi qui cherche d'abord lui-même la solution). Cette structure est très commode, elle a été pleinement justifiée par l'exemple d'un autre livre des auteurs, *La Théorie des Probabilités* (Moscou, « Naouka », 1973) qui a connu de nombreuses éditions en U.R.S.S. et dans d'autres pays (certains problèmes du présent recueil sont empruntés à ce livre).

Du point de vue des auteurs, le plus grand intérêt de ce recueil réside dans les énoncés et les solutions développées des problèmes non triviaux, ainsi que dans les recettes méthodiques qu'elles illustrent. Ils se sont donnés pour tâche non seulement de résoudre tout simplement les problèmes, mais aussi de recourir à cet effet à des moyens les plus simples et les plus généraux. Certains problèmes sont résolus de différentes façons. Nombreuses sont les solutions qui comportent des procédés méthodiques originaux d'intérêt général et qui peuvent être appliqués dans les domaines les plus divers de la pratique. Les auteurs attachent une importance particulière à l'appareil des caractéristiques numériques rendant la résolution de plusieurs problèmes particulièrement simple. Une grande attention est portée aux problèmes appliqués de la théorie des processus aléatoires de Markov. Les sections théoriques sommaires qui servent d'introduction aux chapitres ne résument dans la plupart des cas aucun manuel existant et sont rédigées sur une base méthodique nouvelle.

De la sorte, dans un certain sens, l'ouvrage tient une place intermédiaire entre un recueil de problèmes et un cours théorique. Il peut être utile à de larges milieux de lecteurs, dont les élèves et les enseignants des grandes écoles techniques, ainsi que les ingénieurs et les chercheurs qui ont à affronter dans leur activité pratique des problèmes susceptibles d'une approche probabiliste. Notons que l'élaboration détaillée des solutions et l'attention portée aux questions méthodiques rendent l'ouvrage bien adapté à son utilisation par les autodidactes. Les auteurs expriment leur reconnaissance à B. Gnédenko, de l'Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine, qui a soigneusement revisé le manuscrit et présenté de nombreuses suggestions précieuses, ainsi qu'à V. Pougatchev, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., dont les nombreux conseils ont été de grand profit pour les auteurs guidés dans une mesure notable par les principes méthodiques et le système de notations de sa monographie [12].

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. APPROCHES DIFFÉRENTES DU CONCEPT « PROBABILITÉ »

1.0. La théorie des probabilités est une branche des mathématiques dont l'objet est l'étude des lois qui régissent les phénomènes aléatoires.

Par « aléatoires » on entend les phénomènes qui, par rapport à d'autres phénomènes, sont dans une plus grande mesure indéfinis, imprévisibles. Au cours des répétitions multiples de la même épreuve (essai, expérience) un phénomène aléatoire se déroule chaque fois d'une façon légèrement différente.

Exemples des phénomènes aléatoires

1. Epreuve: jet d'une pièce de monnaie; « pile » peut être amenée aussi bien que « face ».
2. Epreuve: pesée d'un corps sur une balance de précision; le résultat varie d'une pesée à l'autre.
3. Epreuve: tir à la cible en pointant vers son centre; les coordonnées des points touchés diffèrent d'un coup à l'autre.
4. Epreuve: vol d'un appareil suivant une trajectoire donnée; d'une fois à l'autre les trajectoires ne coïncident pas, présentant des écarts aléatoires du tracé donné.
5. Epreuve: fonctionnement d'un ordinateur pendant un temps T donné; pendant ce temps l'ordinateur peut subir des défaillances dues à plusieurs causes aléatoires.
6. Epreuve: traitement d'un malade d'après une méthode définie; d'un cas à l'autre les résultats du traitement peuvent varier.

Dans telle ou telle mesure des éléments de hasard sont propres à tout phénomène. Mais pour résoudre certains problèmes on peut les négliger en recourant au schéma « déterministe » usuel: « Des conditions de l'épreuve à ses résultats ». Dans d'autres cas, le rôle du hasard est si grand qu'il est impossible de le négliger. Alors, il faut recourir à la théorie des probabilités qui établit les lois propres aux phénomènes aléatoires de masse.

L'un des premiers concepts de la théorie des probabilités est celui d'un *événement aléatoire* ou *événement* tout court. On donne ce nom à tout fait qui peut ou ne peut pas se produire à la suite d'une expérience à issue aléatoire.

Exemples des événements

1. Amenée de pile en jetant une pièce de monnaie.
2. Apparition d'un « double » en tirant au hasard une plaque dans un jeu de dominos.
3. Panne d'une installation technique au cours de son service pendant 24 heures.
4. Coup au but dans le tir à la cible.

On associe aux événements certains *nombres* qui déterminent le degré de leur possibilité objective et qui s'appellent *probabilités* de ces événements.

Désignons les événements par des majuscules A, B, C, . . ., et si la nécessité se présente, par une description verbale encadrée par une accolade. La probabilité d'un événement A est notée P (A).

Par unité de mesure des probabilités est prise la *probabilité d'un événement certain*. A l'issue d'une épreuve donnée l'événement A est dit *certain* si son apparition est inévitable.

Exemples des événements certains

1. Epreuve: jet d'un dé; événement A = {amenée pas plus de 6 points}.
2. Epreuve: lancée d'une pierre vers le haut; événement B = {la pierre ne devient pas satellite artificiel de la Terre}.

Si l'événement Ω est certain, sa probabilité vaut l'unité: P (Ω) = 1.

Un événement $\bar{A}$ est dit *contraire* de A s'il consiste en ce que A *n'apparaît pas*.

Exemples

1. Epreuve: jet d'un dé; événement A = {pas moins de trois points apparus}; $\bar{A}$ = {moins de trois points apparus}.
2. Epreuve: trois coups tirés à la cible; événement A = {au moins un coup au but}; $\bar{A}$ = {trois coups ratés}.

Un événement contraire d'un événement certain est un événement *impossible*, c'est-à-dire tel qu'il ne puisse pas se produire à l'issue d'une épreuve. On admet que la probabilité d'un événement impossible est nulle. La probabilité *d'un événement quelconque* varie de zéro à l'unité:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \qquad (1.0.1)$$

Il existe plusieurs approches au concept de la probabilité. Historiquement, l'approche « classique » a été la première à apparaître. Elle est fondée sur le calcul du nombre d'issues de l'épreuve favorables à l'événement considéré (le nombre de « chances » de sa réalisation), et de son quotient par le nombre d'issues équiprobables. Pour certains problèmes cette méthode rend possible le calcul immédiat de la probabilité de l'événement d'après les conditions de l'expérience. A cet effet tous les résultats éventuels de l'épreuve doivent être divisés en plusieurs *cas* ou « chances », c'est-à-dire en événements équiprobables qui s'excluent mutuellement et qui couvrent toutes les variantes des issues éventuelles. Plusieurs événements A_1, A_2, . . ., A_n d'une épreuve donnée sont dits *équiprobables* si d'après les conditions de symétrie de l'épreuve on n'a aucune raison de considérer que l'un quelconque d'entre eux est plus possible (probable) que chacun des autres.

Exemples des événements équiprobables

1. Epreuve: jet d'une pièce de monnaie symétrique; événements: A_1 = {sortie de pile} et A_2 = {sortie de face}, sont équiprobables.
2. Epreuve: tirer au hasard une plaque d'un jeu de dominos soigneusement brassé; événements: A_1 = {tirage de 0/0}; A_2 = {tirage de 1/3} et A_3 = = {tirage de 6/6}, sont équiprobables.
3. Epreuve: choisir dans un lot de N pièces numérotées une pièce au hasard pour le contrôle; événements: A_1 = {la pièce tirée a le n° 1}; A_2 = {la pièce tirée a le n° 2}; A_3 = {la pièce tirée a le n° 3} et A_4 = {la pièce tirée a le n° 4}, sont équiprobables.

Plusieurs événements A_1, A_2, . . ., A_n de l'épreuve considérée sont dits *incompatibles* s'ils s'excluent mutuellement, c'est-à-dire si aucuns deux événements d'entre eux ne peuvent se produire simultanément.

Exemples des événements incompatibles

1. Epreuve: trois coups tirés à la cible; événements: A_0 = {aucun coup n'atteint le but}; A_1 = {exactement un coup atteint le but} et A_2 = {tous les trois coups atteignent le but}, sont incompatibles.
2. Epreuve: jet d'un dé; événements: A_1 = {apparition d'un point}; A_2 = = {apparition de deux points}; A_3 = {apparition pas moins de quatre points}, sont incompatibles.
3. Epreuve: fonctionnement d'un dispositif pendant τ heures; événements: A_1 = {le dispositif fonctionne sans défaillance pendant toutes les τ heures}; A_2 = {il tombe en panne à l'instant du branchement}; A_3 = {il tombe en panne après $\tau/2$ heures de service}, sont incompatibles.

Quelques événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'épreuve considérée forment un *groupe complet*, si l'expérience amène inévitablement au moins un de ces événements (autrement dit, si l'épreuve ne peut aboutir outre ces événements).

Exemples des événements formant un groupe complet

1. Epreuve: jet d'un dé; événements: A_1 = {sortie d'un point}; A_2 = {sortie de deux points}; A_3 = {sortie pas moins de trois points}, forment un groupe complet.
2. Dans cette même épreuve les événements: B_1 = {pas moins de trois points} et B_2 = {sortie pas plus de trois points}, forment aussi un groupe complet, mais sont des événements compatibles (si apparaissent trois points, B_1 et B_2 se produisent simultanément).
3. Epreuve: trois coups tirés à la cible; événements: A_1 = {deux coups au but}; A_2 = {pas moins de deux coups au but}; A_3 = {au moins un coup au but}; A_4 = {aucun coup au but}, forment également un groupe complet.

Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'épreuve considérée possèdent toutes les trois propriétés, c'est-à-dire sont équiprobables, incompatibles et forment un groupe complet, on leur donne le nom de *cas* ou « chances », et on dit alors de l'épreuve elle-même qu'elle *se ramène au schéma des cas.*

Exemples des cas

1. Epreuve: jet d'un dé symétrique (non pipé);
   cas A_1 = {apparition d'un point};
   A_2 = {apparition de deux points};
   . . . . . .
   A_6 = {apparition de six points}.
2. Epreuve: tirage au hasard d'une boule d'une urne qui contient n boules numérotées;
   cas A_1 = {apparition de la boule n° 1};
   . . . . . .
   A_i = {apparition de la boule n° i};
   . . . . . .
   A_n = {apparition de la boule n° n}.
3. Epreuve: tirage au hasard d'une carte d'un jeu complet de 52 cartes:
   cas A_1 = {apparition d'un cœur};
   A_2 = {apparition d'un carreau};
   A_3 = {apparition d'un trèfle};
   A_4 = {apparition d'un pique}.

Le cas A_i est dit *favorable* à l'événement A si son apparition entraîne celle de A. Par exemple, dans l'épreuve du « jet d'un dé » les cas A_2, A_4, A_6 sont favorables à l'événement A = {apparition d'un nombre pair de points}, alors que les autres trois cas A_1, A_3, A_5 lui sont défavorables. Dans la même épreuve, à l'événement B = {apparition moins de cinq points} sont favorables les cas A_1, A_2, A_3, A_4, les autres cas A_5, A_6 lui étant défavorables.

Si l'épreuve se ramène au schéma des cas, la probabilité de l'événement A dans cette épreuve se calcule comme le *rapport du nombre de cas favorables* m_A *au nombre total de cas* n:

$$P(A) = \frac{m_A}{n}. \tag{1.0.2}$$

Exemple. Une urne contient 3 boules blanches et 4 noires. On en tire au hasard une boule. Trouver la probabilité pour que celle-ci soit blanche.

Solution. Notons A = {apparition d'une boule blanche}. Dans cette épreuve le nombre total n de cas est égal à sept (chaque boule est extraite avec la même probabilité), dont $m_a = 3$ sont favorables à l'événement A. D'après la formule (1.0.2)

$$P(A) = 3/7.$$

La formule (1.0.2), dite « formule classique », ne convient que pour les épreuves qui se ramènent au schéma des cas ; or, ce sont essentiellement des expériences artificiellement organisées, dont les résultats équipossibles sont assurés par des mesures spéciales (dé non pipé ; battage des cartes ; brassage des boules dans l'urne, etc.).

La plupart des épreuves qu'on rencontre dans la pratique ne jouissent pas de la symétrie des issues éventuelles ; pour autant, dans de telles épreuves aussi, les événements aléatoires possèdent certaines probabilités qui peuvent être évaluées quantitativement. Dans de telles épreuves le concept de « probabilité » est intimement lié à celui de la fréquence de l'événement.

On appelle *fréquence*, ou probabilité statistique, de l'événement A d'une série de N épreuves le *rapport du nombre d'épreuves* μ_A *dans lesquelles l'événement* A *a été réalisé, au nombre total d'épreuves.* A la différence de $P(A)$, désignons la fréquence d'un événement par $P^*(A)$:

$$P^*(A) = \frac{\mu_A}{N}. \tag{1.0.3}$$

Exemple. Une pièce de monnaie a été jetée 20 fois ; pile est apparue 12 fois. Trouver la fréquence de la sortie de pile.

Solution. $\mu_A = 12$; $N = 20$:

$$P^*(A) = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

On réalise intuitivement qu'il existe une liaison entre la fréquence d'un événement $P^*(A)$ et sa probabilité : les événements plus probables surviennent plus souvent que ceux dont la probabilité est plus faible. Avec l'augmentation du nombre N d'expériences identiques la fréquence $P^*(A)$ d'un événement tend à se stabiliser en s'approchant à travers plusieurs écarts aléatoires de la probabilité $P(A)$: pour $N \to \infty$

$$P^*(A) \approx P(A). \tag{1.0.4}$$

Le signe $\approx$ qui figure dans la formule (1.0.4) signifie que $P^*(A)$ « tend » non pas simplement vers $P(A)$, mais s'en approche *avec une très grande probabilité* qui est d'autant plus grande que le nombre d'expériences N est plus grand. La relation énoncée entre la fréquence et la probabilité traduit le fond même du *théorème de Bernoulli*, autrement dit, de la forme la plus simple de la *loi des grands nombres* (voir n° 8.0.14). Si l'épreuve ne se ramène pas au schéma des cas, la probabilité de tout événement A de cette épreuve peut être déterminée approximativement d'après sa fréquence, on peut même évaluer l'erreur de ce calcul approché.

Tel est le fondement de l'*approche fréquentielle*, deuxième approche du concept de la probabilité. Elle permet de dresser l'édifice tout entier de la théorie probabiliste, et de déduire les propriétés des probabilités et les règles qui régissent leur manipulation directement de celles des fréquences. C'est la voie que suivent dans plusieurs cas certains auteurs.

Il existe également une troisième approche, l'*approche ensembliste* ou *axiomatique*, basée sur les idées de A. Kolmogorov, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. C'est cette dernière approche qui nous guidera dans l'exposé qui suit.

Rappelons à celui qui les connaît les notions fondamentales de la théorie des ensembles et renseignons sur elles celui qui ne les connaît pas.

On appelle *ensemble* toute collection d'objets de nature quelconque; chaque objet de la collection s'appelle *élément de l'ensemble*.

Exemples des ensembles: 1) élèves de l'Ecole supérieure donnée; 2) nombres naturels ne dépassant pas 200; 3) points du plan xOy; 4) points de ce plan reposant à l'intérieur du cercle de rayon r, centré sur l'origine des coordonnées; 5) points de l'axe numérique Ox distants pas plus de α du point d'abscisse a.

Nous désignerons les ensembles de façon différente, tout comme les événements dans ce qui précède: soit par une majuscule, soit en dénombrant ses éléments dans une accolade, soit encore par description verbale placée dans cette même accolade de la règle d'après laquelle l'élément est associé à l'ensemble. Ainsi, l'ensemble M des nombres naturels de 1 à 200 peut s'écrire:

$$M = \{1, 2, \ldots, 200\} = \{i \text{ entier}; 1 \leqslant i \leqslant 200\}.$$

L'ensemble des points de l'axe numérique distants pas plus de α du point d'abscisse a peut se mettre sous la forme:

$$S = \{|x - a| \leqslant \alpha\},$$

où x est l'abscisse du point.

L'ensemble K des points du plan xOy situés à l'intérieur d'un cercle de rayon r de centre en origine des coordonnées peut s'écrire

$$K = \{x^2 + y^2 < r^2\},$$

où x, y sont les coordonnées cartésiennes du point, ou encore

$$K = \{\rho < r\},$$

où ρ est l'une des coordonnées polaires (rayon vecteur) du point.

D'après le nombre d'éléments les ensembles peuvent être *finis* ou *infinis*.

L'ensemble $M = \{1, 2, \ldots, 200\}$ est fini et se compose de 200 éléments. L'ensemble de *tous* les nombres naturels $N_1 = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ est infini, tout comme l'ensemble de tous les nombres pairs $N_2 = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ et l'ensemble de tous les nombres multiples de 3: $N_3 = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$.

Un ensemble infini est dit *dénombrable*, si tous ses éléments peuvent être rangés dans une suite quelconque, être numérotés; les trois ensembles N_1, N_2, N_3 sont dénombrables; l'ensemble de tous les nombres entiers tant positifs que négatifs: $K = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots, +n, -n, \ldots\}$ est dénombrable lui aussi.

Les ensembles S et K considérés ci-dessus sont tous les deux infinis et non dénombrables: leurs éléments ne peuvent être numérotés les uns après les autres.

Deux ensembles A et B *coïncident* ou sont équivalents s'ils se composent de mêmes éléments (l'ordre de la disposition des éléments n'est pas essentiel). Par exemple, l'ensemble des racines de l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ coïncide avec l'ensemble $\{1, 4\}$, ainsi qu'avec l'ensemble $\{4, 1\}$. La coïncidence des ensembles est notée par le signe d'égalité $A = B$.

Un ensemble est dit *vide* s'il ne contient aucun élément; il est noté $\varnothing$.

Exemple: points du plan dont les coordonnées vérifient l'inégalité $x^2 + y^2 \leqslant -1$:

$$\{x^2 + y^2 \leqslant 1\} = \varnothing.$$

Tous les ensembles vides sont équivalents entre eux.

Un objet a, élément de l'ensemble A, est noté

$$a \in A$$

(ce qui se lit: a appartient à A). L'écriture $a \bar{\in} A$ signifie que a *n'appartient pas à* A.

L'ensemble B s'appelle *sous-ensemble* (partie) de l'ensemble A si tous les éléments de B sont contenus également dans A, ce qui s'écrit

$$B \subseteq A \quad \text{ou} \quad A \supseteq B.$$

Exemples: 1) $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, \ldots, 200\}$;
2) $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subseteq \{x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

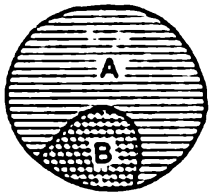


Fig. 1.0.1

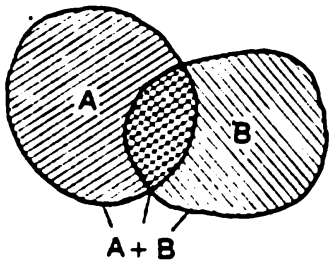


Fig. 1.0.2

Un sous-ensemble peut être équivalent à l'ensemble lui-même; tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même:

$$A \subseteq A.$$

La relation entre un sous-ensemble et un ensemble peut être illustrée directement par une interprétation géométrique (fig. 1.0.1), où les éléments de l'ensemble sont des points du plan; chaque point de la figure B appartient également à la figure A:

$$B \subseteq A.$$

On appelle *réunion* (somme) des ensembles A et B l'ensemble $C = A + B$ composé de tous les éléments de A et de tous les éléments de B, y compris de ceux qui appartiennent à A aussi bien qu'à B.

La réunion des ensembles est souvent notée $A \cup B$, mais compte tenu de ce qui suit (mémorisation facile des énoncés), nous écrirons $A + B$. Il est évident que si $B \subseteq A$, alors $A + B = A$.

Exemples: 1) $\{1, 2, \ldots, 100\} + \{60, 61, \ldots, 200\} = \{1, 2, \ldots, 200\}$.
2) $\{x^2 + y^2 \leqslant 2\} + \{x^2 + y^2 \leqslant 4\} = \{x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

L'interprétation géométrique de la réunion de deux ensembles A et B est donnée par la figure 1.0.2. La réunion (la somme) de plusieurs ensembles se détermine d'une façon analogue à celle de deux ensembles; $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$ est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent *au*

moins à l'un des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On peut envisager également la somme d'un nombre infini (dénombrable) d'ensembles, par exemple

$$\{1, 2\} + \{2, 3\} + \{3, 4\} + \ldots + \{n-1, n\} + \ldots = \\ = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

On appelle *intersection* (produit) des ensembles A et B l'ensemble $D = A \cdot B$ composé des éléments appartenant *simultanément à A et à B*.

L'intersection des ensembles A et B est notée souvent $A \cap B$, mais nous la désignerons par $A \cdot B$, en utilisant le signe du produit, ou, souvent, en l'omettant en général, c'est-à-dire en écrivant AB. Il est clair que si $B \subseteq A$, alors $AB = B$.

Exemples: 1) $\{1, 2, \ldots, 50\} \cdot \{25, 26, \ldots, 50, 51, \ldots, 60\} = \\ = \{25, 26, \ldots, 50\}$;

2) $\{1, 2, \ldots, 10\} \cdot \{1, 2, \ldots, 50\} = \{1, 2, \ldots, 10\}$;

3) $\{x^2 + y^2 \leqslant 2\} \cdot \{x^2 + y^2 \leqslant 4\} = \{x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

L'interprétation géométrique de l'intersection (du produit) de deux ensembles A et B est donnée par la figure 1.0.3. D'une façon analogue s'énonce l'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles: l'ensemble $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ se compose des éléments qui font simultanément partie de *tous* les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La définition couvre également le nombre infini (dénombrable) d'ensembles: $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ est l'ensemble composé des éléments qui font simultanément partie de *tous* les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

Les opérations réunion (somme) et intersection (produit) des ensembles jouissent de plusieurs propriétés analogues à celles de l'addition et de la multiplication courantes des nombres. Elles sont

1. *Commutatives*:

$$A + B = B + A; \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

2. *Associatives*:

$$(A + B) + C = A + (B + C); \quad (AB)\,C = A\,(BC).$$

3. *Distributives*:

$$A\,(B + C) = AB + AC.$$

Les opérations addition d'un ensemble vide et multiplication par un ensemble vide sont également analogues aux opérations correspondantes sur les nombres si l'ensemble vide est assimilé à zéro:

$$A + \varnothing = A; \quad A \cdot \varnothing = \varnothing.$$

Toutefois, certaines opérations sur les ensembles n'ont pas d'analogues avec les opérations usuelles sur les nombres, et en particulier

$$A + A = A; \quad A \cdot A = A.$$

Ces renseignements élémentaires sur la théorie des ensembles suffisent pour édifier la théorie des probabilités et formuler ses axiomes sur une base ensembliste.

Aussi, tout événement sera-t-il envisagé par nous comme un ensemble.

Soit à réaliser une certaine épreuve (expérience, essai) à issue aléatoire. Considérons l'ensemble Ω de toutes les issues possibles de l'épreuve; disons que chacun des éléments de cet ensemble $\omega \in \Omega$ est un *événement élémentaire*, alors que l'ensemble Ω tout entier est l'*espace des événements élémentaires*. Dans le

langage ensembliste tout événement A est un sous-ensemble de l'ensemble Ω: $A \subseteq \Omega$. Pour ce qui est de la probabilité P (A), elle constitue pour l'événement A une certaine *fonction du sous-ensemble A*.

Si l'ensemble A se décompose en plusieurs sous-ensembles A_1, A_2, ..., A_n disjoints, nous leur donnerons le nom de *variantes de l'événement A*. La figure 1.0.4 donne l'interprétation géométrique des trois variantes A_1, A_2, A_3 de l'événement A. Parmi les événements, sous-ensembles de l'ensemble Ω, on peut envisager aussi Ω lui-même: c'est un *événement* dit *certain*. A l'ensemble

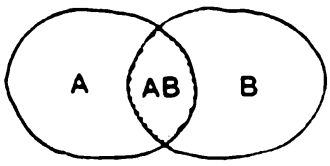


Fig. 1.0.3

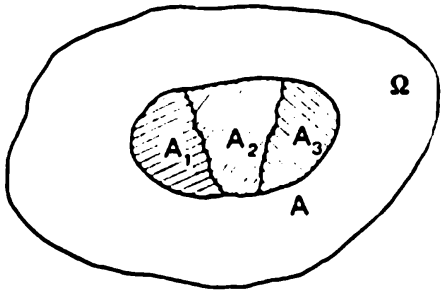


Fig. 1.0.4

Ω tout entier on ajoute encore l'ensemble vide $\varnothing$ envisagé également comme un événement dit *impossible* ou *irréalisable*.

Notons que les événements élémentaires ω d'une même épreuve peuvent être donnés d'une façon différente; par exemple, pour un jet aléatoire d'un point sur un plan sa position peut être définie aussi bien par des coordonnées cartésiennes (x, y) que par des coordonnées polaires (ρ, φ).

Les événements étant considérés comme des ensembles, ils possèdent les mêmes propriétés que ces derniers, et les opérations somme (réunion) et produit (intersection) sont déterminées pour eux exactement de la même façon que pour les ensembles en général.

Problèmes et exercices

1.1. Indiquer pour les événements de chaque exemple s'ils forment dans l'épreuve considérée un groupe complet (oui, non).

1) Epreuve: jet d'une pièce de monnaie; événements:
A_1 = {pile}; A_2 = {face}.

2) Epreuve: jet de deux pièces de monnaie; événements:
B_1 = {deux piles};
B_2 = {deux faces}.

3) Epreuve: jet de deux dés; événements:
C_1 = {six sort aux deux dés};
C_2 = {six ne sort à aucun dé};
C_3 = {six sort à un dé et ne sort pas à l'autre}.

4) Epreuve: transmission de deux signaux par un canal de communication; événements:
D_1 = {au moins un signal sans distorsion};
D_2 = {au moins un signal distordu}.

5) Epreuve: transmission de trois messages par voie de communication; événements:

E_1 = {tous les trois messages transmis sans erreur};
E_2 = {tous les trois messages transmis avec erreur};
E_3 = {deux messages transmis avec erreur, un, sans erreur}.

Réponse. 1) oui; 2) non; 3) oui; 4) oui; 5) non.

1.2. Pour chaque groupe d'événements répondre par oui ou non à la question si dans l'épreuve donnée ils sont incompatibles.

1) Epreuve: jet d'une pièce de monnaie; événements:
A_1 = {pile}; A_2 = {face}.

2) Epreuve: jet de deux pièces de monnaie; événements:
B_1 = {première pièce: pile};
B_2 = {deuxième pièce: pile}.

3) Epreuve: deux coups de feu tirés à la cible; événements:
C_0 = {aucun coup au but};
C_1 = {un coup au but};
C_2 = {deux coups au but}.

4) Même épreuve; événements:
D_1 = {un coup au but};
D_2 = {un coup raté}.

5) Epreuve: tirage de deux cartes d'un jeu; événements:
E_1 = {deux cartes: des noirs};
E_2 = {parmi les cartes tirées une dame de trèfle};
E_3 = {parmi les cartes tirées un as de pique}.

6) Epreuve: transmission par radio de trois messages; événements:
F_1 = {premier message avec erreur};
F_2 = {deuxième message avec erreur};
F_3 = {premier message avec erreur, deuxième, sans erreur}.

Réponse. 1) oui; 2) non; 3) oui; 4) non; 5) non; 6) non.

1.3. Pour chacun des groupes d'événements répondre à la question: dans l'épreuve considérée les événements sont-ils équiprobables ou non?

1) Epreuve: jet d'une pièce de monnaie; événements:
A_1 = {pile};
A_2 = {face}.

2) Epreuve: jet d'une pièce de monnaie irrégulière (ployée); mêmes événements A_1, A_2.

3) Epreuve: coup de feu tiré à la cible; événements:
B_1 = {coup au but};
B_2 = {coup raté}.

4) Epreuve: jet de deux pièces de monnaie; événements:
C_1 = {deux piles};
C_2 = {deux faces};
C_3 = {une pile et une face}.

5) Epreuve: tirage au hasard d'une carte dans un jeu; événements:
D_1 = {un cœur};

D_2 = {un carreau};
D_3 = {un trèfle};
D_4 = {une pique}.

6) Epreuve: jet d'un dé; événements:
E_1 = {pas moins de trois points};
E_2 = {pas plus de trois points}.

7) Epreuve: transmission par voie de communication dans les mêmes conditions de trois messages de même durée; événements:
F_1 = {erreur dans le premier message};
F_2 = {erreur dans le deuxième message};
F_3 = {erreur dans le troisième message}.

Réponse. 1) oui; 2) non; 3) dans le cas général, non; 4) non; 5) oui; 6) non; 7) oui.

1.4. Pour chacun des groupes d'événements répondre aux questions suivantes: forment-ils un groupe complet? Sont-ils incompatibles? Sont-ils équiprobables? Forment-ils un groupe des cas?

1) Epreuve: jet d'une pièce de monnaie régulière; événements:
A_1 = {pile};
A_2 = {face}.

2) Epreuve: jet de deux pièces de monnaie; événements:
B_1 = {deux piles};
B_2 = {deux faces};
B_3 = {une pile et une face}.

3) Epreuve: jet d'un dé; événements:
C_1 = {un ou deux points};
C_2 = {deux ou trois points};
C_3 = {trois ou quatre points};
C_4 = {quatre ou cinq points};
C_5 = {cinq ou six points}.

4) Epreuve: tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 36 cartes; événements:
D_1 = {un as};
D_2 = {un roi};
D_3 = {une dame};
D_4 = {un valet};
D_5 = {un dix};
D_6 = {un neuf};
D_7 = {un huit};
D_8 = {un sept};
D_9 = {un six}.

5) Epreuve: coup tiré à la cible; événements:
E_1 = {coup au but};
E_2 = {coup raté}.

6) Epreuve: transmission dans les mêmes conditions de trois messages de même durée; événements:
F_1 = {premier message perturbé};

F_2 = {deuxième message perturbé};
F_3 = {troisième message perturbé}.

7) Epreuve: fonctionnement de deux appareils pendant un temps τ; événements:

G_0 = {aucun appareil en panne};
G_1 = {un appareil en panne, l'autre non};
G_2 = {deux appareils en panne}.

Réponse. 1) oui, oui, oui, oui; 2) oui, oui, non, non; 3) oui, non, oui, non; 4) oui, oui, oui, oui; 5) oui, oui, non, non; 6) non, non, oui, non; 7) oui, oui, non, non.

1.5. On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que pile ou face sortent deux fois de suite; alors, les jets cessent. Etablir pour cette épreuve l'espace des événements élémentaires et en extraire le sous-ensemble qui correspond à l'événement A = {il faudra pas plus de trois jets}. Peut-on trouver pour ce cas la probabilité de l'événement comme le rapport du nombre d'événements élémentaires favorables à A au nombre total d'événements élémentaires, et si non, dire pourquoi?

Solution. Les événements élémentaires constitutifs de l'ensemble Ω (pile est notée « p », et face, « f »): $\omega_1 = \{p, p\}$; $\omega_2 = \{f, f\}$; $\omega_3 = \{p, f, f\}$; $\omega_4 = \{f, p, p\}$; $\omega_5 = \{p, f, p, p\}$; $\omega_6 = \{f, p, f, f\}$ . . .; le nombre de ces événements est infini (dénombrable): $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$. Le sous-ensemble des événements élémentaires favorables à A: $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Dans ce cas il est impossible de déterminer la probabilité de l'événement A comme le rapport du nombre d'événements élémentaires favorables à A au nombre total d'événements élémentaires du fait que les éléments élémentaires $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ ne sont pas équiprobables, chaque couple successif est moins probable que le précédent [pour le calcul de $P(A)$ voir problème 2.18].

1.6. Un polyèdre à k faces ($k > 3$) numérotés $1, 2, \ldots, k$ est jeté au hasard sur un plan et tombe sur telle ou telle face. Construire pour cette épreuve l'espace des événements élémentaires et en extraire le sous-ensemble qui correspond à l'événement A = {le polyèdre est tombé sur la face dont le numéro ne dépasse pas le nombre $k/2$}.

Solution. L'espace Ω se compose de k événements élémentaires: $\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}$, où les nombres correspondent aux numéros des faces. Le sous-ensemble A se compose d'événements élémentaires: $A = \{1, 2, \ldots, [k/2]\}$, où $[k/2]$ est la partie entière incluse dans $k/2$.

1.7. Dans l'énoncé du problème précédent, le polyèdre est un corps régulier; les valeurs possibles du nombre de faces $k = 4$ (tétraèdre); $k = 6$ (cube); $k = 8$ (octaèdre); $k = 12$ (dodécaèdre); $k = 20$ (icosaèdre). Trouver pour chacun des polyèdres la probabilité de l'événement A.

Solution. Pour un polyèdre régulier (symétrique) l'apparition de chaque face est équiprobable, P (A) pouvant ainsi être calculée d'après la formule (1.0.2). Le nombre de faces de tous les polyèdres réguliers étant pair, il vient: $[k/2] = k/2$, et pour l'un quelconque d'entre eux: P $(A) = 1/2$.

1.8. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire au hasard une boule. Trouver la probabilité pour que cette boule soit blanche.

Réponse. $a/(a + b)$.

1.9. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire une boule pour la mettre de côté. Il s'est avéré que cette boule est blanche. Ensuite on tire de l'urne encore une boule. Trouver la probabilité pour que cette boule soit blanche elle aussi.

Réponse. $(a - 1)/(a + b - 1)$.

1.10. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire une boule pour la mettre de côté sans la regarder. Ensuite on tire de l'urne encore une boule qui s'est avérée blanche. Trouver la probabilité pour que la première boule mise de côté soit blanche elle aussi.

Réponse. $(c - 1)/(a + b - 1)$.

1.11. D'une urne qui contient a boules blanches et b noires on tire l'une après l'autre toutes les boules, sauf une. Trouver la probabilité pour que la dernière boule restée dans l'urne soit blanche.

Réponse. $a/(a + b)$.

1.12. D'une urne qui contient a boules blanches et b noires on tire à tour de rôle toutes les boules. Trouver la probabilité pour que la deuxième boule dans l'ordre du tirage soit blanche.

Réponse. $a/(a + b)$.

1.13. Une urne contient a boules blanches et b noires ($a \geqslant 2$). On en tire deux boules à la fois. Trouver la probabilité pour que les deux boules soient blanches.

Solution. L'événement A = {deux boules blanches}. Le nombre total de cas:

$$n = C_{a+b}^2 = (a + b)(a + b - 1)/(1 \cdot 2),$$

où $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ est le nombre de combinaisons de k éléments m à m.

Le nombre de cas favorables

$$m_A = C_a^2 = a(a - 1)/(1 \cdot 2).$$

La probabilité de l'événement A:

$$\mathrm{P}(A) = m_A/n = a(a - 1)/[(a + b)(a + b - 1)].$$

1.14. Une urne contient a boules blanches et b noires ($a \geqslant 2$; $b \geqslant 3$). On en tire cinq boules à la fois. Trouver la probabilité p pour que deux d'entre elles soient blanches et trois noires.

Solution. Le nombre total de cas

$$n = C_{a+b}^5 = \frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Le nombre de cas favorables

$$m = C_a^2 C_b^3 = \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}\,\frac{b(b-1)(b-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$p = \frac{m}{n} = \frac{10a(a-1)b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}.$$

1.15. Un lot composé de k pièces compte l pièces défectueuses. Pour le contrôle on tire du lot r pièces. Trouver la probabilité p pour que parmi ces dernières s pièces exactement soient défectueuses.

Réponse. $p = C_l^s C_{k-l}^{r-s} / C_k^r$.

1.16. Un dé est jeté une fois. Trouver les probabilités des événements:

A = {nombre de points pair};
B = {pas moins de cinq points};
C = {pas plus de cinq points}.

Réponse. $\mathrm{P}(A) = 1/2$; $\mathrm{P}(B) = 1/3$; $\mathrm{P}(C) = 5/6$.

1.17. Une urne contient a boules blanches et b noires ($a \geqslant 2$; $b \geqslant 2$). On tire de l'urne deux boules à la fois. Quel événement est plus probable:

A = {boules de même couleur};
B = {boules de couleur différente}?

Solution.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_a^2 + C_b^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$\mathrm{P}(B) = \frac{C_a^1 C_b^1}{C_{a+b}^2}\,\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

En comparant les numérateurs de ces fractions, on trouve

$$\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B) \text{ pour } a(a-1) + b(b-1) < 2ab,$$

c'est-à-dire

$$(a-b)^2 < a + b.$$

Ainsi, on obtient

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \text{ pour } (a-b)^2 = a + b;$$
$$\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B) \text{ pour } (a-b)^2 > a + b.$$

1.18. D'une caisse qui contient n pièces numérotées on tire au hasard l'une après l'autre toutes les pièces. Trouver la probabilité pour que les numéros des pièces extraites observent l'ordre 1, 2, ..., n.

Réponse. $1/n!$

1.19. La même caisse que dans le problème précédent, mais après le tirage le numéro de chaque pièce est noté et elle est remise dans la caisse et mélangée avec les autres. Trouver la probabilité pour que la succession enregistrée des numéros soit naturelle: 1, 2, . . ., n.

Réponse. $1/n^n$.

1.20. Au championnat de bascket-ball participent 18 équipes dont on forme au hasard deux groupes de 9 équipes chacun. Parmi les concurrents il y a 5 équipes d'extra-classe. Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {toutes les équipes d'extra-classe entrent dans le même groupe};

B = {deux équipes d'extra-classe entrent dans un groupe, et trois dans l'autre}.

Réponse.

$$P(A) = \frac{2C_5^5C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}; \quad P(B) = \frac{C_5^2C_{13}^7 + C_5^3C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

1.21. Une personne a acheté un billet de la Loterie sportive (Sportloto) pour y marquer 6 des 49 numéros mentionnés; le tirage le plus proche doit indiquer parmi ces 49 numéros les 6 numéros gagnants. Trouver la probabilité des événements suivants:

A_3 = {3 numéros des 6 gagnants sont devinés juste};

A_4 = {4 numéros des 6 sont devinés juste};

A_5 = {5 numéros des 6 sont devinés juste};

A_6 = {tous les 6 numéros sont devinés juste}.

Solution. Le problème est équivalent au tirage de 6 boules d'une urne qui contient 6 boules blanches (numéros gagnants) et 49 — 6 = = 43 boules noires (non gagnants).

$$P(A_3) = \frac{C_6^3C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0{,}01765; \quad P(A_4) = \frac{C_6^4C_{43}^2}{C_{49}^6} \approx 0{,}000969;$$

$$P(A_5) = \frac{C_6^5C_{43}^1}{C_{49}^6} \approx 0{,}00001845; \quad P(A_6) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx 0{,}715\cdot 10^{-7}.$$

1.22. Neuf fiches portent les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Deux d'entre elles sont tirées au hasard pour être rangées sur la table dans l'ordre de leur apparition, puis on lit le nombre obtenu, par exemple 07 (sept); 14 (quatorze), etc. Trouver la probabilité pour que le nombre soit pair.

Solution. La parité du nombre est déterminée par son dernier chiffre qui doit être pair (le zéro est également un nombre pair). La probabilité cherchée est la probabilité pour qu'à la deuxième place apparaisse l'un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, c'est-à-dire 5/9.

1.23. Sur cinq fiches sont inscrits les chiffres 1, 2, 3, 4, 5. Deux d'entre elles sont tirées l'une après l'autre. Trouver la probabilité pour que le nombre de la deuxième fiche tirée soit plus grand que celui de la première.

Solution. L'épreuve présente deux issues possibles:

A = {le deuxième nombre est plus grand que le premier};

B = {le deuxième nombre est plus petit que le premier}.

Les conditions de l'épreuve étant symétriques par rapport à A et B, on a $P(A) = P(B) = 1/2$.

1.24. Une caisse contient des pièces de même type, fabriquées par des usines différentes; a pièces d'entre elles sont fabriquées par l'usine I, b pièces, par l'usine II, c pièces, par l'usine III. On tire de la caisse l'une après l'autre toutes les pièces en notant les lieux de leur fabrication. Trouver la probabilité pour que la pièce de l'usine I soit tirée avant celle de l'usine II.

Solution. Suivant l'énoncé du problème, la présence ou l'absence dans la caisse des pièces de l'usine III ne joue aucun rôle; la probabilité cherchée est donc celle de tirer la première la pièce de l'usine I de la caisse, où se trouvent a pièces de l'usine I et b pièces de l'usine II; donc $a/(a + b)$.

1.25. Deux caisses contiennent des pièces interchangeables types. La première contient a bonnes pièces et b défectueuses; la deuxième, c bonnes pièces et d défectueuses. On tire de chaque caisse au hasard une pièce. Trouver la probabilité pour que les deux pièces soient bonnes.

Solution. Chaque pièce de la première caisse peut être combinée à chaque pièce de la deuxième; le nombre de cas $n = (a + b)(c + d)$. Le nombre de cas favorables $m = ac$; la probabilité de l'événement est égale à $ac/[(a + b)(c + d)]$.

1.26. Sous les conditions de l'énoncé du problème 1.25 trouver la probabilité pour que les pièces tirées soient de qualité différente.

Réponse. $(ad + bc)/[(a + b)(c + d)]$.

1.27. Sous les mêmes conditions trouver la probabilité pour que les deux pièces tirées soient défectueuses.

Réponse. $bd/[(a + b)(c + d)]$.

1.28. Une caisse contient k pièces de même type numérotées 1, 2, . . ., k. On en tire au hasard l fois les pièces une à une, leur numéro est enregistré, puis elles sont remises dans la caisse. Trouver la probabilité p pour que tous les numéros enregistrés soient différents.

Solution. Le nombre de cas $n = k^l$. Le nombre de cas favorables est égal au nombre des arrangements de k éléments l à l, c'est-à-dire

à $m = k(k-1)\ldots(k-l+1)$. La probabilité de l'événement

$$p = \frac{m}{n} = \frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{k^l} = \frac{k!}{k^l(k-l)!}.$$

1.29. Le mot « livre » est composé avec les cinq lettres écrites sur des carreaux de carton. Un enfant qui ne sait pas lire les a mélangés puis les a recomposés dans un ordre quelconque. Trouver la probabilité p pour qu'il obtienne de nouveau le même mot.

Réponse. $p = 1/5! = 1/120$.

1.30. Même question pour le mot « ananas ».

Solution. Le nombre de cas est $n = 6!$; le nombre de cas favorables n'est déjà plus un, comme dans le problème 1.29, mais $m = 3!2!$, puisque les lettres répétées a et n peuvent être permutées arbitrairement: $p = 3!2!/6! = 1/60$.

1.31. On tire à la fois quelques cartes d'un jeu de 52 cartes (4 couleurs). Combien de cartes faut-il tirer pour affirmer avec une probabilité supérieure à 0,50 qu'il y aura parmi elles des cartes de même couleur?

Solution. Notons A = {parmi les k cartes tirées pas moins de deux cartes de même couleur}.

Pour $k = 2$: $n = C_{52}^2$; $m_A = C_{13}^2 \cdot 4$; $P(A) = 0{,}235 < 0{,}50$.

Pour $k = 3$: $n = C_{52}^3$; $m_A = C_{13}^3 \cdot 4 + C_{13}^2 C_{39}^1 \cdot 4$; $P(A) = 0{,}602 > 0{,}50$.

Ainsi, il faut tirer $k \geqslant 3$ cartes.

1.32. N personnes se mettent au hasard à une table ronde ($N > 2$). Trouver la probabilité p pour que deux personnes fixées A et B se trouvent côte à côte.

Solution. Le nombre total de cas $n = N!$; calculons le nombre de cas favorables m. Deux personnes A et B peuvent être placées côte à côte de deux façons, les autres, de $(N-2)!$ façons; alors $m = 2N(N-2)!$; $p = 2N(N-2)!/N! = 2/(N-1)$. Ce même problème peut être résolu d'une façon plus simple: la personne A se met n'importe où; alors, pour B il reste $N-1$ places, dont 2 sont favorables; $p = 2/(N-1)$.

1.33. Même problème, mais la table est rectangulaire et les N personnes se mettent à table le long d'un de ses côtés.

Solution. $n = N!$; les cas favorables forment deux groupes: 1) A est assis à l'extrémité de la table; 2) A n'est pas assis à l'extrémité. Le nombre de cas du premier groupe $m_1 = 2(N-2)!$; le nombre de cas du deuxième groupe: $m_2 = 2(N-2)(N-2)!$; $p = (m_1 + m_2)/n = 2(N-1)(N-2)!/N! = 2/N$.

1.34. Soient M opérateurs et N appareils numérotés qu'ils peuvent soumettre à l'entretien. Chaque opérateur choisit au hasard et avec la même probabilité un appareil, mais sous la condition qu'aucun des appareils ne puisse être desservi par plus d'un opérateur.

Trouver la probabilité pour que les appareils choisis pour l'entretien aient les numéros 1, 2, . . ., M.

Solution. Le nombre de variantes par lesquelles on peut répartir M opérateurs suivant les N appareils est égal au nombre d'arrangements de N éléments M à M : $n = N(N-1) \ldots (N-M+1)$. D'après l'énoncé du problème, toutes ces variantes sont équiprobables, c'est-à-dire constituent un groupe de cas. Le nombre de cas favorables (dans lesquels sont desservis les M premiers appareils) est égal à $m = M!$ On en tire la probabilité cherchée

$$p = \frac{M!}{N(N-1)\ldots(N-M+1)} = \frac{1}{C_N^M}.$$

1.35. Une caisse contient K pièces interchangeables types, dont K_1 pièces du premier type, . . ., K_i pièces du i-ième type, . . ., K_m pièces du m-ième type; $\sum_{i=1}^{m} K_i = K$. On en tire k pièces au hasard. Trouver la probabilité pour que parmi ces dernières il y ait k_1 pièces du premier type, . . ., k_i pièces du i-ième type, . . ., k_m pièces du m-ième type.

Solution. Le nombre total de cas n est égal au nombre de façons par lesquelles on peut tirer k pièces parmi les K : $n = C_K^k$. Le nombre de cas favorables

$$m = C_{K_1}^{k_1} C_{K_2}^{k_2} \ldots C_{K_m}^{k_m} = \prod_{i=1}^{m} C_{K_i}^{k_i},$$

puisque k_1 pièces du premier type peuvent être tirées de $C_{K_1}^{k_1}$ façons, . . ., k_m pièces du m-ième type, de $C_{K_m}^{k_m}$ façons, et toutes ces façons peuvent se combiner entre elles. La probabilité cherchée

$$p = \prod_{i=1}^{m} C_{K_i}^{k_i} / C_K^k.$$

1.36. Un bureau de poste a reçu 4 télégrammes; il existe en tout 4 voies de communication. Les télégrammes sont répartis au hasard entre les voies. Trouver la probabilité de l'événement A = {trois télégrammes sont transmis par une voie, un télégramme, par une autre voie, les deux voies restantes demeurent disponibles}.

Solution. Le nombre total de cas $n = 4^4$. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir une voie employée pour transmettre trois télégrammes est $C_4^1 = 4$; le nombre de procédés par lesquels on peut choisir une voie pour envoyer un télégramme est $C_3^1 = 3$. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir trois des quatre télégrammes pour les envoyer par une voie est $C_4^3 = 4$. Le nombre total de cas favorables $m_A = 4 \cdot 3 \cdot 4$.

$$P(A) = m_A/n = 4 \cdot 3 \cdot 4/4^4 = 3/16$$

1.37. M télégrammes sont distribués au hasard suivant N voies de communication ($N > M$). Trouver la probabilité de l'événement

$$A = \{\text{chaque voie transmet au plus un télégramme}\}.$$

Solution. Le nombre total de cas est N^M. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir M voies parmi N voies disponibles pour envoyer par chacune d'elles un télégramme est égal à C_N^M. Le nombre de procédés pour choisir un télégramme de M et l'envoyer par la première voie est égal à $C_M^1 = M$; le nombre de procédés par lesquels on peut choisir le deuxième télégramme des $M - 1$ télégrammes qui restent est égal à $C_{M-1}^1 = M - 1$, et ainsi de suite. Le nombre total de cas favorables à l'événement est donc $m_A = M(M-1) \ldots \ldots 1 = M!$

$$P(A) = C_N^M \cdot M!/N^M.$$

1.38*. Un bureau de poste a reçu M télégrammes qui se répartissent au hasard suivant N voies de communication. Les voies sont numérotées. Trouver la probabilité pour que par la 1-re voie soient canalisés exactement k_1 télégrammes, par la 2-ième, k_2 télégrammes, etc., par la N-ième, k_N télégrammes; de plus $\sum_{i=1}^{N} k_i = M$.

Solution. Le nombre de cas $n = N^M$. Cherchons le nombre m de cas favorables. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir k_1 des M télégrammes est égal à $C_M^{k_1}$; le nombre de procédés par lesquels des $M - (k_1 + \ldots + k_{N-1}) = k_N$ on peut choisir k_N télégrammes est égal à $C_{k_N}^{k_N} = 1$. Tous ces nombres doivent être multipliés entre eux

$$m = C_M^{k_1} C_{M-k_1}^{k_2} \ldots C_{M-(k_1+\ldots+k_{N-1})}^{k_{N-1}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{M!}{k!(M-k_1)!} \frac{(M-k_1)!}{k_2![M-(k_1+k_2)]!} \ldots \frac{[M-(k_1+k_2+\ldots+k_{N-2})]!}{k_{N-1}!\,k_N!} =$$

$$= \frac{M!}{k_1!k_2!\ldots k_N!} = \frac{M!}{\prod_{i=1}^{N} k_i!};$$

$$P(A) = m/n = M!\Big/\left(N^M \prod_{i=1}^{N} k_i!\right).$$

1.39*. Sous les conditions de l'énoncé du problème 1.37 trouver la probabilité pour que des N voies il y ait l_0 voies telles qu'elles ne canalisent aucun télégramme; l_1 telles qu'elles canalisent exactement un télégramme, etc.; l_M telles qu'elles canalisent tous les M télégrammes: $l_0 + l_1 + \ldots + l_M = N$; $0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \ldots \ldots + M \cdot l_M = M$.

Solution. Le nombre total de cas $n = N^M$. Pour trouver le nombre m de cas favorables il faut multiplier entre eux le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les voies et le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les télégrammes. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les voies vaut

$$N!/(l_0!\, l_1! \ldots l_M!) = N!\Big/\prod_{k=0}^{M} l_k!.$$

Calculons le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les télégrammes. Elles se décomposent en groupes: groupe primaire (0 télégrammes), il est vide; le premier groupe compte l_1 télégrammes; en général, le k-ième groupe compte kl_k télégrammes ($k = 1, 2, \ldots, M$). Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les groupes des télégrammes est

$$\frac{M!}{(1\cdot l_1)!\,(2l_2)!\,(3l_3)!\ldots(Ml_M)!} = \frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M}(kl_k)!}. \qquad (1.39.1)$$

Déterminons maintenant le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les télégrammes au sein du k-ième groupe, de façon que par chaque voie soient canalisés k télégrammes. Ce nombre est égal à

$$(kl_k)!/(\underbrace{k!\,k!\ldots k!}_{l_k \text{ fois}}) = (kl_k)!/(k!)^{l_k},$$

et le nombre de procédés par lesquels on peut canaliser tous les télégrammes par tous les groupes est égal au produit de tels nombres pour les k différents:

$$\prod_{k=1}^{M} \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}}. \qquad (1.39.2)$$

En multipliant entre eux (1.39.1) et (1.39.2), on obtient le nombre de procédés par lesquels on peut choisir les télégrammes

$$\frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M}(kl_k)!}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}(kl_k)!}{\prod\limits_{k=1}^{M}(k!)^{l_k}} = \frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M}(k!)^{l_k}}.$$

En multipliant cette expression par le nombre de variantes par lesquelles on peut choisir les voies, on trouve le nombre de cas favorables

$$m = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{M} l_i!} \cdot \frac{M!}{\prod_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}.$$

On en tire la probabilité de l'événement qui nous intéresse:

$$P(A) = \frac{N!\,M!}{N^M \prod_{i=0}^{M} l_i! \prod_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}. \qquad (1.39.3)$$

1.40. Soit sur l'écran circulaire d'un radar, de rayon r, l'image ponctuelle M de l'objet (fig. 1.40), qui occupe une position aléatoire dans le cadre de l'écran, aucune des régions de ce dernier n'étant préférentielle (l'image de l'objet se projette sur l'écran au hasard). On envisage l'événement A qui consiste en ce que la distance ρ du point M au centre de l'écran soit inférieure à $r/2$: $A = \{\rho < r/2\}$. Trouver la probabilité de cet événement.

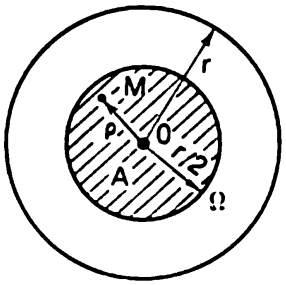


Fig. 1.40

Solution. L'espace Ω des événements élémentaires est l'intérieur du cercle de rayon r (la région A hachurée sur la figure 1.40)

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = 1/4.$$

1.41. Soit une bande de magnétophone longue de $L = 200$ m sur les deux pistes de laquelle sont enregistrés des messages; sur une piste la longueur du message enregistré est $l_1 = 30$ m, et sur l'autre, $l_2 = 50$ m; l'emplacement des enregistrements est inconnu. La bande étant endommagée, il a fallu couper un tronçon $l_0 = 10$ m à 80 m du début de la bande. Trouver les probabilités des événements suivants:

A = {ni l'un ni l'autre enregistrements ne sont endommagés};
B = {le premier enregistrement est endommagé, le deuxième, non};
C = {le deuxième enregistrement est endommagé, le premier, non};
D = {les deux enregistrements sont endommagés}.

Solution. La position des enregistrements étant parfaitement inconnue, tirons la conclusion que toute position du début de chacun d'eux, qui assure à l'enregistrement de se ranger sur la bande, est tout aussi vraisemblable que n'importe quelle autre. Désignons

par x l'abscisse du début du premier enregistrement, par y, celle du deuxième. L'espace des événements élémentaires est un rectangle de longueur $L - l_1 = 170$ m, de hauteur $L - l_2 = 150$ m (fig. 1.41). Sur la figure 1.41 les hachures différentes marquent les régions qui correspondent à l'endommagement du premier et du deuxième enre-

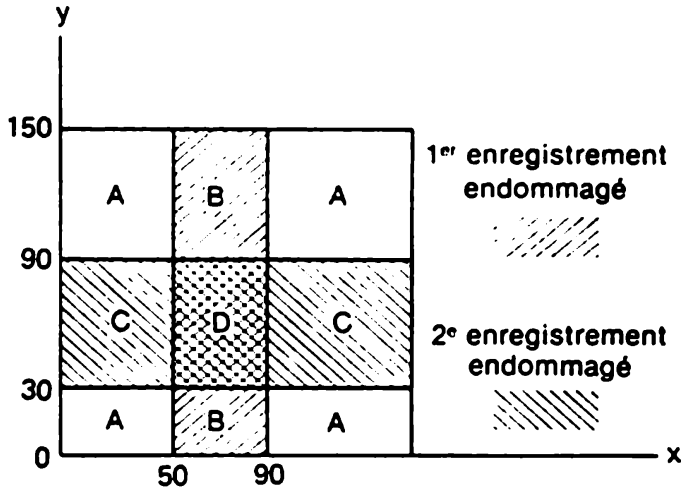


Fig. 1.41

gistrements; les lettres A, B, C, D les régions qui correspondent à chacun des événements A, B, C, D (toutes ces régions, sauf D, se composent de différentes parties).

$$S_\Omega = 170 \cdot 150 = 25\,500 \text{ m}^2;$$
$$S_A = 50 \cdot 60 + 80 \cdot 60 + 30 \cdot 50 + 80 \cdot 30 = 11\,700 \text{ m}^2;$$
$$S_B = 40 \cdot 60 + 40 \cdot 30 = 3600 \text{ m}^2;$$
$$S_C = 50 \cdot 60 + 80 \cdot 60 = 7800 \text{ m}^2;$$
$$S_D = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ m}^2.$$
$$\mathrm{P}(A) = 0{,}459; \quad \mathrm{P}(B) = 0{,}141;$$
$$\mathrm{P}(C) = 0{,}306; \quad \mathrm{P}(D) = 0{,}094.$$

1.42. Deux signaux d'une durée $\tau < 1/2$ chacun sont transmis par le canal radio-électrique pendant un intervalle de temps (0; 1); chacun d'eux commence avec la même probabilité à n'importe quel instant de l'intervalle $(0; 1 - \tau)$. Si les signaux se chevauchent ne serait-ce qu'en partie, ils se perturbent tous les deux et ne peuvent être reçus. Trouver la probabilité pour que les signaux soient reçus sans perturbations.

Solution. Notons par x l'instant du début du premier signal, par y, celui du deuxième. L'espace des événements élémentaires est

représenté sur la figure 1.42. Les régions A hachurées correspondent à l'événement

$$A = \{\text{signaux non perturbés}\} = \{|x - y| > \tau\}.$$

$$P(A) = S_A/S_\Omega = (1 - 2\tau)^2/(1 - \tau)^2.$$

1.43. On a deux lignes parallèles de communication téléphonique de longueur l (fig. 1.43, a) séparées par une distance $d < l$. On sait que chacune d'elles présente quelque part (on ne sait pas juste où) une rupture. Trouver la probabilité pour que la distance R entre les points de rupture ne soit pas supérieure à a $(d < a < \sqrt{l^2 + d^2})$.

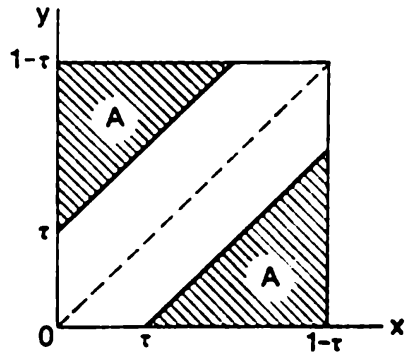


Fig. 1.42

Solution. Introduisons la notation x pour l'abscisse du premier point de rupture, et y, pour celle du deuxième; $R = \sqrt{|x - y|^2 + d^2}$; l'événement dont il s'agit $A = \{|x - y|^2 + d^2 \leqslant a^2\} = \{|x - y| \leqslant \sqrt{a^2 - d^2}\}$. L'espace des événements élémentaires est un carré de côté l; $S_\Omega = l^2$. Sur la figure 1.43, b, la région A est hachurée

$$S_A = 2l\sqrt{a^2 - d^2} - a^2 + d^2;$$

$$P(A) = \frac{2}{l}\sqrt{a^2 - d^2} - \frac{a^2 + d^2}{l^2}.$$

1.44. Une tige de longueur 1 est cassée en trois parties arbitraires x, y, z (fig. 1.44, a). Trouver la probabilité pour que les tronçons obtenus permettent de composer un triangle.

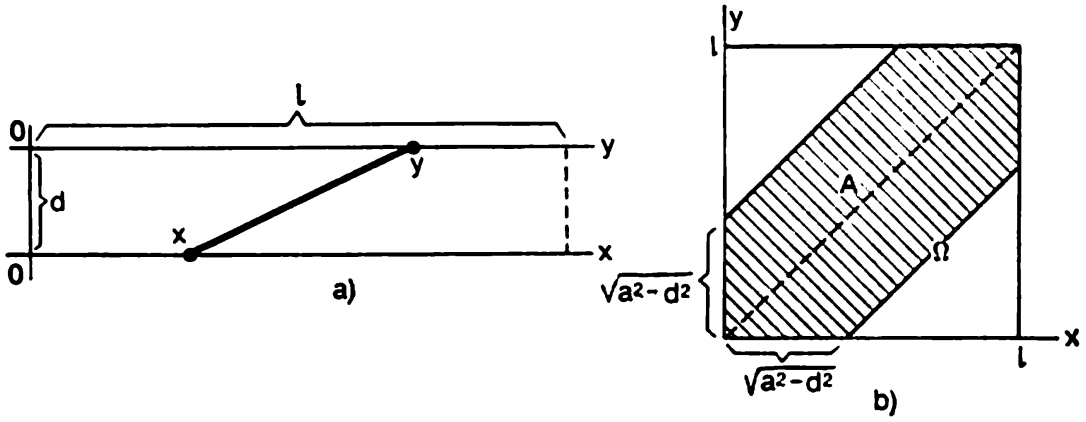


Fig. 1.43

Solution. L'événement élémentaire ω est caractérisé par deux paramètres: x et y [étant donné que $z = 1 - (x + y)$]. Représentons

cet événement par un point dans le plan xOy (fig. 1.44, *b*). Les variables x, y sont soumises aux conditions: $x > 0$; $y > 0$; $x + y < 1$; l'espace des événements élémentaires est la partie intérieure d'un triangle rectangle à côtés égaux à l'unité; $S_\Omega = 1/2$.

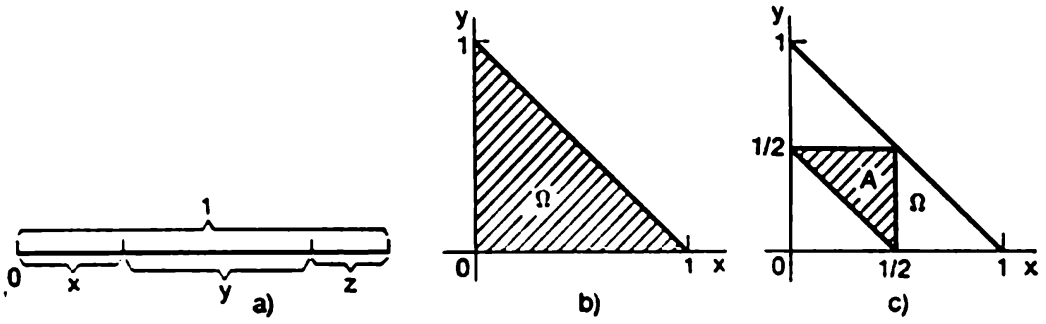


Fig. 1.44

La condition d'après laquelle les tronçons x, y, $1 - (x + y)$ rendent possible la composition d'un triangle se ramène à deux conditions suivantes: 1) la somme de deux côtés quelconques est plus grande que le troisième côté; 2) la différence de deux côtés quelconques est plus petite que le troisième côté. A cette condition correspond la région triangulaire A (fig. 1.44, *c*) d'aire $S_A = (1/2)(1/4) = 1/8$; $P(A) = S_A/S_\Omega = 1/4$.

1.45. *Problème de Buffon.* Un plan est divisé par des droites parallèles tracées à la distance L l'une de l'autre (fig. 1.45, *a*). Sur le

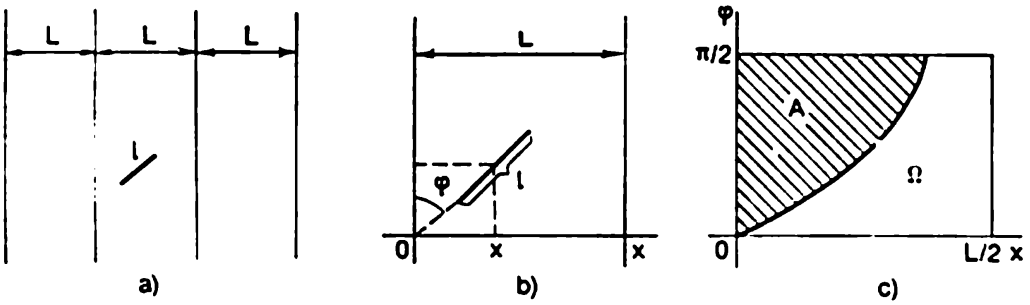


Fig. 1.45

plan on jette au hasard une aiguille (segment) de longueur $l < L$. Trouver la probabilité pour que l'aiguille croise l'une des droites.

Solution. Déterminons l'issue de l'épreuve (position de l'aiguille) par deux nombres: l'abscisse x du centre de l'aiguille par rapport à la droite la plus proche de gauche, et l'angle φ que fait l'aiguille avec la direction des droites (fig. 1.45, *b*). Nous entendrons par le fait que l'aiguille est jetée sur le plan au hasard, que toutes les valeurs de x et de φ sont équiprobables. On conçoit que sans restreindre la généralité on peut borner les valeurs éventuelles de x par l'intervalle

de 0 à $L/2$, et celles de φ, par l'intervalle de 0 à $\pi/2$, et envisager le croisement éventuel seulement pour une des droites (celle qui est la plus proche à gauche). L'espace des événements élémentaires Ω est un rectangle de côtés $L/2$ et $\pi/2$ (fig. 1.45, *c*) ; $S_\Omega = L\pi/4$. L'aiguille croisera la droite si l'abscisse x de son centre est inférieure à $(l/2) \sin \varphi$; l'événement qui nous intéresse $A = \{x < (l/2) \sin \varphi\}$. La région A de la figure 1.45, *c* est hachurée ; son aire

$$S_A = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{l}{2} ; \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2l}{\pi L} .$$

Note. Cette formule obtenue par Buffon dès le XVIIIe siècle a été vérifiée expérimentalement à bien plus d'une reprise, en calculant à cet effet la fréquence des croisements dans une longue série des jets. On s'en est servi même pour faire une estimation approchée du nombre π, dont les résultats ont été parfaitement satisfaisants.

CHAPITRE II

AXIOMATIQUE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS. SOMME ET PRODUIT DES PROBABILITÉS

2.0. Supposons qu'à chaque événement A (sous-ensemble de l'espace des événements élémentaires Ω) correspond une probabilité $P(A)$ bien déterminée et demandons que les probabilités des événements vérifient les axiomes suivants :

1. *La probabilité d'un événement est comprise entre zéro et l'unité :*

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{2.0.1}$$

2. *Si A et B sont des événements incompatibles ($AB = \varnothing$), alors*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2.0.2}$$

L'axiome (2.0.2) se prête sans peine à la généralisation (en appliquant la loi commutative de la somme) à un nombre quelconque d'événements : si $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$, il vient

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{2.0.3}$$

c'est-à-dire que *la probabilité de la somme des événements incompatibles est égale à la somme des probabilités de ces événements.*

L'axiome de la somme des probabilités s'appelle aussi « théorème des probabilités totales » facilement démontré pour les expériences qui se ramènent au schéma des cas.

3. *Si on a un ensemble dénombrable des événements incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ($A_iA_j = \varnothing$ pour $i \neq j$), alors*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{2.0.4}$$

Revenons aux propriétés introduites dans ce qui précède pour les groupes des événements. Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits *équiprobables*, si $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)$. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un *groupe complet* si $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits *incompatibles* si $A_iA_j = \Omega$ pour $i \neq j$. On les appelle *cas* (chances), s'ils possèdent les trois propriétés : sont équiprobables, incompatibles et forment un groupe complet.

Corollaires du théorème des probabilités totales

1. *Si l'épreuve se ramène au schéma des cas, la probabilité de l'événement A peut se calculer d'après la formule classique*

$$P(A) = \frac{m_A}{n},$$

où m_A est le nombre de cas favorables à l'événement A ; n, le nombre total de cas. En effet, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un groupe complet, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Ils sont incompatibles; on peut donc leur appliquer le théorème des probabilités totales

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Ils sont équiprobables; on a donc

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \ldots = \mathrm{P}(A_n) = 1/n.$$

Les cas favorables à l'événement A forment m_A de ses variantes, d'où

$$\mathrm{P}(A) = \underbrace{1/n + 1/n + \ldots + 1/n}_{m_A \text{ fois}}$$

ou

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m_A}{n}. \tag{2.0.5}$$

2. *La somme des probabilités d'un groupe complet d'événements incompatibles est égale à l'unité*: c'est-à-dire si $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $A_i A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) = 1. \tag{2.0.6}$$

Cette formule est immédiate de l'incompatibilité des événements A_1, $A_2, \ldots, A_n$ et de la propriété de complétude de leur groupe.

3. Cas particulier du corollaire précédent: *la somme des probabilités des événements contraires est égale à l'unité*:

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1. \tag{2.0.7}$$

Dans la théorie des probabilités cette propriété joue un grand rôle. Il arrive souvent qu'il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$, que celle de l'événement A qui nous intéresse. Alors, on calcule $\mathrm{P}(\bar{A})$ pour la retrancher de l'unité:

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}). \tag{2.0.8}$$

4. Si A et B sont des événements compatibles, il vient

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB). \tag{2.0.9}$$

En effet (voir figure 2.0.1), l'événement $A + B$ se décompose en trois variantes incompatibles: $A + B = AB + BA + AB$; d'après le théorème des probabilités totales

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(BA) + \mathrm{P}(AB); \tag{2.0.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}(AB) &= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB); \\ \mathrm{P}(BA) &= \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB). \end{aligned}\right\} \tag{2.0.11}$$

En portant (2.0.11) dans (2.0.10), on obtient (2.0.9) *).

Quelquefois, le calcul immédiat des probabilités suivant le schéma des cas peut également être étendu au cas où l'ensemble Ω des événements élémentaires est non dénombrable, constitue, par exemple, une collection des points sur un plan à l'intérieur d'un certain domaine Ω (fig. 2.0.2).

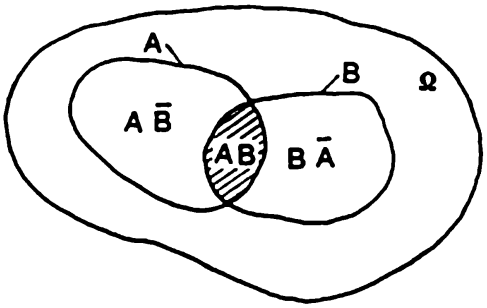


Fig. 2.0.1

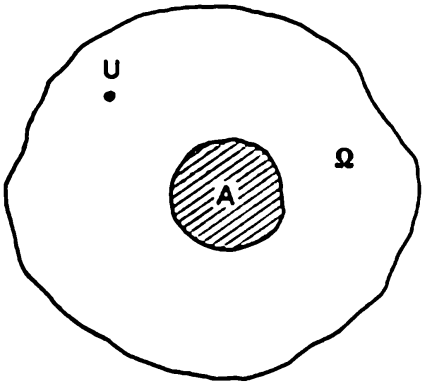


Fig. 2.0.2

L'épreuve consiste à jeter « au hasard » dans les limites du domaine Ω le point U ; on suppose que dans les limites du domaine toutes ses positions soient équiprobables. Alors, la probabilité pour que le point U se trouve dans un domaine A quelconque (sous-ensemble de Ω) est égale à l'aire relative de ce domaine :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\{U \in A\} = S_A/S_\Omega, \tag{2.0.12}$$

où S_A est l'aire du domaine A ; S_Ω, l'aire de toute la figure Ω.

Parfois on dit pour ce procédé de calcul qu'il est réalisé d'après une loi « géométrique ».

Probabilité conditionnelle. Théorème des probabilités composées

On appelle *probabilité conditionnelle* d'un événement B, A étant réalisé, la variable

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)} \tag{2.0.13}$$

(on suppose alors que $\mathrm{P}(A) \neq 0$).

La probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(B \mid A)$ peut être interprétée comme la probabilité d'un événement B calculée *sous la condition que A a été réalisé*. Dans la pratique, la formule (2.0.13) se lit dans l'ordre inverse et on l'écrit sous la forme :

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A), \tag{2.0.14}$$

c'est-à-dire que *la probabilité du produit* (de l'intersection, de la réunion) *de deux événements est égale au produit de la probabilité de l'un d'eux par la probabilité conditionnelle du deuxième, le premier étant réalisé.*

---

*) Les formules du type (2.0.9) peuvent se déduire également pour un nombre d'événements compatibles plus grand que deux ; par exemple :

$$\mathrm{P}(A + B + C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(AC) - \\ - \mathrm{P}(BC) + \mathrm{P}(ABC).$$

C'est ce qu'on appelle le *théorème (axiome) des probabilités composées* qui avec le théorème des probabilités totales constitue les principes fondamentaux de la théorie des probabilités.

L'un quelconque des événements A et B peut être choisi comme « premier »; aussi, le théorème des probabilités composées peut-il s'écrire

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

(on suppose que $P(B) \neq 0$).

Exemple. On tire d'une urne qui contient 4 boules blanches et 3 noires simultanément ou successivement deux boules. Trouver la probabilité de l'événement $C = \{$les deux boules sont blanches$\}$.

Solution. Ecrivons l'événement C sous la forme d'un produit:

$$C = AB,$$

où $A = \{$boule blanche première$\}$; $B = \{$boule blanche deuxième$\}$. $P(A) = 4/7$. La probabilité conditionnelle $P(B \mid A)$ s'obtient comme la probabilité pour que la deuxième boule soit blanche, en supposant que la première le soit:

$$P(B \mid A) = 3/6 = 1/2.$$

On en tire d'après le théorème des probabilités composées

$$P(C) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 4/7 \cdot 1/2 = 2/7.$$

Le théorème des probabilités composées s'étend sur un nombre quelconque d'événements:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = \\ = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}), \quad (2.0.15)$$

c'est-à-dire que *la probabilité du produit de plusieurs événements est égale au produit des probabilités de ces événements, la probabilité de chaque événement successif se calculant à condition que soient réalisés tous les événements précédents.*

Exemple. Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5. On en tire l'une après l'autre toutes les cinq boules. Trouver la probabilité pour que leurs numéros se présentent dans l'ordre croissant.

Solution. $P(A) = P\{1, 2, 3, 4, 5\} = 1/5 \cdot 1/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/120$.

Le théorème des probabilités composées acquiert une forme particulièrement simple lorsque les événements constitutifs du produit sont indépendants.

L'événement A est dit *indépendant de l'événement* B si sa probabilité ne dépend pas de la réalisation ou de la non-réalisation de B, c'est-à-dire

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Dans le cas contraire, si $P(A \mid B) \neq P(A)$, l'événement A *dépend de* B.

La dépendance et l'indépendance des événements sont *toujours mutuelles*: si A ne dépend pas de B, B non plus ne dépend pas de A, et inversement.

Les événements A et B sont dits *indépendants*, si l'apparition de l'un d'eux n'influe pas sur la probabilité de l'apparition de l'autre.

Exemple. Deux personnes jettent chacune une pièce de monnaie; les événements $A = \{$pile pour la première pièce de monnaie$\}$ et $B = \{$pile pour la seconde pièce$\}$ sont indépendants. Il est clair que l'indépendance se conserve également lorsque les pièces sont jetées par la même personne.

Pour les événements indépendants le théorème des probabilités composées prend une forme particulièrement simple:

$$P(AB) = P(A)\, P(B), \quad (2.0.16)$$

c'est-à-dire que *la probabilité du produit de deux événements indépendants est égale au produit de leurs probabilités.*

Plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits *indépendants*, si l'un quelconque d'entre eux ne dépend d'aucune combinaison des autres. Dans ce cas également le théorème des probabilités composées devient bien simple:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n), \qquad (2.0.17)$$

ou, en utilisant le symbole du produit,

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad (2.0.18)$$

c'est-à-dire que *la probabilité du produit de plusieurs événements indépendants est égale au produit des probabilités de ces événements.*

Plusieurs épreuves sont dites *indépendantes* si la probabilité de telle ou telle issue de chacune d'elles ne dépend pas des résultats auxquels ont abouti les autres épreuves.

Exemple. On tire n coups unitaires dont chacun peut « atteindre » la cible ou la « rater ». A chaque coup on reprend la visée, les points atteints de la cible ne sont pas observés, le tir n'est pas corrigé. Les épreuves peuvent être considérées comme indépendantes.

Si le tir est mené avec une mitraillette par salves de n coups, la visée est réalisée une fois par salve; les n coups sont alors des épreuves dépendantes.

Dans les cas courants les théorèmes des probabilités totales et composées sont appliqués ensemble. Voici le schéma typique: l'événement A qui nous intéresse est partitionné en plusieurs variantes incompatibles:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Chaque variante étant présentée comme le produit d'événements, sa probabilité se calcule d'après le théorème des probabilités composées, puis les probabilités obtenues sont sommées.

Exemple. On tire à la cible trois coups indépendants; la probabilité d'atteindre la cible à chaque coup est p, celle du coup raté, $q = 1 - p$. Trouver la probabilité pour que des trois coups tirés, un coup exactement atteint la cible.

Solution. L'événement $B = \{$un coup exactement atteint la cible$\}$ est partitionné en trois variantes incompatibles:

$$B_1 = \{+\,-\,-\}; \quad B_2 = \{-\,+\,-\}; \quad B_3 = \{-\,-\,+\},$$

où le signe « plus » désigne le coup au but, et le signe « moins », le coup raté. En calculant la probabilité de chaque variante d'après le théorème des probabilités composées des événements indépendants, on obtient

$$P(B) = pqq + qpq + qqp = 3pq^2.$$

Pour plusieurs épreuves indépendantes la probabilité d'un nombre quelconque d'apparitions des événements se calcule absolument de la même façon.

Si on effectue n épreuves indépendantes, dont chacune peut amener ou ne pas amener l'événement A (« succès » de l'épreuve), la probabilité P_m pour que n épreuves amènent le « succès » m fois exactement se calcule d'après la formule

$$P_m = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad (2.0.19)$$

ou en désignant $1 - p = q$,

$$P_m = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2.0.20)$$

où C_n^m est le nombre de combinaisons de n éléments m à m calculé d'après la formule

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-m-1)}{m!}. \qquad (2.0.21)$$

Il convient de retenir que

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

La probabilité pour que n épreuves indépendantes amènent l'événement A (« succès ») au moins m fois se calcule d'après la formule

$$R_m = \sum_{k=m}^{n} P_k = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.0.22}$$

ou en recourant à la probabilité de l'événement contraire {moins de m succès}, d'après la formule

$$R_m = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{2.0.23}$$

Des deux formules (2.0.22) et (2.0.23) on choisit celle qui compte moins de termes.

Problèmes et exercices

2.1. La somme de deux événements A et B peut-elle coïncider avec leur produit?

Réponse. Oui, si l'événement A est équivalent à l'événement B ($A \subseteq B$ et $B \subseteq A$). Par exemple, si la perturbation d'un message transmis par une voie de communication peut être due seulement à la présence des bruits dans l'intervalle de temps occupé par le message, et se produit forcément en leur présence, alors les événements:

A = {message perturbé},

B = {présence des bruits dans l'intervalle de temps couvert par le message},

sont équivalents: $A = B$; $A + B = A = B$; $AB = A = B$.

2.2. Montrer que si deux événements A et B sont compatibles, on a

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{2.2.1}$$

Solution. Représentons l'événement $A + B$ comme la somme des trois événements incompatibles: $A\overline{B}$ (A, mais non B); $\overline{A}B$ (B, mais non A) et AB (et A et B) (voir fig. 2.2)

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

Exprimons les événements A et B:

$$A = AB + A\overline{B}; \quad B = \overline{A}B + AB.$$

En appliquant le théorème des probabilités totales, on trouve

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB); \tag{2.2.2}$$

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB); \quad P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB).$$

En sommant les deux dernières expressions, on obtient

$$P(A) + P(B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + 2P(AB).$$

Retranchant (2.2.2), il vient

$$P(A) + P(B) = P(A + B) + P(AB),$$

d'où l'on tire justement (2.2.1). L'expression (2.2.1) entraîne que toujours

$$P(A + B) \leqslant P(A) + P(B),$$

et le signe d'égalité ne s'obtient que pour des événements incompatibles.

2.3. Ecrire l'expression de la probabilité de la somme de trois événements compatibles.

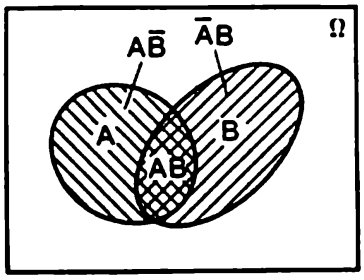


Fig. 2.2

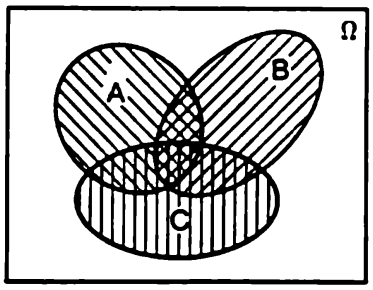


Fig. 2.3

Solution. La figure 2.3 permet de tirer

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - \\ - P(BC) + P(ABC).$$

2.4. L'épreuve consiste à jeter deux pièces de monnaie. On envisage les événements suivants:

A = {pile à la première pièce};
B = {face à la première pièce};
C = {pile à la deuxième pièce};
D = {face à la deuxième pièce};
E = {au moins une pile};
F = {au moins une face};
G = {une pile et une face};
H = {aucune pile};
K = {deux piles}.

Déterminer les événements de cette liste auxquels sont équivalents les événements suivants: 1) $A + C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G + E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E + K$.

Réponse. 1) $A + C = E$; 2) $AC = K$; 3) $EF = G$; 4) $G + E = E$; 5) $GE = G$; 6) $BD = H$; 7) $E + K = E$.

2.5. Trois messages sont transmis par une voie de communication; la transmission de chacun d'eux peut être correcte ou perturbée. On considère les événements:

A_i = {i-ième message transmis correctement};
$\bar{A}_i$ = {i-ième message perturbé} ($i = 1, 2, 3$).

Exprimer sous la forme de sommes, de produits ou de sommes de produits des événements A_i, $\bar{A}_i$ les événements suivants:

A = {la transmission de tous les trois messages est correcte};
B = {la transmission de tous les trois messages est perturbée};
C = {au moins un message est transmis correctement};
D = {au moins un message est perturbé};
E = {pas moins de deux messages sont transmis correctement};
F = {pas plus d'un message est transmis correctement};
G = {le premier message transmis correctement est le troisième dans l'ordre de transmission}.

Réponse. $A = A_1A_2A_3$; $B = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; $C = A_1A_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3$; $D = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3$; $E = A_1A_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$; $F = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$; $G = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

2.6. On observe un groupe composé de quatre objets homogènes. Pendant cette observation chacun de ces objets peut être repéré ou non. On considère les événements:

A = {un seul exactement des quatre objets est repéré};
B = {au moins un objet est repéré};
C = {pas moins de deux objets sont repérés};
D = {deux objets exactement sont repérés};
E = {trois objets exactement sont repérés};
F = {tous les quatre objets sont repérés}.

Dire en quoi consistent les événements: 1) $A + B$; 2) AB; 3) $B + C$; 4) BC; 5) $D + E + F$; 6) BF. Les événements BF et CF coïncident-ils? Les événements BC et D coïncident-ils?

Réponse. 1) $A + B = B$; 2) $AB = A$; 3) $B + C = B$; 4) $BC = C$; 5) $D + E + F = C$; 6) $BF = F$. Les événements BF et CF coïncident; BC et D ne coïncident pas.

2.7. Dans ce qui suit on indique les épreuves et les événements auxquels elles peuvent donner lieu. Nommer les événements contraires par rapport à ces derniers.

1) Deux messages sont transmis par voie de communication: événement A = {les deux messages sont transmis correctement}.

2) Une boule est tirée d'une urne qui contient deux boules blanches, trois noires et quatre rouges; événement B = {sortie d'une boule blanche}.

3) On transmet cinq messages; événement C = {pas moins de trois messages sont transmis correctement}.

4) N coups sont tirés à la cible; événement D = {au moins un coup au but}.

5) Une installation composée de k ensembles est soumise à une révision préventive; à la suite de la révision chaque ensemble peut être soit réglé sur-le-champ, soit dirigé vers la réparation. Evénement E = {aucun ensemble ne sera à réparer}.

6) Deux joueurs font une partie d'échecs; événement F = = {les blancs gagnent}.

Réponse. 1) $\overline{A}$ = {au moins un message est perturbé}; 2) $\overline{B}$ = = {sortie d'une boule noire ou rouge}; 3) $\overline{C}$ = {pas plus de deux messages sont transmis correctement}; 4) $\overline{D}$ = {aucun coup au but}; 5) $\overline{E}$ = {au moins un ensemble sera à réparer}; 6) $\overline{F}$ = {les noirs gagnent ou partie nulle}.

2.8. L'événement B est un cas particulier de l'événement A : $B \subseteq \subseteq A$, c'est-à-dire le fait que l'événement B est réalisé implique que l'événement A avait eu lieu. La réalisation de $\overline{B}$ entraîne-t-elle que $\overline{A}$ a été réalisé?

Réponse. Non, n'entraîne pas. Par exemple, l'épreuve consiste à transmettre deux messages; événement A = {au moins un message perturbé}; événement B = {deux messages perturbés}. Si l'événement $\overline{B}$ = {moins de deux messages perturbés} a eu lieu, il n'entraîne pas encore qu'aucun message n'a été perturbé (événement $\overline{A}$). Par contre, $\overline{A}$ entraîne $\overline{B}$ ($\overline{A} \subseteq \overline{B}$).

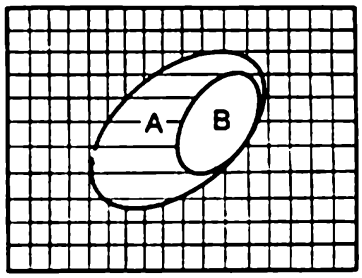


Fig. 2.8

La figure 2.8 représente les événements A et B, de plus $B \subseteq A$, ainsi que les événements contraires $\overline{A}$ (hachures verticales) et $\overline{B}$ (hachures horizontales). Il est immédiat que $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

2.9. Si l'événement B est un cas particulier de l'événement A ($B \subseteq \overline{A}$), ces événements sont-ils dépendants ou non?

Réponse. Dépendants si $P(A) \neq 1$, du fait que $P(A \mid B) = 1$.

2.10. Y a-t-il dépendance ou indépendance pour 1) les événements incompatibles; 2) les événements qui forment un groupe complet; 3) les événements équiprobables?

Réponse. 1) Ils sont dépendants, puisque l'apparition de l'un d'eux annule les probabilités de tous les autres; 2) ils sont dépendants du fait que la non-apparition de tous sauf un transforme en unité la probabilité du dernier événement; 3) ils peuvent être aussi bien dépendants qu'indépendants.

2.11. L'épreuve consiste à jeter successivement deux pièces de monnaie. On considère les événements:

A = {pile à la première pièce};
D = {au moins une pile};
E = {au moins une face};
F = {pile à la deuxième pièce}.

Déterminer si les couples des événements sont dépendants ou indépendants: 1) A et E; 2) A et F; 3) D et E; 4) D et F. Calculer les probabilités conditionnelles et inconditionnelles des événements de chaque couple.

Réponse.

1) $P(E) = 3/4$; $P(E \mid A) = 1/2$, événements dépendants;
2) $P(A) = 1/2$; $P(A \mid F) = 1/2$, événements indépendants;
3) $P(D) = 3/4$; $P(D \mid E) = 2/3$, événements dépendants;
4) $P(D) = 3/4$; $P(D \mid F) = 1$, événements dépendants.

2.12. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire simultanément ou successivement deux boules. Trouver la probabilité pour que les deux boules soient blanches *).

Réponse. D'après le théorème des probabilités composées

$$P\{\text{deux boules sont blanches}\} = P\{\text{bb}\} = \frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}.$$

2.13. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire une boule pour noter sa couleur et la remettre dans l'urne. Ensuite on en tire encore une boule. Trouver la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.

Réponse. $[a/(a+b)]^2$.

2.14. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire à la fois deux boules. Trouver la probabilité pour que ces boules soient de couleur différente.

Solution. L'événement peut se produire sous la forme de deux variantes incompatibles {bn} ou {nb}; d'après les théorèmes des probabilités totales et des probabilités composées

$$P\{\text{bn}+\text{nb}\} = \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2.15. Même problème, mais les boules sont tirées successivement, et après le tirage, la première boule est remise dans l'urne.

Réponse. $2ab/(a+b)^2$.

2.16. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire au hasard l'une après l'autre toutes les boules. Trouver la probabilité pour que la deuxième boule dans l'ordre du tirage soit blanche.

*) Comme plusieurs autres problèmes du présent chapitre, ce problème peut être résolu également par calcul immédiat du nombre de cas; ici il faut le résoudre en appliquant le théorème des probabilités totales ou le théorème des probabilités composées.

Solution. La probabilité de l'événement peut s'obtenir directement (voir problème 1.12). Le même résultat peut s'obtenir d'après les théorèmes des probabilités totales et des probabilités composées

$$P\{bb+nb\}=\frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b}.$$

2.17. Une urne contient a boules blanches, b noires et c rouges. Trois d'entre elles sont tirées au hasard. Trouver la probabilité pour qu'au moins deux d'entre elles soient de même couleur.

Solution. Pour trouver la probabilité de l'événement : {au moins deux boules de même couleur} considérons l'événement contraire $\overline{A}$ = {toutes les boules de couleur différente}

$$P(\overline{A})=P\{\underbrace{bnr+brn+rnb+\ldots}_{6\text{ combinaisons}}\}=6\,\frac{a}{a+b+c}\,\frac{b}{a+b+c-1}\,\frac{c}{a+b+c-2}.$$

On en tire

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}.$$

2.18. Une pièce de monnaie est jetée tant que n'apparaissent de suite deux pile ou deux face (voir problème 1.5). Trouver la probabilité de l'événement A = {il faut pas plus de trois jets}.

Solution. Notons « p » pile, « f », face et écrivons A sous la forme A = {pp} + {ff} + {pff} + {fpp}. D'après les théorèmes des probabilités totales et des probabilités composées

$$P(A) = P\{pp\} + P\{ff\} + P\{pff\} + P\{fpp\} =$$
$$= 1/2\cdot 1/2 + 1/2\cdot 1/2 + 1/2\cdot 1/2\cdot 1/2 + 1/2\cdot 1/2\cdot 1/2 = 3/4.$$

2.19. Une armoire contient 9 appareils de même type. Au début de l'épreuve ils sont tous neufs (sans être aucune fois en service). On prend au hasard pour un service provisoire trois appareils; après l'utilisation on les remet dans l'armoire. Par son aspect extérieur un appareil qui a déjà servi ne se distingue en rien d'un appareil neuf. Trouver la probabilité de l'événement

A = {après un triple choix et un triple service il ne reste aucun appareil neuf}.

Solution. L'événement A peut se produire d'une façon et d'une seule : la première, la deuxième et la troisième fois les appareils tirés de l'armoire doivent être neufs. La première fois ceci est assuré; donc

$$P(A) = 1\cdot 6/9\cdot 5/8\cdot 4/7\cdot 3/9\cdot 2/8\cdot 1/7 \approx 0{,}0028.$$

2.20. L'énoncé du problème 2.19 est modifié de la façon suivante : l'armoire contient $N = lM$ appareils; on en tire M appareils au hasard pour une exploitation provisoire. Trouver la probabilité p

pour que, après la l-ième répétition de cette procédure, il ne reste dans l'armoire aucun appareil neuf.

Réponse.

$$p = \frac{(N-M)!}{[N(N-1)\ldots(N-M+1)]^{l-1}}.$$

2.21. Une armoire contient n appareils neufs; on en tire k au hasard pour les mettre en service pendant un certain temps ($k \leqslant n/2$). Ensuite les appareils sont remis dans l'armoire, puis on retire de nouveau au hasard k appareils. Trouver la probabilité p pour que les derniers k appareils soient neufs.

Réponse. $p = \frac{n-k}{n}\,\frac{n-k-1}{n-1}\cdots\frac{n-2k+1}{n-k+1} = \frac{[(n-k)!]^2}{n!\,(n-2k)!}$.

2.22. Un appareil se compose de quatre ensembles: premier, deuxième, troisième et quatrième, qui pendant un temps τ du fonctionnement de l'appareil peuvent tomber en panne indépendamment l'un de l'autre. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) de l'i-ième ensemble est égale à p_i; la probabilité d'une panne $q_i = 1 - p_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {tous les ensembles fonctionnent sans défaillance};
B = {premier ensemble tombe en panne; les autres non};
C = {un ensemble tombe en panne, les autres non};
D = {des quatre exactement deux ensembles tombent en panne};
E = {pas moins de deux ensembles tombent en panne};
F = {au moins un ensemble tombe en panne}.

Réponse. $\mathrm{P}(A) = p_1p_2p_3p_4$; $\mathrm{P}(B) = q_1p_2p_3p_4$; $\mathrm{P}(C) = q_1p_2p_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1p_2p_3q_4$; $\mathrm{P}(D) = q_1q_2p_3p_4 + p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4$; $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(D) + q_1q_2q_3p_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + p_1q_2q_3q_4 + q_1q_2q_3q_4$; $\mathrm{P}(F) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

2.23. Sur une gare de triage arrive un train composé de k wagons adressés à des destinataires différents: vers A_1 on dirige k_1 wagons; vers A_2, k_2 wagons; vers A_3, k_3 wagons ($k_1 + k_2 + k_3 = k$). Tel ou tel emplacement des wagons dans le train est indépendant d'un wagon à l'autre; dans le train tous les emplacements de tous les wagons sont équiprobables. Calculer la probabilité pour que tous les wagons adressés au même destinataire se trouvent l'un à côté de l'autre.

Réponse. L'événement B dont il s'agit peut présenter six variantes (le nombre de permutations de trois éléments $p_3 = 6$). Cherchons la probabilité de l'une d'elles.

C = {d'abord viennent tous les k_1 wagons destinés à A_1, puis k_2 wagons destinés à A_2, puis k_3 wagons destinés à A_3}.

$$P(C) = \frac{k_1}{k}\,\frac{k_1-1}{k-1}\cdots\frac{1}{k-k_1+1}\,\frac{k_2}{k-k_1}\,\frac{k_2-1}{k-k_1-1}\cdots$$
$$\cdots\frac{1}{k-k_1-k_2+1}\,\frac{k_3}{k-k_1-k_2}\,\frac{k_3-1}{k-k_1-k_2-1}\cdots 1,$$
$$P(B) = 6P(C).$$

2.24. Une caisse contient des pièces de même type; parmi elles a pièces de l'usine I et b pièces de l'usine II. On choisit au hasard $2k$ pièces ($2k < a$; $2k < b$). Trouver la probabilité pour que parmi les pièces choisies il y ait plus de pièces de l'usine I, que de l'usine II.

Solution. Il est plus simple de résoudre ce problème en combinant la méthode de calcul immédiat des probabilités avec le théorème des probabilités totales. L'événement A = {plus de pièces de l'usine I que de l'usine II} peut être mis sous la forme de la somme

$$A = A_{k+1} + A_{k+2} + \ldots + A_{2k} = \sum_{i=k+1}^{2k} A_i,$$

où A_i est l'apparition de i pièces de l'usine I.

Par calcul direct on trouve

$$P(A_i) = \frac{C_a^i C_b^{2k-i}}{C_{a+b}^{2k}}, \text{ d'où } P(A) = \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{C_a^i C_b^{2k-i}}{C_{a+b}^{2k}}.$$

2.25. Un lot composé de N pièces compte M pièces défectueuses. Pour le contrôle on tire du lot n pièces. Si les pièces contrôlées comptent plus de m pièces défectueuses, le lot tout entier est rebuté. Trouver la probabilité pour que le lot soit rebuté.

Solution. L'événement A = {lot rebuté} peut s'écrire sous la forme d'une somme:

$$A = A_{m+1} + A_{m+2} + \ldots + A_n = \sum_{j=m+1}^{n} A_i,$$

où A_i = {parmi les pièces contrôlées i sont défectueuses}.

$$P(A_i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}, \quad P(A) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}.$$

2.26. Une caisse contient des pièces de même type de qualité différente: parmi elles a pièces à label de qualité; b pièces de la première qualité et c pièces de deuxième qualité ($a \geqslant 4$; $b \geqslant 4$; $c \geqslant 4$). On tire de la caisse à la fois et au hasard quatre pièces sans porter l'attention à leur qualité. On considère les événements

A = {parmi les pièces retirées au moins une à label de qualité};
B = {parmi les pièces retirées au moins une de deuxième qualité}.
Trouver la probabilité de l'événement $C = A + B$.

Solution. En passant à l'événement contraire $\overline{C}$ = {ni A, ni B} = = {toutes les pièces de première qualité}, on a

$$P(\overline{C}) = \frac{b}{a+b+c}\,\frac{b-1}{a+b+c-1}\,\frac{b-2}{a+b+c-2}\,\frac{b-3}{a+b+c-3},$$

d'où $P(C) = 1 - P(\overline{C})$.

2.27. Un poste radar assurant la poursuite d'un objet cosmique en un cycle de balayage le localise avec une probabilité p. A chaque cycle l'objet est détecté indépendamment des autres cycles. Trouver la probabilité pour que l'objet soit détecté en n cycles.

Réponse. $1 - (1 - p)^n$.

2.28. Soient m postes radar dont chacun en un cycle de balayage localise l'objet avec une probabilité p (indépendamment des autres cycles et des autres postes). En un temps T chaque poste assure la réalisation de n cycles. Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {objet est détecté au moins par un poste};
B = {objet est détecté par chacun des postes}.

Réponse. $P(A) = 1 - (1 - p)^{mn}$; $P(B) = [1 - (1 - p)^n]^m$.

2.29. Les m postes radar observent indépendamment l'un de l'autre un groupe de k objets cosmiques, dont chacun, indépendamment des autres objets, est localisé par un poste avec une probabilité p. Trouver la probabilité pour que tous les objets soient localisés.

Solution. Passons à l'événement contraire $\overline{A}$ = {tous les objets sont localisés}:

$$P(\overline{A}) = [1 - (1 - p)^m]^k; \quad P(A) = 1 - [1 - (1 - p)^m]^k.$$

2.30. Une pièce est fabriquée successivement par k ouvriers; la qualité de la pièce n'est pas vérifiée au passage d'un ouvrier à l'autre. Le premier ouvrier rend la pièce rébutable avec une probabilité p_1, le deuxième, avec une probabilité p_2, etc. Trouver la probabilité pour que lors de la fabrication la pièce soit rendue défectueuse.

Réponse. $1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i)$.

2.31. Une loterie compte n billets dont l sont gagnants. Une personne achète k billets. Déterminer la probabilité pour qu'au moins un de ses billets soit gagnant.

Réponse.

$$1 - \frac{n-l}{n}\,\frac{n-l-1}{n-1}\cdots\frac{n-l-k+1}{n-k+1} = 1 - \frac{(n-l)!\,(n-k)!}{n!\,(n-l-k)!}.$$

2.32. Deux billes sont lancées au hasard et indépendamment l'une de l'autre pour occuper une des quatre cellules alignées. Avec la même probabilité 1/4 chaque bille peut tomber dans chaque cellule. Trouver la probabilité pour que les billes tombent dans les cellules voisines.

Solution. Partitionnons l'événement A = {les billes tombent dans les cellules voisines} en une somme d'autant de variantes qu'on puisse former de couples de cellules voisines; on obtient $A = A_1 + A_2 + A_3$, où

A_1 = {les billes tombent dans la première et la deuxième cellules};

A_2 = {les billes tombent dans la deuxième et la troisième cellules};

A_3 = {les billes tombent dans la troisième et la quatrième cellules}.

La probabilité de chaque variante est la même et égale à

$$1/4 \cdot 1/4 \cdot 2 = 1/8; \quad P(A) = 3/8.$$

2.33. Les k billes sont réparties au hasard et indépendamment l'une de l'autre suivant n cellules alignées ($k < n$). Trouver la probabilité pour qu'elles tombent dans k cellules voisines.

Solution. Les k cellules voisines peuvent être choisies parmi les n cellules de $n - k + 1$ façons. La probabilité pour k billes de tomber dans chacun des groupes de cellules voisines est égale à $(1/n)^k k!$ (étant donné qu'on peut les distribuer suivant ces cellules par $k!$ moyens). La probabilité de l'événement A = {les billes tombent dans k cellules voisines} est $P(A) = (1/n)^k\, k!\,(n - k + 1)$.

2.34. Pendant la journée on a déposé au bureau de poste 20 télégrammes adressés à quatre destinataires divers (cinq télégrammes à chaque destinataire). De tous les télégrammes on choisit quatre au hasard. Trouver la probabilité des événements:

A = {tous les télégrammes sont adressés à des destinataires différents};

B = {tous les télégrammes sont adressés aux mêmes destinataires}.

Solution. Pour réaliser l'événement A le destinataire du premier télégramme peut être parfaitement arbitraire, celui du deuxième doit être autre que celui du premier, le destinataire du troisième télégramme, différent de ceux des deux premiers, celui du quatrième, différent des trois premiers. D'après le théorème des probabilités composées

$$P(A) = 1 \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \approx 0{,}130.$$

D'une façon analogue

$$P(B) = 1 \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} \approx 0{,}00413.$$

2.35. Un ordinateur se compose de n groupes. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) pendant un temps T du premier groupe est égale à p_1, du deuxième, à p_2, etc. Les groupes tombent en panne indépendamment l'un de l'autre. La défaillance de tout groupe met l'ordinateur hors service. Trouver la probabilité pour que l'ordinateur soit mis hors service pendant le temps T.

Réponse. $1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$.

2.36. Lorsque le moteur est lancé, son allumage s'amorce avec une probabilité p. Trouver 1) la probabilité pour que le moteur s'engage à la deuxième mise en contact de l'allumage; 2) la probabilité pour que le moteur se mette en marche en mettant en contact l'allumage pas plus de deux fois.

Réponse. 1) $(1 - p)\,p$; 2) $1 - (1 - p)^2 = (1 - p)\,p$.

2.37. Par une voie de communication sont transmis trois messages; la précision de transmission de chacun d'eux est différente. Un message transmis peut donner lieu à l'un des événements:

A_1 = {message transmis correct};
A_2 = {message perturbé en partie};
A_3 = {message tout à fait indéchiffrable}.

Les probabilités des événements A_1, A_2, A_3 sont connues et valent p_1, p_2, p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. En admettant que les messages sont perturbés ou transmis correctement indépendamment l'un de l'autre, trouver les probabilités des événements suivants:

A = {tous les trois messages sont transmis sans perturbation};
B = {au moins un message est totalement indéchiffrable};
C = {pas moins de deux messages sont perturbés totalement ou partiellement}.

Réponse. $\mathrm{P}(A) = p_1^3$; $\mathrm{P}(B) = 1 - (p_1 + p_2)^3$; $\mathrm{P}(C) = 3\,(p_2 + p_3)^2\,p_1 + (p_2 + p_3)^3$.

2.38. Deux postes radar observent une région de l'espace où se déplace un objet pendant un temps τ. Pendant ce temps le premier poste réussit à faire $2n_1$ cycles de balayage, le deuxième, $2n_2$ cycles. Le premier poste localise l'objet indépendamment de l'autre en un cycle de balayage avec une probabilité p_1, le deuxième poste, avec une probabilité p_2. Trouver les probabilités des événements

A = {l'objet est détecté en un temps τ au moins par un poste};
B = {l'objet est détecté par le premier poste et ne l'est pas par le deuxième};
C = {l'objet n'est pas détecté pendant la première moitié du temps τ, mais l'est pendant la deuxième moitié}.

Solution. $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

$\overline{A}$ = {l'objet n'est localisé par aucun poste};

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = (1 - p_1)^{2n_1}(1 - p_2)^{2n_2}; \quad \mathrm{P}(A) = 1 - (1 - p_1)^{2n_1}(1 - p_2)^{2n_2};$$

$$P(B) = [1-(1-p_1)^{2n_1}](1-p_2)^{2n_2};$$

$$P(C) = (1-p_1)^{n_1}(1-p_2)^{n_2}[1-(1-p_1)^{n_1}(1-p_2)^{n_2}].$$

2.39. Un poste radar localise l'objet en un cycle de balayage avec une probabilité p. Combien faut-il de cycles de balayage pour que l'objet soit détecté avec une probabilité non inférieure à $\mathcal{P}$?

Solution. Désignons par N le nombre inconnu de cycles. Il faut observer la condition $1-(1-p)^N \geqslant \mathcal{P}$, d'où $(1-p)^N \leqslant 1-\mathcal{P}$ En calculant le logarithme, on obtient

$$N \log(1-p) \leqslant \log(1-\mathcal{P}); \quad N \geqslant \log(1-\mathcal{P})/\log(1-p). \tag{2.39}$$

2.40. Le message transmis par une voie de communication compte n signes (symboles). Pendant la transmission chaque signe est perturbé indépendamment des autres avec une probabilité p. Pour rendre la transmission plus sûre le message est répété k fois. Trouver la probabilité pour qu'au moins un des messages transmis ne soit perturbé en aucun de ses signes.

Solution. La probabilité pour qu'un message isolé ne soit pas perturbé est égale à $(1-p)^n$; la probabilité pour qu'au moins un des k messages ne soit pas perturbé

$$P(A) = 1-[1-(1-p)^n]^k.$$

2.41. Combien de fois faut-il transmettre le message du problème 2.40 pour que la probabilité au moins d'un message non perturbé devienne pas inférieure à $\mathcal{P}$?

Réponse. D'après la formule (2.39) on a

$$N \geqslant \log(1-\mathcal{P})/\log[1-(1-p)^n].$$

2.42. Un message important est transmis simultanément par n voies de communication ; de plus, pour rendre la transmission bien sûre, par chaque voie il est repris k fois. En une seule transmission le message est perturbé, indépendamment des autres, avec une probabilité p. Chaque voie de communication, indépendamment des autres, est « bouchée » par les bruits avec une probabilité Q ; la voie « bouchée » ne peut transmettre aucun message. Trouver la probabilité de l'événement :

A = {au moins un message est transmis sans perturbation}.

Solution. Introduisons la notation

B = {par une voie le message est transmis sans perturbation au moins une fois}.

Pour la réalisation de l'événement B, premièrement, la voie ne doit pas être « bouchée » par les bruits, et deuxièmement, au moins un message transmis par cette voie ne doit pas être perturbé

$$P(B) = (1-Q)(1-p^k).$$

La probabilité de l'événement A pour qu'au moins une voie soit le siège de l'événement B est

$$P(A) = 1 - [1 - P(B)]^n = 1 - [1 - (1 - Q)(1 - p^k)]^n.$$

2.43. Deux avions, un chasseur et un bombardier, ont engagé un combat aérien. Le tir est amorcé par le chasseur; il tire un coup sur le bombardier et l'abat avec une probabilité p_1. Si ce coup n'abat pas le bombardier, ce dernier tire sur le chasseur et l'abat avec une probabilité p_2. Si le chasseur n'est pas abattu par ce coup, il tire encore une fois sur le bombardier et l'abat avec une probabilité p_3. Trouver les probabilités des résultats suivants du combat:

A = {bombardier abattu};
B = {chasseur abattu};
C = {au moins un des avions abattu}.

Réponse. $P(A) = p_1 + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$; $P(B) = (1 - p_1)p_2$; $P(C) = P(A) + P(B)$.

2.44. Un combat aérien s'est engagé entre un bombardier et deux chasseurs qui l'attaquent. Le tir est amorcé par le bombardier qui parvient à tirer un coup sur chaque chasseur et l'abat avec une probabilité p_1. Si le chasseur considéré n'est pas abattu, indépendamment du sort de l'autre chasseur, il tire sur le bombardier et l'abat avec une probabilité p_2. Calculer les probabilités des issues suivantes du combat:

A = {bombardier abattu};
B = {deux chasseurs abattus};
C = {au moins un chasseur abattu},
D = {au moins un avion abattu};
E = {exactement un chasseur abattu};
F = {exactement un avion abattu}.

Solution. La probabilité pour qu'un chasseur abatte le bombardier est égale à $(1 - p_1)p_2$; la probabilité pour qu'aucun chasseur n'abatte le bombardier est égale à $[1 - (1 - p_1)p_2]^2$; d'où

$$P(A) = 1 - [1 - (1 - p_1)p_2]^2; \quad P(B) = p_1^2;$$
$$P(C) = 1 - (1 - p_1)^2; \quad P(D) = 1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2)^2;$$
$$P(E) = 2p_1(1 - p_1).$$

L'événement F se présente sous la forme $F = F_1 + F_2 + F_3$, où

F_1 = {le bombardier abattu, les deux chasseurs intacts};
F_2 = {le premier chasseur abattu, le deuxième chasseur et le bombardier intacts};
F_3 = {le deuxième chasseur abattu, le premier chasseur et le bombardier intacts}.

$$P(F_1) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2];$$
$$P(F_2) = P(F_3) = p_1(1 - p_1)(1 - p_2);$$
$$P(F) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2] + 2p_1(1 - p_1)(1 - p_2).$$

2.45. Le même énoncé et les mêmes questions que dans le problème précédent, à cette différence près que les chasseurs attaquent seulement deux à deux ; si l'un d'eux est abattu, l'autre rompt le combat.

Réponse. $P(A) = (1 - p_1)^2 [1 - (1 - p_2)^2]$; $P(B) = p_1^2$; $P(C) = 1 - (1 - p_1)^2$; $P(D) = 1 - (1 - p_1)^2 (1 - p_2)^2$; $P(E) = 2p_1 (1 - p_1)$; $P(F) = (1 - p_1)^2 [1 - (1 - p_2)^2] + 2p_1 (1 - p_1)$.

2.46. Une urne contient a boules blanches et b noires. Deux joueurs tirent à tour de rôle une boule de l'urne, chaque fois la remettant dans l'urne et en brassant les boules. Le gagnant est celui qui en tire le premier une boule blanche. Trouver la probabilité $\mathcal{P}_1$ pour que gagne le premier joueur (celui qui a tiré le premier une boule).

Solution. Le premier joueur peut gagner soit dès le premier tirage, soit au troisième tirage (à cet effet deux premiers tirages doivent donner des boules noires, et le troisième, une boule blanche), etc.

$$\mathcal{P}_1 = \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b} + \ldots + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} \frac{a}{a+b} + \ldots =$$

$$= \frac{a}{a+b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} = \frac{a}{a+b} \frac{1}{1-\left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{a+b}{a+2b}$$

(il est clair que $\mathcal{P}_1 \geqslant 1/2$ pour tous a et b).

2.47. Une urne contient deux boules blanches et trois noires. Deux joueurs à tour de rôle en tirent une boule sans la remettre dans l'urne. Le gagnant tire le premier une boule blanche. Trouver la probabilité $\mathcal{P}_1$ pour que gagne le premier joueur.

Réponse. $\mathcal{P}_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$.

2.48. Un appareil est mis à l'essai. A chaque essai l'appareil tombe en panne avec une probabilité p. Après la première panne l'appareil est réparé ; après la deuxième, il est reconnu défectueux. Trouver la probabilité pour que l'appareil soit mis hors service exactement au k-ième essai.

Solution. Pour la réalisation de l'événement considéré il faut, premièrement, que l'appareil tombe en panne au k-ième essai ; la probabilité de ce fait est p. D'autre part, il faut qu'au cours des $k - 1$ essais précédents l'appareil tombe en panne exactement une fois ; la probabilité de ceci est $(k-1)\, p\, (1-p)^{k-2}$. La probabilité cherchée est $(k - 1)\, p^2\, (1 - p)^{k-2}$.

2.49. On tire des fusées sur une cible. La probabilité pour que chaque fusée atteigne le but est égale à p ; les coups réussis des fusées isolées sont indépendants. Chaque fusée qui a porté juste détruit la cible avec une probabilité p_1. Le tir est mené jusqu'à la destruction de la cible ou jusqu'à l'épuisement des munitions ; les munitions

disponibles à la base comptent n fusées ($n > 2$). Trouver la probabilité pour que ce stock ne soit pas épuisé tout entier.

Solution. Passons à l'événement contraire $\overline{A}$ = {toutes les munitions sont épuisées}. Pour que l'événement $\overline{A}$ ait lieu, les premières $n - 1$ fusées ne doivent pas couvrir la cible

$$P(\overline{A}) = (1 - pp_1)^{n-1}; \quad P(A) = 1 - (1 - pp_1)^{n-1}.$$

2.50. Dans l'énoncé du problème précédent trouver la probabilité pour qu'après la destruction de la cible il reste au moins deux fusées non tirées.

Solution. L'événement contraire $\overline{A}$ = {il reste moins de deux fusées} est équivalent à ce que les premières $n - 2$ fusées n'ont pas couvert la cible:

$$P(\overline{A}) = (1 - pp_1)^{n-2}; \quad P(A) = 1 - (1 - pp_1)^{n-2}.$$

2.51. Dans l'énoncé du problème 2.49 trouver la probabilité pour que deux fusées seulement suffisent à la tâche.

Solution. Pour employer pas plus de deux fusées il suffit que les deux premiers coups atteignent la cible; la probabilité de cet événement est égale à $1 - (1 - pp_1)^2$.

2.52. Un poste radar assure la surveillance de k objets. Au cours de la surveillance l'i-ième objet peut être perdu avec une probabilité p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {aucun objet n'est perdu};
B = {pas moins d'un objet est perdu};
C = {pas plus d'un objet est perdu}.

Réponse.

$$P(A) = \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i); \quad P(B) = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i); \quad P(C) =$$
$$= \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i) + p_1 (1 - p_2) \ldots (1 - p_k) +$$
$$+ (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) \ldots (1 - p_k) +$$
$$+ \ldots + (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_{k-1}) p_k.$$

La dernière probabilité peut s'écrire sous la forme:

$$P(C) = \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i) + \prod_{j=1}^{k} \frac{p_j}{1 - p_j} \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i).$$

2.53. Le fonctionnement d'une installation constituée de k ensembles a duré un certain temps t. Pendant ce temps, le premier ensemble a donné lieu à une défaillance avec une probabilité q_1, le deuxième,

avec une probabilité q_2, etc. Le régleur venu pour reviser l'installation découvre et élimine, si elle existe, la défaillance de chaque ensemble avec une probabilité p et déclare que l'ensemble est en bon état avec une probabilité $q = 1 - p$. Trouver la probabilité de l'événement A = {après la visite du régleur au moins un ensemble est défectueux}.

Solution. La probabilité pour l'i-ième ensemble de rester défectueux après la visite est égale à la probabilité pour qu'il le devienne en un temps t, multipliée par la probabilité pour que le régleur ne découvre pas cette défaillance: $q_i q$. La probabilité pour que cet événement survienne au moins pour un des ensembles vaut

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - q_i q).$$

2.54. A l'énoncé du problème précédent on ajoute une nouvelle condition: au bout d'un temps t le régleur, avec une probabilité Q, ne se trouve pas à sa place, et l'installation est mise en marche sans visite préventive. Trouver la probabilité de l'événement A = {après la mise en marche au moins un ensemble de l'installation est défectueux}.

Réponse. $(1-Q)\left[1 - \prod_{i=1}^{k} (1-q_i q)\right] + Q\left[1 - \prod_{i=1}^{k} (1-q_i)\right]$.

2.55. On transmet un message composé de n symboles binaires « 0 » ou « 1 ». Chaque symbole est perturbé avec une faible probabilité p: se transforme en symbole opposé. Par précaution, le message est transmis deux fois; si les deux messages coïncident, l'information est considérée comme correcte. Trouver la probabilité pour que malgré la coïncidence des messages ils s'avèrent tous les deux erronés.

Solution. A = {les deux messages coïncident mais sont perturbés} = {les erreurs sont commises aux mêmes positions}. Introduisons l'événement B = {les deux messages sont identiques}. $B = A + C$, où C = {les deux messages sont identiques et corrects}.

$$P(A) = P(B) - P(C).$$

L'événement $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$, où B_i = {à l'i-ième position de l'un et de l'autre messages les signes sont soit corrects tous les deux, soit tous les deux faussés}.

$$P(B_i) = p^2 + (1 - p^2); \quad P(B) = [p^2 + (1 - p)^2]^n;$$

$$P(C) = [(1 - p)^2]^n = (1 - p)^{2n}; \quad P(A) = [p^2 + (1 - p)^2]^n - (1 - p)^{2n}.$$

2.56. Un train de chemin de fer se compose de n wagons dont chacun présente un défaut avec une probabilité p. Tous les wagons

sont revus indépendamment l'un de l'autre par deux inspecteurs; le premier d'entre eux découvre une défaillance (si elle existe) avec une probabilité p_1, le deuxième, avec une probabilité p_2. Si aucun wagon ne présente de défaut, le train est mis sur la ligne. Trouver la probabilité de l'événement:

A = {le train est mis sur la ligne avec au moins un wagon défectueux}.

Solution. Considérons un wagon pris isolément et l'événement B = {le wagon présente un défaut non découvert}. $\mathrm{P}(B) = p(1 - p_1)(1 - p_2)$. On en tire

$$\mathrm{P}(A) = 1 - [1 - \mathrm{P}(B)]^n = 1 - [1 - p(1 - p_1)(1 - p_2)]^n.$$

2.57. Un ordinateur supposé de présenter un défaut est testé pour le localiser. A cet effet on procède successivement à n tests $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Une fois le défaut découvert on met fin au testage. La probabilité de la localisation du défaut au premier test est égale à p_1; la probabilité conditionnelle de la localisation du défaut au deuxième test, s'il n'a pas été localisé au premier, est égale à p_2; la probabilité conditionnelle de la localisation du défaut au i-ième test, si les premiers $i - 1$ tests ne l'ont pas localisé, est égale à p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {réalisation pas moins de trois tests};
B = {réalisation pas plus de trois tests};
C = {défaut localisé exactement au quatrième test};
D = {défaut non localisé en n tests};
E = {tous les n tests réalisés}.

Solution. L'événement $\overline{A}$ = {moins de trois tests réalisés} $= F_1 + F_2$, où

F_1 = {un test seulement est réalisé, le défaut est localisé};
F_2 = {le premier test n'a pas abouti, le deuxième a localisé le défaut}.

$$\mathrm{P}(F_1) = p_1; \quad \mathrm{P}(F_2) = (1 - p_1)\,p_2; \quad \mathrm{P}(\overline{A}) = p_1 + (1 - p_1)\,p_2;$$
$$\mathrm{P}(A) = 1 - [p_1 + (1 - p_1)\,p_2].$$

L'événement B = {réalisation d'un, de deux ou de trois tests} $= F_1 + F_2 + F_3$, où F_3 = {le défaut est localisé au troisième test}.

$$\mathrm{P}(F_3) = (1 - p_1)(1 - p_2)\,p_3;$$
$$\mathrm{P}(B) = p_1 + (1 - p_1)\,p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)\,p_3;$$
$$\mathrm{P}(C) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)\,p_4;$$
$$\mathrm{P}(D) = (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i);$$
$$\mathrm{P}(E) = \prod_{i=1}^{n-1}(1 - p_i).$$

2.58. Une gare de chemin de fer offre au passager un coffre-fort (consigne individuelle des bagages) qui s'ouvre seulement si on compose un code de trois chiffres définis (par exemple, 253, 009, 325, etc.). Un passager l'a composé, a fermé le coffre-fort et a descendu dans la ville. Un étranger qui ne connaît pas le code s'efforce d'ouvrir le coffre-fort en composant les trois chiffres au hasard. Trouver la probabilité des événements:

A = {le coffre-fort s'ouvre dès la première tentative};

B = {le coffre-fort s'ouvre après k tentatives}.

Solution. $P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$. Si on fait k tentatives, on suppose naturellement que les combinaisons manquées ne se répètent pas. Passons de B à l'événement contraire $\bar{B}$ = {toutes les k tentatives sont infructueuses}. Alors

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{999}{1000} \cdot \frac{998}{999} \cdots \frac{1000-k+1}{1000-k+2} \cdot \frac{1000-k}{1000-k+1} =$$
$$= 1 - \frac{1000-k}{1000} = \frac{k}{1000}. \qquad (2.58)$$

Bien entendu, la formule (2.58) n'a un sens que pour $k < 1000$; pour $k \geqslant 1000$ la probabilité d'une composition correcte $P(B) = 1$.

2.59. Dans la ville de Tbilissi on parle trois langues: le géorgien, l'arménien et le russe. On prend un groupe d'habitants composé de m personnes. m_1 d'entre elles parlent seulement le géorgien; m_2, seulement l'arménien; m_3, seulement le russe; m_{12}, le géorgien et l'arménien; m_{13}, le géorgien et le russe; m_{23}, l'arménien et le russe; m_{123}, toutes les trois langues; $m_1 + m_2 + m_3 + m_{12} + m_{13} + m_{23} + m_{123} = m$. Dans ce groupe on choisit au hasard deux personnes. Quelle est la probabilité pour qu'elles puissent s'expliquer en l'une des trois langues sans interprète?

Solution. Numérotons tous les sept groupes d'habitants et écrivons contre chaque groupe les lettres « g », « a » et « r », initiales des langues que parlent leurs membres.

I: g (m_1 personnes); II: a (m_2 personnes); III: r (m_3 personnes); IV: g, a (m_{12} personnes); V: g, r (m_{13} personnes); VI: a, r (m_{23} personnes); VII: g, a, r (m_{123} personnes).

Pour que deux personnes puissent s'expliquer ils doivent faire partie d'un couple de groupes possédant une langue commune. Dans notre cas il est plus simple de trouver la probabilité pour que deux personnes ne puissent pas s'expliquer. A cet effet elles doivent appartenir à l'un des couples de groupes: (I, II); (I, III); (I, VI); (II, III); (II, V); (III, IV). Les probabilités pour que l'une des deux personnes choisies se rapporte à un groupe, et la deuxième, à l'autre groupe, sont égales à:

$$P(\mathrm{I, II}) = \frac{2m_1m_2}{m(m-1)}; \quad P(\mathrm{I, III}) = \frac{2m_1m_3}{m(m-1)}; \quad P(\mathrm{I, VI}) = \frac{2m_1m_{23}}{m(m-1)};$$
$$P(\mathrm{II, III}) = \frac{2m_2m_3}{m(m-1)}; \quad P(\mathrm{II, V}) = \frac{2m_2m_{13}}{m(m-1)}; \quad P(\mathrm{III, IV}) = \frac{2m_3m_{12}}{m(m-1)}.$$

En additionnant ces probabilités et en retranchant la somme obtenue de l'unité, on obtient la probabilité p cherchée :

$$p = 1 - \frac{2}{m(m-1)}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_1m_{23} + m_2m_3 + m_2m_{13} + m_3m_{12}).$$

2.60. Une usine produit des articles de type défini ; chaque article peut avoir un défaut avec une probabilité p. Après la fabrication l'article est examiné successivement par k contrôleurs ; si un défaut existe, l'i-ième contrôleur le découvre avec une probabilité p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). Dans ce cas l'article est rebuté. Déterminer les probabilités des événements :

A = {article rebuté} ;

B = {article rebuté par le deuxième contrôleur, non par le premier} ;

C = {article rebuté par tous les contrôleurs}.

Réponse.

$$\mathrm{P}(A) = p\left[1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i)\right]; \quad \mathrm{P}(B) = p(1 - p_1)p_2;$$

$$\mathrm{P}(C) = p\sum_{i=1}^{k} p_i.$$

2.61. Une usine fabrique des articles de type défini ; chaque article possède un défaut avec une probabilité p. L'article est revisé par un contrôleur ; il découvre le défaut avec une probabilité p_1 et, si le défaut n'est pas établi, définit l'article comme production finie de fabrication. Il se peut aussi que le contrôleur rebute un article exempt de défaut ; la probabilité de ce fait est α. Trouver les probabilités des événements suivants :

A = {article rebuté} ;

B = {article rebuté par erreur} ;

C = {article passe dans la production finie de fabrication avec défaut}.

Réponse. $\mathrm{P}(A) = pp_1 + (1 - p)\alpha$; $\mathrm{P}(B) = (1 - p)\alpha$; $\mathrm{P}(C) = p(1 - p_1)$.

2.62. L'article de l'énoncé précédent est revu non pas par un, mais par deux contrôleurs. Les probabilités pour que l'article soit rebuté par le premier et le deuxième contrôleurs sont respectivement p_1 et p_2 ; les probabilités de rebuter par erreur un article exempt de défaut sont respectivement α_1, α_2. L'article est rebuté si au moins un contrôleur y découvre un défaut. Trouver les probabilités de mêmes événements.

Réponse. $\mathrm{P}(A) = p[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] + (1 - p)[1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)]$; $\mathrm{P}(B) = (1 - p)[1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)]$; $\mathrm{P}(C) = p(1 - p_1)(1 - p_2)$.

2.63. Un appareil se compose de n groupes (fig. 2.63) ; la panne de chaque groupe met hors service l'appareil tout entier. Les groupes tombent en panne indépendamment l'un de l'autre. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans aléas) de chaque groupe est p.

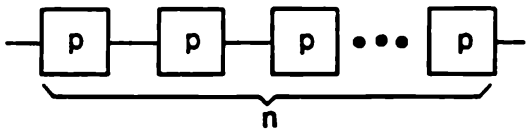


Fig. 2.63

Trouver la fiabilité P de l'appareil dans son ensemble. Quelle doit être la fiabilité p_1 de chaque groupe pour assurer la fiabilité donnée P_1 de l'appareil ?

Note. Ici et dans ce qui suit sur les schémas les éléments qui rendent impossible le fonctionnement du système sans eux sont représentés comme des maillons liés « en série » ; les éléments qui doublent les uns les autres sont représentés par des liaisons « parallèles ». La fiabilité de chaque élément s'inscrit dans le rectangle correspondant.

Réponse. $P = p^n$; $p_1 = \sqrt[n]{P_1}$.

2.64. Pour améliorer la fiabilité d'un appareil il est doublé par un autre appareil identique (fig. 2.64) ; la fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) de chaque appareil est p. Lorsque le premier tombe en panne, un dispositif de commutation enclenche instantanément le deuxième appareil (la fiabilité du dispositif de commutation est égale à l'unité). Déterminer la fiabilité P du système de deux appareils qui doublent l'un l'autre.

Solution. Pour qu'une défaillance du système tout entier ait lieu il faut que les deux appareils tombent en panne simultanément ; la fiabilité du système $P = 1 - (1 - p)^2$.

2.65. Même problème, mais la fiabilité du dispositif de commutation C est égale à p_1 (fig. 2.65).

Réponse. Fiabilité du système : $P = 1 - (1 - p)(1 - p_1 p)$.

2.66. Pour améliorer la fiabilité d'un appareil il est doublé par $(n - 1)$ appareils identiques (fig. 2.66) ; la fiabilité de chaque appareil est p. Trouver la fiabilité P du système. Combien faut-il d'appareils pour porter la fiabilité à la valeur P_1 donnée ?

Réponse. $P = 1 - (1 - p)^n$; $n \geqslant \log(1 - P_1)/\log(1 - p)$.

2.67. Même énoncé, mais pour mettre en circuit chaque appareil doubleur on emploie un dispositif de commutation C dont la fiabilité est p_1 (fig. 2.67).

Réponse.

$$P = 1 - (1 - p)(1 - p_1 p)^{n-1}; \quad n \geqslant \frac{\log(1 - P_1) - \log(1 - p)}{\log(1 - p_1 p)} + 1.$$

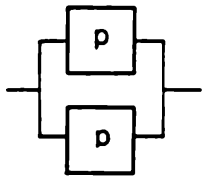


Fig. 2.64

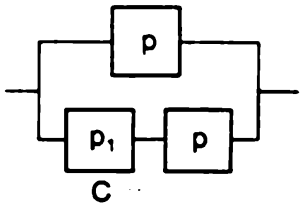


Fig. 2.65

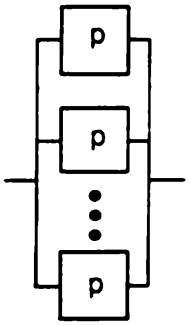


Fig. 2.66

2.68*. Un système technique se compose de n groupes, la fiabilité de chacun de ces derniers étant p. La panne ne serait-ce que d'un groupe entraîne la mise hors service du système tout entier.

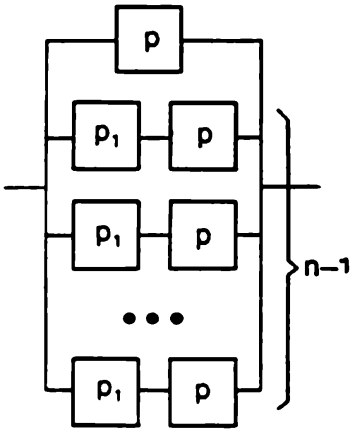


Fig. 2.67

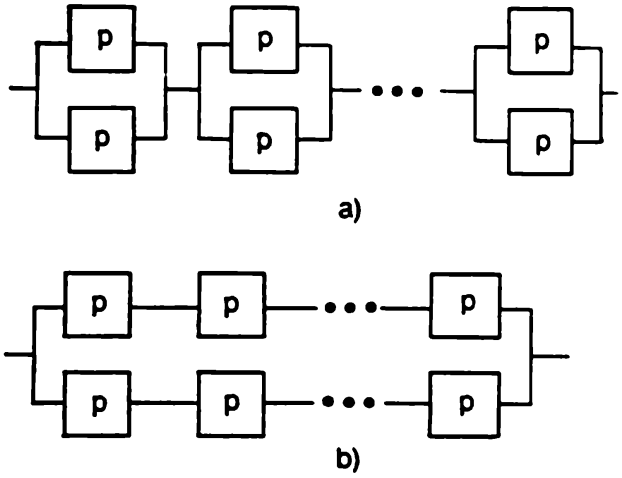


Fig. 2.68

Pour améliorer la fiabilité de celui-ci on procède au doublage en affectant à cet effet encore n groupes identiques. La fiabilité des dispositifs de commutation est totale. Déterminer quel mode est plus efficace et assure une meilleure fiabilité; a) doublage de chaque groupe (fig. 2.68, *a*); b) doublage de tout le système (fig. 2.68, *b*).

Solution. La fiabilité du système doublé d'après le mode a) est $p_a = [1 - (1 - p)^2]^n$; d'après le mode b): $p_b = 1 - (1 - p^n)^2$. Montrons que $p_a > p_b$ quel que soit $n > 1$ et $0 < p < 1$. Etant donné

$$p_a = [1 - (1 - p)^2]^n = [1 - 1 + 2p - p^2]^n = p^n (2 - p)^n;$$
$$p_b = 1 - (1 - p^n)^2 = 1 - 1 + 2p^n - p^{2n} = p^n (2 - p^n).$$

il suffit de démontrer l'inégalité: $(2-p)^n > 2-p^n$. Posons $q = 1-p$ $(q>0)$; l'inégalité devient $(2-1+q)^n > 2-(1-q)^n$ ou bien $(1+q)^n + (1-q)^n > 2$.

En appliquant la formule du binôme, remarquons que tous les termes négatifs s'annulent:

$$(1+q)^n+(1-q)^n=1+nq+\frac{n(n-1)}{2}q^2+\ldots+1-nq+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}q^2-\ldots=2+n(n-1)q^2+\ldots>2,$$

ce qui prouve l'inégalité considérée.

2.69. Dans un système technique sont doublés non pas tous, mais seulement certains ensembles les moins fiables. La fiabilité des en-

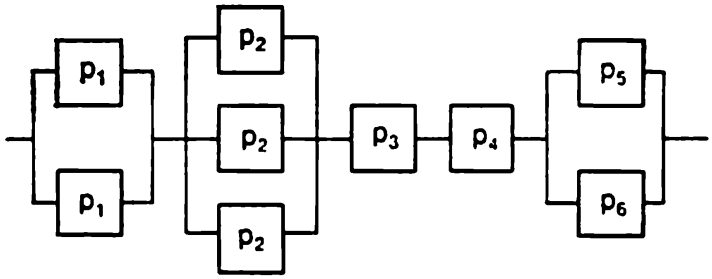


Fig. 2.69

sembles est notée sur la figure 2.69. Déterminer la fiabilité P du système.

Réponse. $P = [1-(1-p_1)^2]\,[1-(1-p_2)^3]\,p_3p_4\,[1-(1-p_5)^2]$.

2.70. Un appareil se compose de trois ensembles. Le premier compte n_1 éléments, le deuxième, n_2, et le troisième, n_3. Pour le fonctionnement de l'appareil l'ensemble I est indispensable, alors que les ensembles II et III doublent l'un l'autre (fig. 2.70). La fiabilité de chaque élément est la même et égale à p. La panne d'un élément entraîne celle de l'ensemble tout entier. Les éléments tombent en panne indépendamment l'un de l'autre. Trouver la fiabilité P de l'appareil.

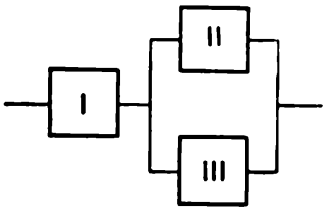


Fig. 2.70

Solution. La fiabilité de l'ensemble I: $p_{\mathrm{I}} = p^{n_1}$; la fiabilité de l'ensemble II: $p_{\mathrm{II}} = p^{n_2}$; la fiabilité de l'ensemble III: $p_{\mathrm{III}} = p^{n_3}$; la fiabilité de l'ensemble doublé (II et III): $1-(1-p^{n_2})\times(1-p^{n_3})$; la fiabilité de l'appareil

$$P = p^{n_1}\,[1-(1-p^{n_2})(1-p^{n_3})].$$

2.71. Un appareil électrique peut tomber en panne (brûler) seulement à l'instant de branchement. Si jusqu'à présent l'appareil était couplé $k - 1$ fois et n'a pas brûlé, la probabilité conditionnelle qu'il brûle au k-ième branchement est égale à Q_k. Trouver les probabilités des événements:

A = {l'appareil tient pas moins qu'à n branchements};

B = {l'appareil tient pas plus qu'à n branchements};

C = {l'appareil brûle exactement au n-ième branchement}.

Solution. La probabilité de l'événement A est égale à la probabilité pour qu'aux premiers n branchements l'appareil ne brûle pas:

$$P(A) = \prod_{k=1}^{n} (1 - Q_k).$$

Pour trouver la probabilité de l'événement B passons à l'événement contraire: $\overline{B}$ = {l'appareil tient à plus de n branchements}. A cet effet il suffit que l'appareil ne brûle pas aux premiers $(n + 1)$ branchements:

$$P(\overline{B}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 - Q_k); \quad P(B) = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} (1 - Q_k).$$

Pour que l'appareil brûle exactement au n-ième branchement, il faut qu'il ne brûle pas aux premiers $n - 1$ branchements en brûlant au n-ième branchement:

$$P(C) = Q_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - Q_k).$$

2.72. Un appareil se compose de quatre ensembles: deux d'entre eux (I et II) sont absolument nécessaires pour son fonctionnement correct, et deux (III et IV) doublent l'un l'autre (fig. 2.72). Les ensembles ne peuvent tomber en panne qu'à l'instant de branchement. Au k-ième branchement l'ensemble I jusque-là en bon état tombe en panne, indépendamment des autres, avec une probabilité $q_1(k)$, l'ensemble II, avec une probabilité $q_2(k)$, les ensembles III et IV, avec la même probabilité $q_{III}(k) = q_{IV}(k) = q(k)$. Trouver les probabilités de mêmes événements A, B, C que dans l'énoncé 2.71.

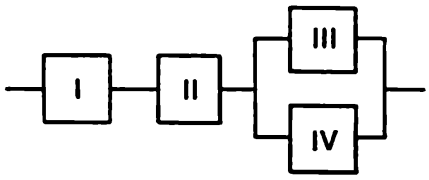


Fig. 2.72

Solution. Le problème se ramène à l'énoncé précédent, si on trouve la probabilité conditionnelle Q_k pour qu'au k-ième branchement l'appareil en bon état tombe en panne: $Q_k = 1 - [1 - q_1(k)][1 - q_{II}(k)][1 - (1 - q(k))^2]$ et la porte dans la solution déjà trouvée.

2.73. Un appareil se compose de trois ensembles. Lorsque l'appareil est couplé, une défaillance apparaît avec une probabilité p_1 dans le premier ensemble, avec une probabilité p_2 dans le deuxième et avec une probabilité p_3 dans le troisième. Les défaillances des ensembles apparaissent indépendamment l'une de l'autre. Chacun des trois ensembles est indispensable pour le fonctionnement de l'appareil. Pour qu'un ensemble tombe en panne il faut qu'il soit le siège de pas moins de deux défaillances. Trouver la probabilité de l'événement

A = {l'appareil a subi n branchements sans défaillance}.

Solution. Pour réaliser A il faut que fonctionnent tous les trois ensembles. La probabilité pour que le premier d'entre eux tienne à n couplages est égale à la probabilité pour que pour n couplages il soit le siège de pas plus d'une défaillance (0 ou 1): $(1-p_1)^n + np_1(1-p_1)^{n-1}$. La probabilité pour que les trois ensembles tiennent à n couplages est

$$P(A) = \prod_{i=1}^{3} [(1-p_i)^n + np_i(1-p_i)^{n-1}].$$

2.74. Un appareil se compose de trois ensembles; l'un d'eux est absolument nécessaire pour son fonctionnement; les deux autres doublent l'un l'autre. Le fonctionnement de l'appareil fait apparaître des défaillances; chacune des défaillances apparaît avec la même probabilité dans l'un quelconque des éléments qui constituent les ensembles. Le premier ensemble se compose de n_1 éléments, le deuxième, de n_2 éléments, le troisième, de n_3 éléments ($n_1 + n_2 + n_3 = n$). La défaillance ne serait-ce que d'un élément met l'ensemble hors service.

On sait que l'appareil présente quatre défaillances (dans quatre éléments différents). Trouver la probabilité pour que leur présence rende impossible le fonctionnement de l'appareil.

Solution. L'événement A = {fonctionnement impossible de l'appareil} se décompose en deux événements: $A = A_1 + A_2$, où

A_1 = {le premier ensemble est tombé en panne};

A_2 = {le premier ensemble n'est pas tombé en panne, mais le deuxième et le troisième y sont tombés}.

Pour que l'événement A_1 ait lieu il faut que ne serait-ce qu'une des quatre défaillances affecte le premier ensemble

$$P(A_1) = 1 - P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{n-n_1}{n}\,\frac{n-n_1-1}{n-1}\,\frac{n-n_1-2}{n-2}\,\frac{n-n_1-3}{n-3}.$$

Pour calculer la probabilité de l'événement A_2, la probabilité de l'événement $\bar{A}_1$ = {le premier ensemble n'est pas tombé en panne} doit être multipliée par la probabilité pour que le deuxième et le troisième ensembles tombent en panne (compte tenu du fait que

toutes les quatre défaillances concernent le deuxième et le troisième ensembles). Ce dernier événement peut se réaliser sous trois variantes : soit une défaillance affecte le deuxième, et les trois autres, le troisième ensemble ; soit, au contraire, trois défaillances affectent le deuxième, et une, le troisième ensemble, soit encore le deuxième et le troisième ensembles subissent chacun deux défaillances. La probabilité de la première variante

$$C_4^1 \frac{n_2}{n_2+n_3} \frac{n_3}{n_2+n_3-1} \frac{n_3-1}{n_2+n_3-2} \frac{n_3-2}{n_2+n_3-3} = \mathcal{P}_1.$$

La probabilité de la deuxième variante

$$C_4^1 \frac{n_3}{n_2+n_3} \frac{n_2}{n_2+n_3-1} \frac{n_2-1}{n_2+n_3-2} \frac{n_2-2}{n_2+n_3-3} = \mathcal{P}_2.$$

La probabilité de la troisième variante

$$C_4^2 \frac{n_2}{n_2+n_3} \frac{n_2-1}{n_2+n_3-1} \frac{n_3}{n_2+n_3-2} \frac{n_3-1}{n_2+n_3-3} = \mathcal{P}_3.$$

On en tire

$$P(A_2) = [1 - P(A_1)]\,[\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3]; \quad P(A) = P(A_1) = P(A_2).$$

2.75. Un appareil unique en son genre qui doit assurer une fiabilité très élevée est assemblé à partir de k pièces $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Avant l'assemblage chaque pièce est vérifiée sous tous les aspects et, si elle s'avère de haute qualité, elle est posée sur l'appareil ; dans le cas contraire, elle est remplacée par une pièce de rechange vérifiée elle aussi. Le monteur a à sa disposition un stock de pièces de chaque type : m_i exemplaires de la pièce D_i ($i = 1, \ldots, k$), en tout $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ pièces. Si les pièces de rechange manquent, le montage est retardé. La probabilité pour qu'un exemplaire isolé de la pièce D_i soit de haute qualité est égale à p_i et ne dépend pas de la qualité des autres exemplaires. Trouver la probabilité des événements suivants :

A = {le stock des pièces disponibles suffit pour le montage de l'appareil} ;

B = {toutes les pièces disponibles sont utilisées (mises à l'essai et posées sur l'appareil ou seulement mises à l'essai)} ;

C = {le monteur réussit avec le stock des pièces donné de monter l'appareil, au moins une pièce de type quelconque restant dans le stock}.

Solution. L'événement $A=\coprod_{i=1}^{k} A_i$, où $A_i=\{$au moins un exemplaire de la pièce D_i s'avère de haute qualité$\}$

$$P(A_i)=1-(1-p_i)^{m_i}; \quad P(A)=\prod_{i=1}^{k}[1-(1-p_i)^{m_i}].$$

L'événement $B=\coprod_{i=1}^{k} B_i$, où $B_i=\{$tous les exemplaires de la pièce D_i sont utilisées$\}$. Pour que l'événement B_i ait lieu il faut que les premiers m_i-1 exemplaires de la pièce D_i ne soient pas de haute qualité :

$$P(B_i)=(1-p_i)^{m_i-1}; \quad P(B)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)^{m_i-1}.$$

Pour trouver P (C) mettons l'événement A sous la forme des événements incompatibles :

$$A = C + F, \tag{2.75}$$

où $F=\{$le monteur réussit le montage de l'appareil, mais il ne reste aucune pièce dans le stock$\}$; $F=\coprod_{i=1}^{k} F_i$, où $F_i=\{$les premiers m_i-1 exemplaires de la pièce D_i se sont avérés n'être pas de haute qualité, et la m_i-ième pièce, de haute qualité$\}$.

$$P(F_i)=(1-p_i)^{m_i-1}p_i; \quad P(F)=\prod_{i=1}^{k}[(1-p_i)^{m_i-1}p_i].$$

La formule (2.75) amène

$$P(C)=P(A)-P(F)=\prod_{i=1}^{k}[1-(1-p_i)^{m_i}]-\prod_{i=1}^{k}[(1-p_i)^{m_i-1}p_i].$$

2.76. Une installation S se compose de n ensembles dont le service pendant un temps τ peut conduire à l'un des états :

$s_1=\{$complètement en bon état$\}$;
$s_2=\{$impose un réglage$\}$;
$s_3=\{$impose des réparations$\}$;
$s_4=\{$complètement inutilisable$\}$.

$$P(s_1)=p_1, \quad P(s_2)=p_2, \quad P(s_3)=p_3, \quad P(s_4)=p_4;$$
$$p_1+p_2+p_3+p_4=1.$$

Les états des ensembles isolés sont indépendants. Trouver la probabilité des événements suivants :

$A=\{$tous les ensembles complètement en bon état$\}$;
$B=\{$tous les ensembles imposent un réglage$\}$;

C = {un ensemble impose une réparation, les autres, un réglage};
D = {au moins un ensemble est complètement inutilisable};
E = {deux ensembles imposent un réglage, un, une réparation, les autres sont en bon état}.

Solution. $P(A) = p_1^n$; $P(B) = p_2^n$. Un ensemble nécessitant une réparation peut être choisi par $C_n^1 = n$ moyens

$$P(C) = np_3p_1^{n-1}; \quad P(D) = 1-(1-p_4)^n.$$

Deux ensembles imposant le réglage peuvent être choisis des n ensembles par $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ moyens; un ensemble imposant une réparation, par $C_{n-2}^1 = n-2$ moyens:

$$P(E) = \frac{n(n-1)}{2}(n-2)\,p_2^2p_1^{n-3}.$$

2.77. Les $n = 6$ messages transmis par une voie de communication s'avèrent perturbés chacun indépendamment des autres avec une probabilité $p = 0{,}2$. Trouver la probabilité des événements suivants:

C = {exactement deux messages des six sont perturbés};
D = {pas moins de deux messages des six sont perturbés}.

Solution. D'après le théorème des épreuves répétées [voir formule (2.0.19)], $P(C) = P_{2,6} = C_6^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 \approx 0{,}197$. D'après la formule (2.0.23)

$$P(D) = 1 - (P_{0,6} + P_{1,6}) = 1 - (0{,}8^6 + 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^5) = \\ = 1 - (0{,}262 + 0{,}393) = 0{,}345.$$

2.78. Par une voie de communication on transmet n messages. Chacun des messages est perturbé par les bruits indépendamment des autres avec une probabilité p. Trouver les probabilités des événements suivants:

A = {des n messages exactement m sont perturbés par des bruits};
B = {pas moins de m des n messages sont transmis sans perturbation};
C = {pas plus de la moitié de tous les messages transmis sont perturbés};
D = {tous les messages sont reçus sans perturbation};
E = {pas moins de deux messages sont perturbés}.

Solution. D'après le théorème des épreuves répétées [voir formule (2.0.19)]

$$P(A) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

D'après la formule (2.0.22), en remplaçant p par $1-p$, on obtient

$$P(B) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k (1-p)^k p^{n-k}; \quad P(C) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_r^k p^k (1-p)^{n-k},$$

où $[n/2]$ est la partie entière du nombre $n/2$.

$$P(D) = (1-p)^n;$$

la même valeur peut s'obtenir à l'aide de la formule (2.0.19):

$$P(D) = P_{0,n} = C_n^0 p^0 (1-p)^n = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^n.$$

D'après la formule (2.0.23), on trouve

$$P(E) = R_{2,n} = 1 - \sum_{k=0}^{1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= 1 - [(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}] = 1 - (1-p)^{n-1}[1 + (n-1)p].$$

2.79. Un dispositif S se compose de 5 ensembles; pendant le fonctionnement chaque ensemble tombe en panne avec une probabilité $p = 0{,}4$. Les ensembles subissent des défaillances indépendamment l'un de l'autre. Si plus de deux ensembles tombent en panne, le dispositif ne peut plus fonctionner; si les défaillances affectent 1 ou 2 ensembles, il fonctionne, mais son efficacité baisse. Trouver la probabilité des événements:

A = {aucun ensemble n'est tombé en panne};
B = {le dispositif peut fonctionner};
F = {l'efficacité du dispositif en service est réduite}.

Solution. $P(A) = 0{,}6^5 \approx 0{,}0778$;

$$P(B) = P(A) + P(C) + P(D),$$

où C = {exactement un ensemble est en panne}; D = {exactement deux ensembles sont en panne}.

$$P(C) = P_{1,5} = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}259; \quad P(D) = P_{2,5} =$$
$$= C_5^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}346; \quad P(B) = P(A) + P(C) + P(D) \approx$$
$$\approx 0{,}683; \quad P(F) = P(C) + P(D) \approx 0{,}605.$$

2.80*. Les k tireurs participent aux compétitions; chacun d'eux tire n coups à la cible. La probabilité d'atteindre celle-ci est égale à p_i pour le i-ième tireur ($i = 1, \ldots, k$). Le gagnant est celui qui compte plus de coups au but que chacun des autres. Trouver la probabilité pour que parmi les tireurs en compétition il y ait seulement un gagnant.

Solution. Un tel gagnant peut être n'importe lequel des k tireurs. Cherchons la probabilité pour que l'i-ième tireur gagne la compétition (événement A_i). Cet événement peut se produire des façons suivantes: $A_i^{(m)}$ = {i-ième tireur compte exactement m coups au but, alors que les autres pas plus de $m - 1$} ($m = 1, \ldots, n$).

La probabilité $P_m(i)$ pour que l'i-ième tireur réalise m coups au but est égale à $C_n^m p_i^m q_i^{n-m}$, où $q_i = 1 - p_i$. Désignons la probabilité

pour que le j-ième tireur ait pas plus de $m-1$ coups au but par $R_m(j)$:

$$R_m(j)=\sum_{s=0}^{m-1} C_n^s p_j^s q_j^{n-s} \quad (m\geqslant 1).$$

Alors, la probabilité pour que les autres tireurs, sauf l'i-ième, n'aient pas plus de $m-1$ coups au but, est égale à

$$R_{m-1}(1)\,R_{m-1}(2)\,\ldots\,R_{m-1}(i-1)\,R_{m-1}(i+1)\,\ldots\,R_{m-1}(k)=$$
$$=\prod_{j\neq i} R_{m-1}(j).$$

En sommant les probabilités obtenues pour toutes les valeurs de m, on obtient la probabilité pour que le seul i-ième tireur gagne la compétition

$$\mathrm{P}(A_i)=\sum_{m=1}^{n} P_m(i)\prod_{j\neq i} R_{m-1}(j) \quad (i=1,\ \ldots,\ k).$$

La sommation de ces probabilités pour tous les tireurs amène

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{P}(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} P_m(i)\prod_{j\neq i} R_{m-1}(j).$$

2.81. En s'installant dans un nouvel appartement on a couplé au réseau d'éclairage $2k$ nouvelles ampoules. Pendant l'année chaque ampoule est grillée avec une probabilité r. Trouver la probabilité de l'événement $A=\{$au cours de l'année au moins la moitié des ampoules initialement couplées devra être remplacée par de nouvelles$\}$.

Réponse. $\mathrm{P}(A)=1-\sum_{m=0}^{k-1} C_{2k}^m r^m(1-r)^{2k-m}$.

2.82. Une usine fabrique des articles dont chacun s'avère défectueux indépendamment des autres avec une probabilité r. A la révision, le défaut, s'il existe, est découvert avec une probabilité p. Pour le contrôle on tire de la production de l'usine n articles. Trouver la probabilité des événements suivants:

$A=\{$aucun article ne présente de défauts$\}$;

$B=\{$parmi n articles exactement deux présentent un défaut$\}$;

$C=\{$parmi n articles pas moins de deux présentent un défaut$\}$.

Solution. La probabilité pour qu'un article tiré au hasard présente un défaut qui est découvert, est égale à pr.

$$\mathrm{P}(A)=(1-pr)^n\ ;\quad \mathrm{P}(B)=C_n^2(pr)^2(1-pr)^{n-2}\ ;\quad \mathrm{P}(C)=1-$$
$$-(1-pr)^{n-1}[(1-pr)+npr].$$

2.83. Sous les conditions du problème 2.82 tout le lot contrôlé est rebuté, si parmi n articles on découvre au moins quatre défectueux. Trouver la probabilité p pour que tout le lot contrôlé soit rebuté.

Réponse. $p = \sum_{i=4}^{n} C_n^i (pr)^i (1-pr)^{n-i}$.

2.84. Le premier appareil se compose de n_1 ensembles, le deuxième, de n_2 ensembles. Chaque appareil travaille pendant un temps t. Pendant ce temps chaque ensemble du premier appareil tombe en panne indépendamment des autres avec une probabilité q_1, chaque ensemble du deuxième, avec une probabilité q_2. Trouver la probabilité pour que pendant un temps t dans le premier appareil tombent en panne m_1 ensembles, et dans le deuxième, m_2 ensembles.

Réponse. $p = C_{n_1}^{m_1} q_{q_1}^{m_1} (1-q_1)^{n_1-m_1} C_{n_2}^{m_2} q_2^{m_2} (1-q_2)^{n_2-m_2}$.

2.85. Une pièce de monnaie est jetée m fois. Trouver la probabilité pour que pile apparaisse pas moins de k fois et pas plus de l fois ($k \leqslant l \leqslant m$).

Solution. $p = \sum_{i=k}^{l} P_{l.m} = \sum_{i=k}^{l} C_m^i (1/2)^m = (1/2)^m \sum_{i=k}^{l} C_m^i$.

2.86. Un appareil composé de k ensembles a fonctionné pendant un temps t. La fiabilité (probabilité de fonctionner sans défaillance) de chaque ensemble pendant ce temps est p. Après le temps t l'appareil est arrêté, revisé par le technicien qui remplace les ensembles défectueux. Pour remplacer un ensemble il met un temps τ. Trouver la probabilité P pour que dans un temps 2τ après l'arrêt l'appareil soit prêt pour le service normal.

Solution. A cet effet il faut que pendant le temps t pas plus de deux ensembles tombent en panne

$$P = p^k + k(1-p)p^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}(1-p)^2 p^{k-2}.$$

2.87. En jouant avec un adversaire de même force qu'est-ce qui est plus probable: 1) gagner trois parties des quatre ou cinq des huit? 2) gagner pas moins de trois parties des quatre ou pas moins de cinq parties des huit?

Solution. 1) A = {gain de 3 parties sur 4}; B = {gain de 5 parties sur 8}; $P(A) = C_4^3 (1/2)^4 = 1/4$; $P(B) = C_8^5 (1/2)^8 = 7/32$; $P(A) > P(B)$.

2) C = {gain pas moins de 3 parties sur 4}; D = {gain pas moins de 5 parties sur 8}; $P(C) = C_4^3 (1/2)^4 + (1/2)^4 = 5/16$; $P(D) = C_8^5 (1/2)^8 + C_8^6 (1/2)^8 + C_8^7 (1/2)^8 + (1/2)^8 = 93/256$. $P(D) > P(C)$.

2.88. Une personne appartenant à un groupe défini de la population s'avère avec une probabilité 0,2 un brun, avec une probabilité 0,3 un chatain, avec une probabilité 0,4 un blond et avec une pro-

babilité 0,1 un roux. On choisit au hasard un groupe de six personnes. Trouver les probabilités des événements suivants:

A = {le groupe compte pas moins de trois blonds};

B = {le groupe compte au moins un roux};

C = {le groupe compte le même nombre de blonds et de chatains}.

Solution. $P(A) = 1 - [0{,}6^6 + 6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^5 + 15\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^4] \approx \approx 0{,}455$; $P(B) = 1 - (1 - 0{,}1)^6 \approx 0{,}468$; $C = C_0 + C_1 + + C_2 + C_3$,

où C_0 = {le groupe ne compte ni blonds ni chatains};

C_1 = {le groupe compte un blond et un chatain, les autres étant ni l'un ni l'autre};

C_2 = {le groupe compte deux blonds et deux chatains, les autres n'étant ni l'un ni l'autre};

C_3 = {le groupe compte trois blonds et trois chatains}.

$$P(C_0) = (1-0{,}7)^6 \approx 0{,}0007;$$

$$P(C_1) = \frac{6!}{1!\,1!\,4!}\,0{,}3\cdot 0{,}4\,(1-0{,}7)^4 \approx 0{,}0292;$$

$$P(C_2) = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\,0{,}3^2\cdot 0{,}4^2\,(1-0{,}7)^2 \approx 0{,}1166;$$

$$P(C_3) = \frac{6!}{3!\,3!}\,0{,}3^3\cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}0346; \quad P(C) \approx 0{,}181.$$

2.89. Pendant un temps t on utilise N appareils. Chaque appareil a une fiabilité p et tombe en panne indépendamment des autres. Trouver la probabilité $P(A)$ pour que le régleur appelé après un temps t pour réparer les appareils défectueux, ne puisse pas remplir sa tâche en un temps τ, si pour la réparation de chaque appareil défectueux il a besoin d'un temps τ_0.

Solution. L'événement A est équivalent à ce que le nombre d'appareils en panne soit plus grand que $l = [\tau/\tau_0]$, où $[\tau/\tau_0]$ est le nombre entier maximal compris dans τ/τ_0

$$P(A) = \sum_{m=l+1}^{N} C_N^m (1-p)^m p^{N-m}.$$

2.90. Soient N appareils défectueux mis à l'essai pour localiser une défaillance. Chaque essai avec une probabilité p aboutit indépendamment des autres à la localiser. Si la défaillance est localisée, l'appareil est remis à l'atelier de réparation, alors que la révision porte sur d'autres appareils. Si la défaillance est localisée dans tous les N appareils, on met fin aux essais. Il est possible de réaliser en tout n essais ($n > N$). Trouver la probabilité pour que les défaillances soient localisées dans tous les N appareils.

Solution. A = {toutes les défaillances localisées} = {la défaillance est localisée pas moins de N fois}.

$$P(A) = \sum_{m=N}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

2.91. Sous les conditions du problème précédent trouver la probabilité pour que, à la suite de n essais, il reste parmi les N appareils défectueux pas moins de k appareils comportant des défaillances non localisées ($k < N$).

Solution. Cet énoncé est équivalent à l'énoncé suivant: trouver la probabilité pour que n essais assurent la localisation des défaillances pas plus que dans $N - k$ appareils.

$$P(A) = \sum_{m=0}^{N-k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

2.92*. Un appareil se compose de n ensembles. La probabilité de tomber en panne du i-ième ensemble est p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Le fonctionnement de l'appareil ne peut être assuré que par le fonctionnement sans défaillance de tous les ensembles. En calculant la probabilité R pour que l'appareil tombe en panne, on remplace approximativement les probabilités p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) par leur moyenne arithmétique:

$$\tilde{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i. \tag{2.92}$$

La valeur approchée calculée $\tilde{R}$ de la probabilité R est-elle dans ces conditions plus grande ou plus petite que la valeur réelle de R?

Solution. La valeur exacte de $R = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i$, où $q_i = 1 - p_i$.

La valeur approchée (d'après la probabilité moyenne $\tilde{p}$)

$$\tilde{R} = 1 - (1-\tilde{p})^n = 1 - \left[\frac{1}{n}\left(n - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)\right]^n = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i\right]^n.$$

Il faut comparer les quantités $\prod_{i=1}^{n} q_i$ et $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i\right]^n$. On sait que la moyenne géométrique des grandeurs positives non égales entre elles est inférieure à leur moyenne arithmétique, d'où

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} q_i} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i; \quad \prod_{i=1}^{n} q_i < \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q\right]^n,$$

donc $\tilde{R} < R$.

2.93. Une usine produit des articles dont chacun doit subir quatre types d'essais. Le premier essai est subi sans accrocs avec une probabilité 0,9; le deuxième, avec une probabilité 0,95; le troisième, avec une probabilité 0,8 et le quatrième, avec une probabilité 0,85. Trouver la probabilité pour que l'article subit sans accrocs

A = {tous les quatre essais};

B = {exactement deux essais des quatre};

C = {pas moins de deux essais des quatre}.

Réponse. $P(A) \approx 0{,}581$; $P(B) \approx 0{,}070$; $P(C) \approx 0{,}994$.

2.94. Pour améliorer la fiabilité de la transmission d'un message important comportant n symboles, chaque symbole transmis est répété m fois. Au poste de réception le symbole reproduit comme perceptible est celui qui est répété pas moins de k fois des m. Si au poste de réception le symbole est répété moins de k fois, il n'est pas reproduit étant considéré comme perturbé. La probabilité p de la transmission correcte d'un symbole quelconque est la même et ne dépend pas de la transmission correcte des autres symboles. Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {un symbole isolé transmis par le message est perçu correctement au poste de réception};

B = {le message tout entier est perçu correctement au poste de réception};

C = {pas plus de l symboles du message sont perturbés}.

Solution. Pour que le symbole transmis soit perçu correctement il faut qu'il soit transmis sans perturbations au moins k fois des m. La probabilité pour que le symbole soit transmis correctement j fois des m (d'après la formule 2.0.19), est

$$C_m^j p^j (1-p)^{m-j}.$$

La probabilité pour que le symbole soit transmis correctement pas moins de k fois des m peut se calculer d'après la formule (2.0.22)

$$P(A) = \sum_{j=k}^{m} C_m^j (1-p)^{m-j} p^j$$

ou pour un k relativement petit $k < m/2$, d'après la formule (2.0.23)

$$P(A) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} C_m^j p^j (1-p)^{m-j}.$$

Pour que le message soit perçu correctement il faut que la reproduction de tous les n symboles soit correcte

$$P(B) = [P(A)]^n.$$

La probabilité de l'événement C peut se calculer d'après la formule

$$P(C) = \sum_{i=0} [1 - P(A)]^i [P(A)]^{n-i}.$$

CHAPITRE III

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES. FORMULE DE BAYES

3.0. Les lois fondamentales que sont le théorème des probabilités totales et le théorème des probabilités composées, ont pour corollaires la formule des probabilités totales et la formule de Bayes (théorème des hypothèses).

Formule des probabilités totales

Si sur les conditions de l'épreuve on peut faire n hypothèses incompatibles $H_1, H_2, \ldots, H_n$ et si l'événement A qui nous intéresse ne peut apparaître que sous l'une de ces hypothèses, alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A \mid H_i), \tag{3.0.1}$$

où $P(H_i)$ est la probabilité de l'hypothèse H_i ; $P(A \mid H_i)$, la probabilité conditionnelle de l'événement A sous cette hypothèse.

La formule (3.0.1) s'appelle *formule des probabilités totales*. On l'emploie pour calculer la probabilité d'un événement dans les problèmes dont l'issue aléatoire a « deux étapes »; la première étape met en jeu les conditions de l'expérience, et la deuxième, la réalisation ou la non-réalisation de l'événement.

Exemple. Un lot de N articles présente un mélange des produits de trois usines: N_1 articles de la première usine, N_2 articles de la deuxième et N_3 de la troisième usine.

Pour les articles de la première usine la fiabilité, ou la probabilité de fonctionner sans défaillance pendant un temps t, est p_1, de la deuxième, p_2, et de la troisième, p_3. On tire au hasard du lot mélangé un article. Trouver la probabilité de l'événement:

A = {l'article fonctionnera sans défaillance pendant un temps t}.

Solution. Sur les conditions de l'épreuve on peut faire trois hypothèses:

H_1 = {l'article tiré appartient à la première usine};

H_2 = {l'article tiré appartient à la deuxième usine};

H_3 = {l'article tiré appartient à la troisième usine}.

Les probabilités de ces hypothèses sont

$$P(H_1) = \frac{N_1}{N}; \quad P(H_2) = \frac{N_2}{N}; \quad P(H_3) = \frac{N_3}{N}.$$

Sous ces hypothèses les probabilités conditionnelles de l'événement A:

$$P(A \mid H_1) = p_1; \quad P(A \mid H_2) = p_2; \quad P(A \mid H_3) = p_3.$$

D'après la formule des probabilités totales (3.0.1)

$$P(A)=\frac{N_1}{N}p_1+\frac{N_2}{N}p_2+\frac{N_3}{N}p_3=\frac{1}{N}(N_1p_1+N_2p_2+N_3p_3).$$

Un autre corollaire important du théorème des probabilités totales et du théorème des probabilités composées est le *théorème des hypothèses* ou la *formule de Bayes*.

Supposons qu'on puisse émettre sur les conditions de l'épreuve n hypothèses incompatibles : $H_1, H_2, \ldots, H_n$; leurs probabilités avant l'expérience (probabilités *a priori*) sont $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Admettons que l'épreuve soit réalisée et qu'il en résulte l'événement A ; on connaît les probabilités conditionnelles de cet événement sous les hypothèses $H_1, H_2, \ldots, H_n$:

$$P(A \mid H_1),\quad P(A \mid H_2),\ \ldots,\ P(A \mid H_n).$$

On demande comment faut-il reviser les probabilités *a priori* à la lumière de l'information obtenue : {apparition de l'événement A}? C'est-à-dire qu'il s'agit de trouver les probabilités après l'expérience (probabilités *a posteriori*) des hypothèses, leurs probabilités conditionnelles en présence de A :

$$P(H_1 \mid A),\quad P(H_2 \mid A),\ \ldots,\ P(H_n \mid A).$$

A cette question répond la *formule de Bayes* (théorème des hypothèses) :

$$P(H_i \mid A)=\frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A \mid H_i)}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.0.2}$$

ou, compte tenu de la formule des probabilités totales (3.0.1),

$$P(H_i \mid A)=\frac{P(H_i)\,(P(A \mid H_i)}{P(A)}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.0.3}$$

où $P(A)$ est la probabilité totale de l'événement A.

Exemple. On mène l'enquête sur les causes d'une catastrophe aérienne ; on peut émettre à ce propos trois hypothèses incompatibles, H_1, H_2, H_3, dont les probabilités *a priori* (avant la catastrophe) sont $P(H_1) = 0{,}7$; $P(H_2) = 0{,}2$ et $P(H_3) = 0{,}1$.

Après la catastrophe on a observé l'événement A = {inflammation du combustible}. Les données statistiques témoignent que la première cause provoque l'inflammation avec une probabilité $P(A \mid H_1) = 0{,}1$; la deuxième, avec une probabilité $P(A \mid H_2) = 0{,}3$; lors de la troisième cause le combustible s'enflamme toujours : $P(A \mid H_3) = 1$. Trouver les probabilités *a posteriori* des hypothèses compte tenu de ce que le combustible s'est enflammé.

Solution. D'après la formule de Bayes (3.0.2) ou (3.0.3), on a

$$P(H_1 \mid A)=\frac{0{,}7\cdot 0{,}1}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 1}=\frac{0{,}07}{0{,}23}\approx 0{,}304\ ;$$

$$P(H_2 \mid A)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}23}\approx 0{,}261\ ;\qquad P(H_3 \mid A)=\frac{0{,}1\cdot 1}{0{,}23}\approx 0{,}435.$$

De la sorte, compte tenu de l'issue de l'épreuve, la plus probable est l'hypothèse H_3.

La formule de Bayes permet également de calculer les probabilités des événements observés dans les épreuves ultérieures qui suivent celle dont a résulté l'événement A. Soient plusieurs hypothèses incompatibles $H_1, H_2, \ldots, H_n$, qu'on peut émettre sur les conditions de l'épreuve, et leurs probabilités *a priori* $P(H_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. A l'issue de cette épreuve apparaît l'événement A

dont les probabilités conditionnelles sous les hypothèses $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont $P(A \mid H_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. L'épreuve est reprise encore une fois; elle peut amener ou ne pas amener l'événement B; sa probabilité conditionnelle sous l'hypothèse H_i est égale à $P(B \mid H_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Il faut trouver la probabilité conditionnelle de l'événement B à l'issue de la deuxième épreuve compte tenu que la première a conduit à l'événement A. Cette probabilité se calcule d'après la formule des probabilités totales (3.0.1), à cette différence près qu'au lieu des probabilités *a priori* des hypothèses $P(H_i)$ on y porte les probabilités *a posteriori* qui rendent compte de l'apparition de l'événement A dans la première épreuve:

$$P(B|A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) \cdot P(B|H_iA). \tag{3.0.4}$$

Exemple. Soient trois lots d'articles de même type; le premier compte n_1 articles défectueux et n_2 articles bons; le deuxième, m_1 défectueux et m_2 bons; le troisième, k_1 défectueux et k_2 bons. On choisit au hasard l'un des lots pour en tirer au hasard un article; il s'est avéré défectueux (événement A). Compte tenu de ce fait trouver la probabilité pour que l'article suivant tiré du même lot soit défectueux lui aussi (événement B).

Solution. Les hypothèses H_1 = {premier lot choisi}; H_2 = {deuxième lot choisi}; H_3 = {troisième lot choisi}. Leurs probabilités *a priori* valent

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Evénement observé A = {article défectueux}.

Calculons les probabilités *a priori* d'après la formule de Bayes

$$P(H_1|A) = \frac{n_1/(n_1+n_2)}{n_1/(n_1+n_2)+m_1/(m_1+m_2)+k_1/(k_1+k_2)};$$

$$P(H_2|A) = \frac{m_1/(m_1+m_2)}{n_1/(n_1+n_2)+m_1/(m_1+m_2)+k_1/(k_1+k_2)};$$

$$P(H_3|A) = \frac{k_1/(k_1+k_2)}{n_1/(n_1+n_2)+m_1/(m_1+m_2)+k_1/(k_1+k_2)}.$$

L'événement B = {deuxième article choisi également défectueux} a sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 les probabilités conditionnelles suivantes:

$$P(B|H_1A) = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-1}; \quad P(B|H_2A) = \frac{m_1-1}{m_1+m_2-1};$$

$$P(B|H_3A) = \frac{k_1-1}{k_1+k_2-1}.$$

La probabilité conditionnelle totale de l'événement B se calcule d'après la formule (3.0.4):

$$P(B \mid A) = P(H_1 \mid A) \cdot P(B \mid H_1A) + P(H_2 \mid A) \cdot P(B \mid H_2A) + \\ + P(H_3 \mid A) \cdot P(B \mid H_3A).$$

Problèmes et exercices

3.1. Soient trois urnes d'aspect extérieur identique. La première contient a boules blanches et b noires; la deuxième, c boules blanches et d noires; la troisième ne contient que des boules blanches. Une

personne s'approche au hasard de l'une des urnes et en tire une boule. Trouver la probabilité pour que la boule soit blanche.

Solution. Soit l'événement A = {sortie de la boule blanche}. Composons les hypothèses:

H_1 = {choix de la première urne};
H_2 = {choix de la deuxième urne};
H_3 = {choix de la troisième urne}.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}; \quad P(A|H_1) = \frac{a}{a+b};$$

$$P(A|H_2) = \frac{c}{c+d}; \quad P(A|H_3) = 1.$$

D'après la formule des probabilités totales

$$P(A) = \frac{1}{3}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right).$$

3.2. Un appareil peut assurer le service sous deux régimes, normal et anormal. Le régime normal s'observe dans 80 % des cas de son fonctionnement; le régime anormal, dans 20 % des cas. La probabilité pour qu'en un temps t l'appareil tombe en panne sous le régime normal est égale à 0,1, et sous le régime anormal, à 0,7. Trouver la probabilité totale pour que l'appareil tombe en panne en un temps t.

Réponse. $p = 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}22$.

3.3. Une usine produit des articles dont chacun possède un défaut avec une probabilité p. L'atelier compte trois contrôleurs; l'article est revisé par un seul contrôleur avec la même probabilité qu'il soit le premier, le deuxième ou le troisième. La probabilité de découvrir un défaut, s'il existe, par l'i-ième contrôleur est égale à p_i ($i = 1, 2, 3$). Si l'article n'a pas été rebuté à l'atelier, il est revisé par le Service de contrôle technique de l'usine, où le défaut, s'il existe, est découvert avec une probabilité p_0. Calculer la probabilité des événements suivants:

A = {article rebuté};
B = {article rebuté à l'atelier};
C = {article rebuté par le Service de contrôle technique de l'usine}.

Solution. Les événements B et C étant incompatibles et $A = B + C$, on a $P(A) = P(B) + P(C)$. Cherchons $P(B)$. Pour que l'article soit rebuté à l'atelier, il faut premièrement qu'il possède un défaut, et deuxièmement, que ce défaut soit découvert. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de la découverte d'un défaut présent est égale à $^1/_3\,(p_1 + p_2 + p_3)$; d'où $P(B) = {}^1/_3 p\,(p_1 + p_2 + p_3)$.

D'une façon analogue, $P(C) = p\,[1 - {}^1/_3\,(p_1 + p_2 + p_3)]\,p_0$ ou, en introduisant la notation $^1/_3\,(p_1 + p_2 + p_3) = \bar{p}$, $P(B) = \bar{p}p$; $P(C) = pp_0\,(1 - \bar{p})$, d'où $P(A) = p\,[\bar{p} + p_0\,(1 - \bar{p})]$.

3.4. Soient deux urnes: la première contient a boules blanches et b noires; la deuxième, c boules blanches et d noires. On tire une boule de la première urne pour la mettre dans la deuxième. Puis on tire une boule de la deuxième urne pour la mettre dans la première. Trouver la probabilité pour que cette boule soit blanche.

Solution. Evénement A = {sortie de la boule blanche}; hypothèses:

H_1 = {boule blanche a changé d'urne};

H_2 = {boule noire a changé d'urne}.

$$P(H_1)=\frac{a}{a+b}; \quad P(H_2)=\frac{b}{a+b}; \quad P(A|H_1)=\frac{c+1}{c+d+1};$$

$$P(A|H_2)=\frac{c}{c+d+1}; \quad P(A)=\frac{a}{a+b}\,\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{c+d+1}.$$

3.5. Même problème, mais au lieu d'une boule, ce sont trois boules qui changent d'urne (on présume que $a \geqslant 3$; $b \geqslant 3$). Trouver la probabilité pour que de la deuxième urne soit tirée une boule blanche.

Solution. On peut avancer quatre hypothèses:

H_1 = {3 boules blanches ont changé d'urne};

H_2 = {2 boules blanches et 1 boule noire ont changé d'urne};

H_3 = {1 boule blanche et 2 noires ont changé d'urne};

H_4 = {3 boules noires ont changé d'urne},

mais il est plus simple de résoudre le problème en partant seulement de deux hypothèses:

H_1 = {la boule tirée de la deuxième urne appartient à la première urne};

H_2 = {la boule tirée de la deuxième urne appartient à la deuxième urne}.

Etant donné que dans la deuxième urne trois boules appartiennent à la première, et $c+d$, à la deuxième, il vient

$$P(H_1) = 3/(c+d+3); \quad P(H_2) = (c+d)/(c+d+3).$$

Cherchons les probabilités conditionnelles de l'événement A = = {sortie de la boule blanche tirée de la deuxième urne} sous les hypothèses H_1 et H_2. La probabilité de l'apparition d'une boule blanche tirée de la première urne ne dépend pas du fait si cette boule est tirée directement de la première urne ou après être remise dans la deuxième; donc

$$P(A|H_1)=\frac{a}{a+b}, \quad P(A|H_2)=\frac{c}{c+d},$$

d'où l'on tire

$$P(A)=\frac{3}{c+d+3}\,\frac{a}{a+b}+\frac{c+d}{c+d+3}\,\frac{c}{c+d}.$$

3.6. Soient n urnes dont chacune contient a boules blanches et b noires. On fait passer une boule de la première urne dans la deuxième; puis une boule de la deuxième dans la troisième, etc. Puis, de la dernière urne on retire une boule. Trouver la probabilité pour que cette boule soit blanche.

Solution. La probabilité de l'événement A_2 = {tirage d'une boule blanche de la deuxième urne après le remplacement} se calcule de la même façon que dans le problème 3.5 (pour $c = a$; $d = b$):

$$P(A_2) = \frac{a}{a+b}\,\frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+1} = \frac{a}{a+b}.$$

De la sorte, la probabilité de tirer après le remplacement une boule blanche de la deuxième urne est la même qu'avant le remplacement. Par conséquent, la probabilité est la même pour qu'une boule blanche soit tirée de la troisième, quatrième, etc., n-ième urne:

$$P(A_n) = a/(a+b).$$

3.7. Des appareils de même dénomination sont fabriqués par deux entreprises; la première livre 2/3 de tous les appareils reçus par l'utilisateur; la deuxième, 1/3. La fiabilité (la probabilité de fonctionnement sans défaillance) de l'appareil fabriqué par la première entreprise est p_1, et par la deuxième, p_2. Déterminer la fiabilité totale (moyenne) p de l'appareil reçu par l'utilisateur.

Réponse. $2/3p_1 + 1/3p_2$.

3.8. Soient deux lots d'articles de même type; le premier lot compte N articles parmi lesquels n sont défectueux; le deuxième, M articles dont m sont défectueux. On tire au hasard du premier lot K articles, du deuxième lot, L articles ($K < N$; $L < M$); ces $K+L$ articles sont mélangés pour former un nouveau lot. Dans ce nouveau lot on tire au hasard un article. Trouver la probabilité pour que cet article soit défectueux.

Solution. L'événement A = {article défectueux}. Hypothèses:
H_1 = {article du premier lot};
H_2 = {article du deuxième lot}.

$$P(H_1) = \frac{K}{K+L}; \quad P(H_2) = \frac{L}{K+L};$$

$$P(A) = \frac{K}{K+L}\,\frac{n}{N} + \frac{L}{K+L}\,\frac{m}{M}.$$

3.9. Dans le nouveau lot mélangé de l'énoncé précédent on tire non pas un, mais trois articles. Trouver la probabilité pour qu'au moins un des trois articles soit défectueux.

Solution. Hypothèses :

H_0 = {tous les trois articles appartiennent au premier lot};

H_1 = {deux articles appartiennent au premier lot, un article, au deuxième};

H_2 = {un article appartient au premier lot, deux, au deuxième};

H_3 = {tous les trois articles appartiennent au deuxième lot}.

$$P(H_0) = \frac{K(K-1)(K-2)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$P(H_1) = \frac{3K(K-1)L}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$P(H_2) = \frac{3KL(L-1)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$P(H_3) = \frac{L(L-1)(L-2)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$P(A|H_0) = 1 - \frac{(N-n)(N-n-1)(N-n-2)}{N(N-1)(N-2)};$$

$$P(A|H_1) = 1 - \frac{(N-n)(N-n-1)(M-m)}{N(N-1)M};$$

$$P(A|H_2) = 1 - \frac{(N-n)(M-m)(M-m-1)}{NM(M-1)};$$

$$P(A|H_3) = 1 - \frac{(M-m)(M-m-1)(M-m-2)}{M(M-1)(M-2)};$$

$$P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + \\ + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3).$$

3.10. Soient deux caisses qui contiennent des articles de même type dont certains sont en bon état et d'autres défectueux. La première caisse compte a articles en bon état et b défectueux ; la deuxième, c, en bon état, et d, défectueux. On retire au hasard un article de la première caisse pour le mettre dans la deuxième et le mélanger aux autres, après quoi de la deuxième caisse on retire au hasard un article pour le mettre dans la première. Ensuite on tire au hasard un article de la première caisse. Trouver la probabilité pour que cet article soit en bon état.

Solution. Hypothèses :

H_1 = {la composition des articles dans la première caisse n'a pas changé};

H_2 = {dans la première caisse un article défectueux est remplacé par un en bon état};

H_3 = {dans la première caisse un article défectueux est remplacé par un article défectueux}.

Evénement A = {après le remplacement on tire de la première caisse un article en bon état}.

$$P(H_1)=\frac{a}{a+b}\,\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{d+1}{c+d+1}\,;\quad P(H_2)=\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{c+d+1}\,;$$

$$P(H_3)=\frac{a}{a+b}\,\frac{d}{c+d+1}\,;\quad P(A)=\left(\frac{a}{a+b}\,\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{d+1}{c+d+1}\right)\times$$

$$\times\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{c+d+1}\,\frac{a+1}{a+b}+\frac{a}{a+b}\,\frac{d}{c+d+1}\,\frac{a-1}{a+b}=$$

$$=\frac{a(a+b)(c+d+1)+bc-ad}{(a+b)^2(c+d+1)}=\frac{a}{a+b}+\frac{bc-ad}{(a+b)^2(c+d+1)}.$$

La solution obtenue montre que la probabilité de tirer un article en bon état ne change pas, si dans les deux caisses les parts des articles en bon état et défectueux sont les mêmes: $c/a = d/b$, c'est-à-dire $bc - ad = 0$.

3.11. Des nombres 1, 2, . . ., n on choisit deux au hasard. Quelle est la probabilité pour que la différence entre le nombre tiré le premier et le nombre tiré le deuxième ne soit pas plus petite que $m\,(m > 0)$?

Solution. L'événement A consiste en ce que la différence entre le nombre k tiré le premier et le nombre l tiré le deuxième n'est pas inférieure à m (c'est-à-dire $k - l \geqslant m$). Les hypothèses H_k = = {le premier nombre tiré est k} ($k = m + 1, \ldots, n$).

$$P(H_k)=1/n\,;\quad P(A|H_k)=(k-m)/(n-1)\,;$$

$$P(A)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{k-m}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}\,[1+2+\ldots+(n-m)]=$$

$$=\frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}.$$

3.12. Des N tireurs on peut composer quatre groupes: a_1, tireurs d'élite; a_2, bons tireurs; a_3, tireurs passables et a_4, mauvais tireurs. La probabilité d'atteindre la cible en un coup est égale pour le tireur du i-ième groupe à p_i ($i = 1, 2, 3, 4$). On appelle au hasard deux tireurs qui visent la même cible. Trouver la probabilité pour que la cible soit atteinte au moins par un coup.

Solution. L'événement A = {au moins un coup atteint la cible}. Hypothèses: H_i = {le premier appelé est un tireur du i-ième groupe} ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$P(H_i)=\frac{a_i}{N}\,,\quad P(A)=\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{N}\,P(A|H_i),$$

où P $(A \mid H_i)$ se calcule de nouveau d'après la formule des probabilités totales pour quatre hypothèses sur le tireur qui a été appelé le deuxième :

$$P(A|H_i)=\frac{a_i-1}{N-1}[1-(1-p_i)^2]+\sum_{j\neq i}\frac{a_j}{N-1}[1-(1-p_i)(1-p_j)].$$

3.13. Un poste radar poursuit l'observation d'un objet qui peut employer ou ne pas employer le brouillage. Si l'objet ne l'emploie pas, le poste le découvre en un cycle de balayage avec une probabilité p_0 ; s'il les emploie, avec une probabilité $p_1 < p_0$. La probabilité pour que pendant le cycle le brouillage soit employé est égale à p et ne dépend pas du fait où et quand ils ont été employés dans les autres cycles. Trouver la probabilité pour que, en n cycles de balayage, l'objet soit détecté au moins une fois.

Solution. La probabilité totale de la localisation en un cycle $(1-p)\,p_0+pp_1$; la probabilité au moins d'une localisation en n cycles : $1-[1-(1-p)\,p_0-pp_1]^n$.

3.14. Une machine à diagnostiquer est mise en marche en introduisant les résultats des n analyses d'un malade. Chaque analyse, indépendamment des autres, peut être erronée avec une probabilité p. La probabilité $\mathcal{P}$ d'un diagnostic correct est une fonction non décroissante du nombre m d'analyses correctes : $\mathcal{P}=\varphi(m)$. Pendant une durée de service τ la machine a diagnostiqué k malades. Trouver la probabilité de l'événement $A=\{$erreur de diagnostic au moins d'un malade$\}$.

Solution. Considérons l'événement $B=\{$le diagnostic d'un malade isolé est erroné$\}$. Faisons des hypothèses sur le nombre d'analyses réalisées sans erreur :

$H_0=\{$aucune analyse sans erreur$\}$;
$H_1=\{$exactement une analyse sans erreur$\}$;
. . . . . .
$H_m=\{$exactement m analyses sans erreur$\}$;
. . . . . .
$H_n=\{n$ analyses sans erreur$\}$.

La probabilité de l'événement H_m pour un m quelconque se calcule d'après la formule (2.0.19) (théorème des épreuves répétées) en remplaçant p par $1-p$:

$$P(H_0)=p^n\,;\quad P(H_1)=n(1-p)\,p^{n-1}\,;\ \ldots\,;$$
$$P(H_m)=C_n^m(1-p)^m\,p^{n-m}\,;\ \ldots\,;\quad P(H_n)=(1-p)^n.$$

D'après la formule des probabilités totales

$$P(B)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m(1-p)^m\,p^{n-m}\,\varphi(m)\,;\quad P(A)=1-[1-P(B)]^k.$$

3.15. L'atelier d'une usine produit des articles de type défini qui présentent chacun un défaut avec une probabilité p. Chaque article est revisé par un contrôleur qui découvre le défaut, s'il existe, avec une probabilité p_1, et ne le découvre pas avec une probabilité $1 - p_1$. D'autre part, le contrôleur admet quelquefois une erreur en rebutant un article de bonne qualité; ceci se produit avec une probabilité p_2. Par journée de travail, le contrôleur passe en revision N articles. Trouver la probabilité R pour qu'au moins un article soit qualifié par lui d'une façon incorrecte et rapporté aux articles de bonne qualité étant défectueux, ou aux articles défectueux, étant de bonne qualité (on admet que les résultats des revisions des articles isolés sont indépendants).

Solution. Hypothèses:

H_1 = {l'article a un défaut}; H_2 = {l'article n'a pas de défaut}.

La probabilité pour un article d'être qualifié incorrectement vaut d'après la formule des probabilités totales:

$$\tilde{p} = p\,(1 - p_1) + (1 - p)\,p_2.$$

La probabilité pour qu'au moins un article soit qualifié incorrectement est

$$R = 1 - (1 - \tilde{p})^N.$$

3.16. Un groupe d'étudiants se compose de a excellents élèves, b bons élèves et c élèves médiocres. Au futur examen les élèves excellents ne peuvent obtenir que des notes parfaites, les bons élèves peuvent recevoir avec la même probabilité des notes bien et très bien. Les élèves médiocres peuvent obtenir avec la même probabilité des notes bien, passables et mauvaises. Pour passer l'examen les étudiants se présentent un à un au hasard. Trouver la probabilité de l'événement A = {l'étudiant recevra une note bien ou parfaite}.

Solution. Hypothèses:

H_1 = {on interroge un étudiant excellent};

H_2 = {on interroge un bon étudiant};

H_3 = {on interroge un étudiant médiocre}.

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{a}{a+b+c}; \quad \mathrm{P}(H_2) = \frac{b}{a+b+c}; \quad \mathrm{P}(H_3) = \frac{c}{a+b+c}.$$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\cdot 1 + \mathrm{P}(H_2)\cdot 1 + \mathrm{P}(H_3)\,\frac{1}{3} = \frac{a+b+c/3}{a+b+c}.$$

3.17. Sous les conditions de l'énoncé précédent on interroge au hasard trois étudiants. Trouver la probabilité pour qu'ils reçoivent dans un ordre quelconque des notes très bien, bien et passable.

Solution. L'événement A = {obtention d'une note très bien, bien et passable} n'est possible que sous une des hypothèses suivantes :

H_1 = {on interroge un étudiant médiocre, un bon et un excellent};
H_2 = {on interroge un étudiant médiocre et deux bons};
H_3 = {on interroge deux étudiants médiocres et un bon};
H_4 = {on interroge deux étudiants médiocres et un excellent}.

$$P(H_1)=\frac{6abc}{N(N-1)(N-2)}; \quad P(H_2)=\frac{3b(b-1)c}{N(N-1)(N-2)};$$

$$P(H_3)=\frac{3bc(c-1)}{N(N-1)(N-2)}; \quad P(H_4)=\frac{3ac(c-1)}{N(N-1)(N-2)};$$

$$N=a+b+c.$$

$$P(A)=P(H_1)\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+P(H_2)\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+P(H_3)\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}+P(H_4)\cdot 1\cdot\frac{2}{9}.$$

3.18. Un autobus emporte n passagers. A la prochaine station chacun d'eux descend avec une probabilité p ; d'autre part, avec une probabilité p_0 aucun nouveau passager ne monte dans l'autobus et avec une probabilité $1-p_0$, monte un nouveau passager. Trouver la probabilité pour que l'autobus contienne toujours n passagers lorsqu'il se met en marche après cette station.

Solution. Evénement A = {après la station toujours n passagers}. Hypothèses :

H_0 = {personne n'est monté};
H_1 = {un passager est monté}.

$$P(H_0)=p_0; \quad P(H_1)=1-p_0; \quad P(A|H_0)=(1-p)^n;$$

$$P(A|H_1)=np(1-p)^{n-1}; \quad P(A)=p_0(1-p)^n+(1-p_0)np(1-p)^{n-1}.$$

3.19. Un appareil se compose de deux ensembles I et II qui doublent l'un l'autre (fig. 3.19), et peut travailler d'une façon aléatoire sous l'un des deux régimes : favorable et défavorable. Sous le régime favorable la fiabilité de chaque ensemble est p_1, et sous le régime défavorable, p_2. La probabilité pour que l'appareil travaille sous le régime favorable est égale à P_1, et défavorable, à $1-P_1$. Trouver la fiabilité totale (moyenne) P de l'appareil.

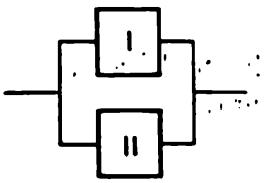


Fig. 3.19

Réponse. $P = P_1[1-(1-p_1)^2]+(1-P_1)(1-(1-p_2)^2]$.

3.20. Dans une armoire sont rangés des appareils de même type dont a neufs et b déjà utilisés ($a \geqslant 2$; $b \geqslant 2$). On choisit au hasard deux appareils pour les faire fonctionner pendant un certain temps, après quoi on les remet dans l'armoire. Ensuite on choisit une seconde

fois au hasard deux appareils. Trouver la probabilité de l'événement A = {les deux appareils choisis la deuxième fois sont neufs}.

Solution. Hypothèses:

H_1 = {les deux appareils choisis la première fois étaient neufs};

H_2 = {les deux appareils choisis la première fois ont déjà servi};

H_3 = {un des appareils choisi la première fois était neuf, l'autre a déjà servi}.

$$P(H_1)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}; \quad P(H_2)=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$P(H_3)=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$P(A)=\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)+b(b-1)a(a-1)+2ab(a-1)(a-2)}{(a+b)^2(a+b-1)^2}.$$

3.21. Un message peut être transmis par chacune des n voies de communication à propriétés différentes (ou qui se trouvent en des états différents), dont n_1 voies en état parfait, n_2 en bon état, n_3 en état passable et n_4 en mauvais état ($n_1+n_2+n_3+n_4=n$). La probabilité de la transmission correcte du message par des types de voies différents est égale à p_1, p_2, p_3, p_4. Pour rendre le message plus authentique, il est transmis deux fois par des voies différentes choisies au hasard. Trouver la probabilité pour que la transmission au moins par une des voies soit correcte.

Solution. A = {la transmission au moins d'un des messages est correcte}. Faisons quatre hypothèses sur le groupe des voies par lesquelles est transmis le premier des deux messages: H_1, H_2, H_3, H_4, où H_i = {le premier message est transmis par la voie du i-ième groupe}; $P(H_i)=n_i/n$ ($i=1, 2, 3, 4$). D'après la formule des probabilités totales

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A|H_i).$$

Sous l'hypothèse H_i la probabilité conditionnelle de l'événement A est égale à

$$P(A|H_i)=\frac{n_i-1}{n-1}[1-(1-p_i)^2]+\sum_{j\neq i}\frac{n_j}{n-1}[1-(1-p_i)(1-p_j)].$$

3.22. Un appareil se compose de deux ensembles I et II (fig. 3.22) dont le fonctionnement sans défaillance est indispensable pour le service de l'appareil et d'un stabilisateur de tension S qui peut être en bon état ou défectueux. Avec un stabilisateur en bon état les fiabilités des ensembles I et II sont égales à p_1 et p_2; lorsqu'il

est défectueux, à p_1' et p_2'. Le stabilisateur est en bon état avec une probabilité p_S. Trouver la fiabilité totale P de l'appareil.

Réponse. $P = p_S p_1 p_2 + (1 - p_S)\, p_1' p_2'$.

3.23. Même énoncé que 3.22, mais les ensembles I et II doublent l'un l'autre (fig. 3.23).

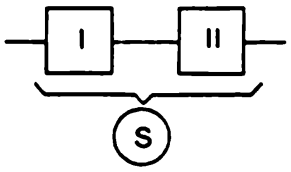


Fig. 3.22

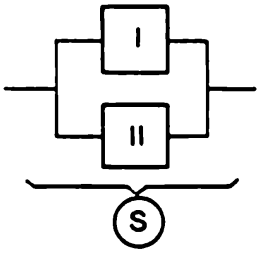


Fig. 3.23

Réponse. $P = p_S\,[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] + (1 - p_S)\,[1 - (1 - p_1')(1 - p_2')]$.

3.24. Soient n billets d'examen dont chacun compte deux questions. L'élève qui passe son examen ne peut répondre qu'aux k des $2n$ questions ($k < 2n$). Calculer la probabilité p pour qu'il passe l'examen, si à cet effet il suffit de répondre à deux questions de son billet, ou à une question de son billet et à une question d'un billet supplémentaire au choix de l'examinateur.

Solution. Hypothèses:

H_1 = {l'élève connaît les deux questions de son billet};

H_2 = {l'élève connaît une seule question de son billet}.

$$p = \frac{k(k-1)}{2n(2n-1)} \cdot 1 + \frac{2k(2n-k)}{2n(2n-1)} \frac{k-1}{2n-2}.$$

3.25*. Le but qui sert de cible au tir se trouve avec une probabilité p_1 au point I, et avec une probabilité $p_2 = 1 - p_1$, au point II ($p_1 > 1/2$). Nous avons à notre disposition n obus dont chacun peut être tiré sur le point I ou le point II. Chaque projectile frappe le but avec une probabilité p indépendamment des autres. Quel nombre d'obus n_1 faut-il lancer sur le point I pour le détruire avec la probabilité maximale?

Solution. Evénement A = {atteinte du but en dirigeant n_1 obus sur le point I}. Hypothèses:

H_1 = {but au point I}; $P(H_1) = p_1$;

H_2 = {but au point II}; $P(H_2) = 1 - p_1$.

$$P(A) = p_1\,[1 - (1 - p)^{n_1}] + (1 - p_1)\,[1 - (1 - p)^{n - n_1}].$$

En considérant P (A) comme fonction d'un argument continu n_1, on trouve

$$\frac{dP(A)}{dn_1} = [-p_1(1-p)^{n_1} + (1-p_1)(1-p)^{n-n_1}] \ln(1-p);$$

$$\frac{d^2P(A)}{dn_1^2} = -[p_1(1-p)^{n_1} + (1-p_1)(1-p)^{n-n_1}] \ln^2(1-p) < 0,$$

d'où l'on voit que cette fonction possède un maximum unique au point

$$\tilde{n}_1 = \frac{n}{2} + \ln\frac{1-p_1}{p_1} \Big/ [2\ln(1-p)], \quad \text{où} \quad dP(A)/dn_1 = 0.$$

Notons que $\tilde{n}_1 > n/2$ pour $p_1 > 1/2$.

Si le nombre obtenu $\tilde{n}_1 \leqslant n$ et s'il est un entier, alors c'est justement le nombre cherché; s'il n'est pas un nombre entier (mais $\leqslant n$), il faut calculer P (A) pour ses deux valeurs entières les plus proches et choisir celle pour laquelle P (A) est plus grand; si le nombre $\tilde{n}_1$ obtenu s'avère plus grand que n, il convient de diriger tous les n obus sur le point I (ceci aura lieu avec $\ln[(1-p_1)/p_1] \leqslant n \ln(1-p)$, c'est-à-dire que $p_1 \geqslant [1 + (1-p)^n]^{-1}$).

3.26. Un avion atterrit sur un aérodrome. Si le temps le permet, l'atterrissage est réalisé par le pilote à vue. Dans ce cas la probabilité d'un bon atterrissage est égale à p_1. Si l'aérodrome est couvert par un ciel bas, le pilote atterrit en aveugle, aux instruments. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) des indicateurs d'alignement et de descente est égale à P. Si la réponse de ces indicateurs est normale, l'avion atterrit sans aléas avec la même probabilité p_1 que lors de l'atterrissage à vue. Mais si les indicateurs ont manqué, le pilote peut atterrir avec une probabilité $p_1^* < p_1$.

Trouver la probabilité totale d'un atterrissage sans aléas de l'avion, si l'on sait que dans les k % des cas l'aérodrome est couvert par un ciel bas.

Solution. A = {atterrissage sans aléas}. Hypothèses:

H_1 = {pas de ciel bas};

H_2 = {ciel bas}.

$$\mathrm{P}(H_1) = 1 - k/100; \quad \mathrm{P}(H_2) = k/100; \quad \mathrm{P}(A \mid H_1) = p_1.$$

P $(A \mid H_2)$ s'obtient aussi d'après la formule des probabilités totales:

$$P(A|H_2) = Pp_1 + (1-P)\,p_1^*;$$

$$P(A) = \left(1 - \frac{k}{100}\right) p_1 + \frac{k}{100}\,[Pp_1 + (1-P)\,p_1^*].$$

3.27. Soient trois urnes: la première contient a boules blanches et b noires; la deuxième, c boules blanches et d noires; la troisième,

k boules blanches (pas de boules noires). Une personne choisit au hasard une urne et en tire une boule. Cette boule s'est avérée blanche. Trouver la probabilité pour que cette boule soit tirée de la première, de la deuxième et de la troisième urne.

Solution. Cherchons la solution d'après la formule de Bayes (3.0.2). Hypothèses:

H_1 = {choix de la première urne};
H_2 = {choix de la deuxième urne};
H_3 = {choix de la troisième urne}.

A priori (avant l'expérience) toutes les hypothèses sont équiprobables: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

On a observé l'événement A = {apparition d'une boule blanche}. Cherchons les probabilités conditionnelles

$$P(A \mid H_1) = a/(a+b); \quad P(A \mid H_2) = c/(c+d); \quad P(A \mid H_3) = 1.$$

D'après la formule de Bayes la probabilité *a posteriori* pour que la boule soit tirée de la première urne est égale à

$$P(H_1|A) = \frac{1}{3} P(A|H_1) \Big/ \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)\right] =$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right) \Big/ \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right).$$

D'une façon analogue

$$P(H_2|A) = \left(\frac{c}{c+d}\right) \Big/ \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right);$$

$$P(H_3|A) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)^{-1}.$$

3.28. Un appareil se compose de deux ensembles; le fonctionnement de chacun d'eux est absolument nécessaire pour assurer le service de l'appareil tout entier. La fiabilité (probabilité de fonctionner sans défaillance pendant un temps t) du premier ensemble est p_1, du deuxième, p_2. L'appareil a été mis à l'essai pendant un temps t, ce qui a permis d'établir qu'il est en panne. Trouver la probabilité pour que le premier ensemble soit seul à subir une défaillance, alors que le deuxième en bon état.

Solution. Avant l'épreuve on peut avancer quatre hypothèses:

H_0 = {les deux ensembles sont en bon état};
H_1 = {le premier ensemble est en panne, le deuxième en bon état};
H_2 = {le premier ensemble est en bon état, le deuxième est en panne};
H_3 = {les deux ensembles sont en panne}.

Les probabilités des hypothèses:

$$P(H_0) = p_1 p_2; \quad P(H_1) = (1 - p_1) p_2;$$
$$P(H_2) = p_1 (1 - p_2); \quad P(H_3) = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

On a observé l'événement A = {l'appareil est tombé en panne}:

$$P(A \mid H_0) = 0; \quad P(A \mid H_1) = P(A \mid H_2) = P(A \mid H_3) = 1.$$

D'après la formule de Bayes

$$P(H_1 | A) = \frac{(1-p_1) p_2}{(1-p_1) p_2 + p_1 (1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2)} = \frac{(1-p_1) p_2}{1-p_1 p_2}.$$

3.29. D'après l'énoncé du problème 3.26 on sait que l'avion a atterri sans aléas. Trouver la probabilité pour que le pilote ait recouru à l'indicateur d'alignement et de descente.

Solution. Si le pilote a utilisé l'indicateur d'alignement et de descente, le ciel était donc bas (hypothèse H_2). D'après les données du problème 3.26 on trouve

$$P(H_2 | A) = \frac{\frac{k}{100}[Pp_1 + (1-P) p_1^*]}{\left(1 - \frac{k}{100}\right) p_1 + \frac{k}{100}\Big] [Pp_1 + (1-P) p_1^*]}.$$

3.30. Un pêcheur connaît trois lieux préférés qu'il visite chacun avec la même probabilité. S'il lance la ligne au premier emplacement, le poisson mord avec une probabilité p_1; au deuxième, avec une probabilité p_2, et au troisième, avec une probabilité p_3. On sait que pendant la pêche il a lancé trois fois la ligne, alors que le poisson a mordu seulement une fois. Trouver la probabilité pour qu'il ait pêché au premier emplacement.

Réponse. $P(H_1 | A) = [p_1 (1-p_1)^2] \Big/ \sum_{i=1}^{3} p_i (1-p_i)^2$.

3.31. Une entreprise produit des articles dont chacun a un défaut avec une probabilité p. A l'atelier l'article est revisé par l'un des deux contrôleurs avec la même probabilité. Le premier découvre le défaut existant avec une probabilité p_1, le deuxième, avec une probabilité p_2. Si l'article n'est pas rebuté à l'atelier, il est revisé par la Section de contrôle technique de l'usine, où le défaut est révélé avec une probabilité p_3. On sait que l'article est rebuté. Trouver la probabilité pour qu'il soit rebuté 1) par le premier contrôleur; 2) par le deuxième contrôleur; 3) par la Section de contrôle technique de l'entreprise.

Solution. *A priori* quatre hypothèses sont possibles:

H_0 = {l'article n'est pas rebuté};
H_1 = {l'article est rebuté par le premier contrôleur};
H_2 = {l'article est rebuté par le deuxième contrôleur};

H_3 = {l'article est rebuté par le Service de contrôle de l'usine}.

L'événement observé A = {l'article est rebuté}. Nous n'avons pas besoin de l'hypothèse H_0, puisque $P(A \mid H_0) = 0$; il vient

$$P(H_1) = pp_1/2; \quad P(H_2) = pp_2/2;$$
$$P(H_3) = p\,[1 - (p_1 + p_2)/2]\,p_3.$$

Probabilités des hypothèses *a posteriori*:

$$P(H_1|A) = \frac{p_1}{2p_3 + (p_1 + p_2)(1 - p_3)}; \quad P(H_2|A) = \frac{p^2}{2p_3 + (p_1 + p_2)(1 - p_3)};$$
$$P(H_3|A) = p_3\,[2 - (p_1 + p_2)]/[2p_3 + (p_1 + p_2)(1 - p_3)].$$

3.32. Des 10 étudiants qui se sont présentés aux examens, 3 sont préparés très bien, 4, bien, 2, passablement et un étudiant est mal préparé. Les billets d'examen comptent 20 questions. Un étudiant à préparation parfaite peut répondre à toutes les 20 questions, un étudiant bien préparé, à 16, un étudiant à préparation passable, à 10, et un étudiant mal préparé, à 5. Un étudiant interrogé a répondu à trois questions posées au hasard. Trouver la probabilité pour que la préparation de cet étudiant soit 1) parfaite; 2) mauvaise.

Solution. Hypothèses:

H_1 = {la préparation de l'étudiant est parfaite};
H_2 = {la préparation de l'étudiant est bonne};
H_3 = {la préparation de l'étudiant est passable};
H_4 = {la préparation de l'étudiant est mauvaise}.

A priori: $P(H_1) = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}4$; $P(H_3) = 0{,}2$; $P(H_4) = 0{,}1$.

Evénement A = {l'étudiant a répondu à trois questions}.

$$P(A|H_1) = 1; \quad P(A|H_2) = \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18} \approx 0{,}491;$$

$$P(A|H_3) = \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18} \approx 0{,}105; \quad P(A|H_4) = \frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18} \approx 0{,}009.$$

A posteriori:

1) $P(H_1|A) = \dfrac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1 + 0{,}4\cdot 0{,}491 + 0{,}2\cdot 0{,}105 + 0{,}1\cdot 0{,}009} \approx 0{,}58$;

2) $P(H_4|A) = 0{,}1\cdot 0{,}009/0{,}518 \approx 0{,}002$.

3.33. Un poste radar enregistre à l'entrée avec une probabilité p un signal utile entaché d'un bruit, et avec une probabilité $1 - p$ le bruit tout seul. Si le signal utile est perçu avec un bruit, le poste enregistre la présence d'un certain signal avec une probabilité p_1, s'il perçoit seulement le bruit, cette probabilité est égale à p_2. On sait que le poste a enregistré un certain signal. Trouver la probabilité qu'il comporte le signal utile.

Réponse. $pp_1/[pp_1 + (1 - p)\,p_2]$.

3.34. Un voyageur peut acquérir le billet à l'une des trois caisses. Les probabilités de s'adresser à l'une d'elles dépendent de leur emplacement et sont respectivement égales à p_1, p_2, p_3. La probabilité pour qu'à l'instant où le voyageur se présente les billets soient tous vendus est égale pour la première caisse à P_1, pour la deuxième, à P_2, pour la troisième, à P_3. Le voyageur s'est adressé à l'une des caisses et a acquis le billet. Trouver la probabilité que ce soit la première caisse.

Solution. $P(H_1) = p_1$; $P(H_2) = p_2$; $P(H_3) = p_3$; $A = \{\text{billet acquis}\}$.

$$P(A|H_1) = 1 - P_1; \quad P(A|H_2) = 1 - P_2; \quad P(A|H_3) = 1 - P_3;$$

$$P(H_1|A) = \frac{p_1(1-P_1)}{p_1(1-P_1)+p_2(1-P_2)+p_3(1-P_3)}.$$

3.35. On tire un coup sur un plan qui porte deux cibles I et II (fig. 3.35). La probabilité d'atteindre la cible I est p_1, la cible II, p_2. Après le coup on a été informé que la cible I n'a pas été atteinte. Quelle est alors la probabilité pour que le coup ait frappé la cible II?

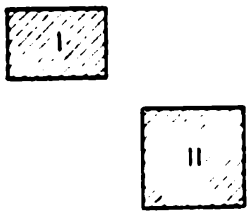


Fig. 3.35

Solution. Hypothèses:

$H_1 = \{\text{atteinte de la cible I}\}$;

$H_2 = \{\text{atteinte de la cible II}\}$;

$H_3 = \{\text{aucune cible n'a été touchée}\}$.

Evénement $A = \{\text{cible I non atteinte}\}$;

$$P(H_1) = p_1; \quad P(H_2) = p_2; \quad P(H_3) = 1 - (p_1 + p_2).$$

$$P(A \mid H_1) = 0; \quad P(A \mid H_2) = 1; \quad P(A \mid H_3) = 1.$$

D'après la formule de Bayes

$$P(H_2|A) = p_2/[p_2 + 1 - (p_1 + p_2)] = p_2/(1 - p_1).$$

Ce problème peut également être résolu sans recourir à la formule de Bayes

$$P(H_2|A) = P(H_2A)/P(A) = P(H_2)/P(A) = p_2/(1 - p_1).$$

3.36. La transmission des signaux a lieu avec des probabilités Q_1, Q_2, Q_3 sous l'un des trois régimes R_1, R_2, R_3; sous chacun des trois régimes le signal atteint le destinataire sans être perturbé par les bruits avec des probabilités p_1, p_2, p_3 respectivement. La transmission de trois signaux a eu lieu sous l'un des trois régimes (on ne sait pas sous lequel); l'un de ces signaux a été perturbé par des bruits, les deux autres ne l'ont pas été. Trouver les probabilités *a posteriori* pour que la transmission ait lieu sous le premier, le deuxième et le troisième régimes.

Solution. Hypothèses:
H_1 = {régime R_1};
H_2 = {régime R_2};
H_3 = {régime R_3}.
Probabilités *a priori*: $P(H_1) = Q_1$; $P(H_2) = Q_2$; $P(H_3) = Q_3$.
Evénement A = {un signal est perturbé, les autres ne le sont pas}.

$$P(A|H_i) = 3p_i^2(1-p_i) \quad (i=1,\ 2,\ 3);$$

$$P(H_i|A) = Q_i p_i^2(1-p_i) \Big/ \sum_{j=1}^{3} Q_j p_j^2(1-p_j) \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

3.37. On mène une enquête sur les causes d'une catastrophe d'aviation sur lesquelles on peut faire quatre hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4. D'après la statistique $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}4$; $P(H_3) = 0{,}3$; $P(H_4) = 0{,}1$. On a établi qu'au cours de la catastrophe a eu lieu l'événement A = {inflammation du combustible}. D'après cette même statistique, sous les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4, les probabilités conditionnelles de l'événement A sont $P(A \mid H_1) = 0{,}9$; $P(A \mid H_2) = 0$; $P(A \mid H_3) = 0{,}2$ et $P(A \mid H_4) = 0{,}3$. Trouver les probabilités *a posteriori* des hypothèses.

Réponse. $P(H_1 \mid A) = 2/3$; $P(H_2 \mid A) = 0$; $P(H_3 \mid A) = 2/9$; $P(H_4 \mid A) = 1/9$.

3.38. L'objet dont on poursuit l'observation peut se trouver en l'un de deux états: H_1 et H_2; les probabilités *a priori* de ces états sont: $P(H_1) = 0{,}3$ et $P(H_2) = 0{,}7$. Il existe deux sources d'information qui apportent des renseignements contradictoires sur l'état de l'objet; la première informe que l'objet se trouve à l'état H_1, la deuxième, à l'état H_2. Les renseignements fournis par la première source sont en général corrects dans 90 % de cas et faux dans 10 %. La deuxième source est moins sûre: elle communique des renseignements corrects dans 70 % de cas et trompe dans 30 %. Analyser les rapports pour trouver les nouvelles probabilités (*a posteriori*) des états H_1 et H_2.

Solution. Evénement A = {la première source communique H_1, la deuxième: H_2}. Sous les hypothèses H_1, H_2, les probabilités conditionnelles de cet événement valent:

$P(A \mid H_1)$ = P {la première source a fourni un renseignement correct, la deuxième s'est trompée} $= 0{,}9 \times 0{,}3 = 0{,}27$.

$P(A \mid H_2)$ = P {la première source s'est trompée, la deuxième a fourni un renseignement correct} $= 0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}07$.

D'après la formule de Bayes:

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}27}{0{,}3 \cdot 0{,}27 + 0{,}7 \cdot 0{,}07} \approx 0{,}623;$$

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A) \approx 0{,}377.$$

3.39. Même énoncé, mais les sources d'information également dignes de confiance sont au nombre de trois et fournissent des renseignements corrects dans 70 % des cas, et erronnés dans 30 % des cas. Deux sources ont communiqué que l'objet se trouve à l'état H_1, et une, à l'état H_2. Trouver les probabilités *a posteriori* des états H_1 et H_2.

Solution. A = {les première et deuxième sources ont communiqué H_1, la troisième, H_2}.

$$P(A|H_1) = 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}147\,; \quad P(A|H_2) = 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}063\,;$$

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}3\cdot 0{,}147}{0{,}3\cdot 0{,}147 + 0{,}7\cdot 0{,}063} = 0{,}5\,; \quad P(H_2|A) = 0{,}5,$$

c'est-à-dire que les deux hypothèses *a posteriori* sont équiprobables.

3.40. Avant l'expérience on a pu faire n hypothèses incompatibles sur ses conditions, qui forment un groupe complet $H_1, H_2, \ldots, H_n$, à probabilités *a priori* $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Le résultat de l'épreuve a rendu clair qu'une seule des hypothèses du groupe $H_1, \ldots, H_k$ a eu lieu, alors que les autres hypothèses sont impossibles: $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$; $H_{k+1} + \ldots + H_n = \varnothing$. Trouver les probabilités *a posteriori* des hypothèses.

Solution. L'événement observé dans l'expérience: $A = \sum_{i=1}^{k} H_i$. D'après la formule de Bayes, on obtient

$$P(H_i|A) = P(H_i) \Big/ \sum_{i=1}^{k} P(H_i) \quad (i = 1, \ldots, k),$$

c'est-à-dire que *si à l'issue d'une épreuve il s'est avéré que seule une partie des hypothèses $H_1, \ldots, H_k$ est possible, alors que les autres ne le sont pas, pour obtenir les probabilités a posteriori chacune des probabilités a priori $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ doit être divisée par leur somme.*

3.41. Un appareil composé de deux ensembles I et II est mis à l'essai. Les fiabilités (probabilités de fonctionnement sans défaillance pendant un temps τ) des ensembles I et II sont connues: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$. Les ensembles tombent en panne indépendamment l'un de l'autre. Après le temps τ il s'est avéré que l'appareil est défectueux. Compte tenu de ce fait trouver les probabilités des hypothèses:

H_1 = {seul le premier ensemble est en panne};
H_2 = {seul le deuxième ensemble est en panne};
H_3 = {les deux ensembles sont en panne}.

Solution. Avant l'épreuve il était possible d'avancer non pas trois, mais quatre hypothèses, y compris H_0 = {les deux ensembles sont en bon état}. L'épreuve a montré qu'a lieu l'une des hypothèses

H_1, H_2, H_3; $A = H_1 + H_2 + H_3$. Les probabilités *a priori* de ces hypothèses

$$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18; \quad P(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08;$$

$$P(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02; \quad \sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 0{,}28.$$

Les probabilités *a posteriori* des hypothèses

$$P(H_1|A) = 0{,}18/0{,}28 \approx 0{,}643; \; P(H_2|A) \approx 0{,}286; \; P(H_3|A) \approx 0{,}071.$$

3.42. L'appareil dont les caractéristiques sont données par l'énoncé 3.41 est mis à l'essai pendant un temps τ pour établir qu'il est défectueux. Avant la localisation de la défaillance il est soumis à trois tests T_1, T_2, T_3; les résultats des deux premiers tests sont positifs, et du troisième, négatif, c'est-à-dire le testage a donné lieu à l'événement $B = \{++-\}$, où « + » traduit le résultat positif du test et « — », le résultat négatif. On connaît les probabilités conditionnelles du résultat positif des tests T_1, T_2, T_3 sous des hypothèses H_1, H_2, H_3; notons-les par p_{ij}, où i est le numéro du test, et j, le numéro de l'hypothèse: $p_{11} = 0{,}4$; $p_{12} = 0{,}6$; $p_{13} = 0{,}9$; $p_{21} = 0{,}5$; $p_{22} = 0{,}4$; $p_{23} = 0{,}6$; $p_{31} = 0{,}7$; $p_{32} = 0{,}6$; $p_{33} = 0{,}3$. Les résultats des tests sont indépendants.

Indiquer l'état le plus probable des états possibles de l'appareil; à cet effet calculer les probabilités *a posteriori* des hypothèses sous la condition que l'épreuve ait abouti aux événements A et B ($A = \{\text{appareil défectueux}\} = H_1 + H_2 + H_3$).

Solution. Pour tenir compte du résultat du testage retenir comme probabilité *a priori* les données du problème 3.41 :

$$P(H_1 \mid A) = 0{,}643; \quad P(H_2 \mid A) = 0{,}286; \quad P(H_3 \mid A) = 0{,}071.$$

Calculons sous ces hypothèses les probabilités conditionnelles de l'événement B

$$P(B \mid H_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}024;$$
$$P(B \mid H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}120;$$
$$P(B \mid H_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}294.$$

D'après la formule de Bayes

$$P(H_1|A \cdot B) = \frac{0{,}643 \cdot 0{,}024}{0{,}643 \cdot 0{,}024 + 0{,}286 \cdot 0{,}120 + 0{,}071 \cdot 0{,}294} \approx 0{,}298;$$

$$P(H_2|A \cdot B) \approx 0{,}662; \quad P(H_3|A \cdot B) \approx 0{,}040.$$

L'état le plus probable de l'appareil est $H_2 = \{$seul deuxième ensemble tombé en panne$\}$.

3.43. Pour monter un appareil on sélectionne un jeu de n pièces; tel ou tel nombre de ces dernières peuvent s'avérer défectueuses. Les

pièces sont fabriquées par les usines I et II ; d'après la statistique, la probabilité d'un défaut dans les produits de l'usine I est p_1, de l'usine II, p_2. L'appareil est monté de pièces fournies par la même usine ; au laboratoire où l'appareil est monté il y a trois caisses qui contiennent les pièces, deux d'entre elles contiennent les pièces de l'usine I, et une, de l'usine II ; la caisse dont on tire les pièces pour le montage est choisie au hasard. Après le montage l'appareil est soumis au contrôle : si parmi les n pièces on découvre pas moins de m pièces défectueuses, l'appareil est rebuté et on envoie une réclamation à l'usine productrice. Il s'est avéré au contrôle que l'appareil est rebuté. Trouver la probabilité pour que la réclamation soit adressée à l'usine I.

Solution. Hypothèses :

H_1 = {l'appareil est monté de pièces fabriquées par l'usine I}.

H_2 = {l'appareil est monté de pièces fabriquées par l'usine II}.

Probabilités *a priori* : $P(H_1) = 2/3$; $P(H_2) = 1/3$.

Evénement apparu A = {appareil rebuté} = {pas moins de m des n pièces sont défectueuses}.

$$P(A|H_1) = \sum_{i=m}^{n} p_1^i (1-p_1)^{n-i}; \quad P(A|H_2) = \sum_{i=m}^{n} p_2^i (1-p_2)^{n-i}.$$

D'après la formule de Bayes, les probabilités *a posteriori* sont :

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{2}{3}\sum_{i=m}^{n} p_1^i (1-p_1)^{n-i}}{\frac{2}{3}\sum_{i=m}^{n} p_1^i (1-p_1)^{n-i} + \frac{1}{3}\sum_{i=m}^{n} p_2^i (1-p_2)^{n-i}};$$

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A).$$

3.44. Soient deux caisses de pièces de même type ; la première contient a pièces en bon état et b défectueuses ; la deuxième, c en bon état et d défectueuses. On choisit au hasard une caisse pour en tirer une pièce. Cette pièce s'est avérée être en bon état. Trouver la probabilité pour que la pièce suivante tirée de la même caisse soit également en bon état.

Solution. Hypothèses :

H_1 = {choix de la première caisse} ;

H_2 = {choix de la deuxième caisse}.

Evénement A = {pièce en bon état au premier tirage}.

$$P(H_1) = P(H_2) = 1/2; \quad P(H_1|A) = \left(\frac{a}{a+b}\right) \Big/ \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right);$$

$$P(H_2|A) = \left(\frac{c}{c+d}\right) \Big/ \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right).$$

Evénement B = {pièce en bon état au deuxième tirage}.

$$P(B \mid A) = P(H_1 \mid A)\, P(B \mid H_1A) + P(H_2 \mid A)\, P(B \mid H_2A).$$

La probabilité conditionnelle de l'apparition d'une deuxième pièce en bon état sous la condition qu'on ait choisi la première caisse et on en ait tiré une pièce en bon état est égale à

$$P(B \mid H_1A) = (a-1)/(a+b-1);$$

d'une façon analogue $P(B \mid H_2A) = (c-1)/(c+d-1)$. On en tire la probabilité cherchée

$$P(B|A) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right)^{-1} \left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right].$$

3.45. Soient trois voies de communication entre lesquelles les messages sont répartis au hasard avec la même probabilité. La probabilité de la perturbation du message transmis par la première voie est égale à p_1, par la deuxième, à p_2, par la troisième, à p_3. On choisit une voie quelconque et on transmet par elle k messages; aucun d'entre eux n'a été perturbé. Trouver la probabilité pour que le $(k+1)$-ième message transmis par la même voie ne soit pas perturbé.

Solution. Hypothèses:

H_1 = {messages transmis par la première voie};
H_2 = {messages transmis par la deuxième voie};
H_3 = {messages transmis par la troisième voie}.

$$P(A|H_1) = (1-p_1)^k; \quad P(A|H_2) = (1-p_2)^k; \quad P(A|H_3) = (1-p_3)^k;$$

$$P(H_i|A) = \frac{{}^1/_3\,(1-p_i)^k}{{}^1/_3\,[(1-p_1)^k + (1-p_2)^k + (1-p_3)^k]} =$$

$$= \frac{(1-p_i)^k}{(1-p_1)^k + (1-p_2)^k + (1-p_3)^k} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Evénement A = {k messages non perturbés};
B = {$(k+1)$-ième message non perturbé}.

$$P(B|A) = \frac{(1-p_1)^{k+1} + (1-p_2)^{k+1} + (1-p_3)^{k+1}}{(1-p_1)^k + (1-p_2)^k + (1-p_3)^k}.$$

3.46. Soient m lots de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ pièces respectivement. L'i-ième lot compte n_i pièces défectueuses et $N_i - n_i$ pièces en bon état ($i = 1, 2, \ldots, m$). On choisit au hasard un lot et on en tire pour le contrôle k pièces; toutes elles se sont avérées être en bon état. Trouver la probabilité pour que les pièces suivantes tirées du même lot, soient aussi en bon état.

Solution. Les hypothèses $H_1, H_2, \ldots, H_m$, où H_i = {le choix porte sur l'i-ième lot} sont équiprobables *a priori* $P(H_i) = 1/m$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

La probabilité conditionnelle de l'événement observé $A = \{$toutes les k pièces contrôlées sont en bon état$\}$ sous l'hypothèse H_i est égale à

$$P(A|H_i) = C^k_{N_i - n_i} / C^k_{N_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3.46.1)$$

D'après la formule de Bayes les probabilités *a posteriori* des hypothèses

$$P(H_i|A) = P(A|H_i) \Big/ \sum_{i=1}^{m} P(A|H_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3.46.2)$$

La probabilité de l'événement $B = \{$les l pièces suivantes tirées du même lot seront de bonne qualité$\}$ se calcule d'après la formule des probabilités totales avec les probabilités *a posteriori* des hypothèses (3.46.2)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(H_i|A) P(B|H_i A),$$

où $$P(B|H_i A) = \frac{N_i - n_i - k}{N_i - k} \frac{N_i - n_i - k - 1}{N_i - k - 1} \cdots$$

$$\cdots \frac{N_i - n_i - k - l + 1}{N_i - k - l + 1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3.46.3)$$

Note. Les formules (3.46.1) et (3.46.3) ne sont valables que sous les conditions $k < N_i - n_i$; $l < N_i - n_i - k$; si ces dernières ne sont pas remplies, les probabilités correspondantes sont nulles.

CHAPITRE IV

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

4.0. Une des notions les plus importantes (fondamentales) de la théorie des probabilités est celle de *variable aléatoire*. Par ce terme (en abrégé v.a.) on entend une grandeur qui à la suite d'une épreuve à issue aléatoire prend telle ou telle valeur.

Exemples. 1) Epreuve: trois coups tirés sur la cible; variable aléatoire: nombre d'atteintes. 2) Epreuve: exploitation d'un ordinateur; variable aléatoire: durée de service jusqu'à la première défaillance. 3) Epreuve: un jour de travail d'un atelier d'usine; variable aléatoire: nombre d'articles rebutés par le Service de contrôle technique.

Suivant l'interprétation ensembliste que nous avons adoptée, une variable aléatoire X est une fonction d'un événement élémentaire ω:

$$X = \varphi(\omega),$$

où $\omega \in \Omega$. La valeur de cette fonction dépend de l'événement élémentaire ω apparu à la suite de l'épreuve.

Exemple. Epreuve: jet d'un dé; v.a. X: nombre double des points sortis. Espace des événements élémentaires $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si l'événement élémentaire apparu est $\omega = \{2 \text{ points}\}$, la valeur de la v.a. X est 4. Les valeurs possibles de la v.a. X: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 6$; $x_4 = 8$; $x_5 = 10$; $x_6 = 12$.

Dans ce qui suit nous désignerons surtout les variables aléatoires par des majuscules, et celles qui ne le sont pas, par des minuscules. *

Les variables aléatoires se distinguent par le caractère de l'ensemble de leurs valeurs éventuelles.

Une variable aléatoire est dite *discrète* si l'ensemble de ses valeurs éventuelles est fini ou dénombrable.

Exemples des v.a. discrètes. 1) Epreuve: 3 coups tirés sur la cible ; v.a. X : nombre d'atteintes. Ses valeurs éventuelles

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

2) Epreuve: cinq jets d'une pièce de monnaie; v.a. Y: fréquence de pile. Valeurs éventuelles

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{1}{5}; \quad y_3 = \frac{2}{5}; \quad y_4 = \frac{3}{5}; \quad y_5 = \frac{4}{5}; \quad y_6 = 1.$$

3) Epreuve: tir à la cible jusqu'au premier coup réussi; v.a. Z: nombre de coups qu'il faut tirer. Valeurs éventuelles $z_1 = 1$; $z_2 = 2$; $z_3 = 3$; ...; $z_n = n$, ... Leur nombre est infini mais dénombrable.

Les valeurs d'une v.a. discrète sont séparées l'une de l'autre par des intervalles.

---

* L'écriture des valeurs des variables aléatoires sur les figures diffère un peu de celle adoptée dans le texte.

A la différence des v.a. discrètes, les v.a. continues sont caractérisées par le fait que l'ensemble de leurs valeurs éventuelles est innombrable, impossible à numéroter; elles couvrent en entier ou en partie un segment de l'axe numérique.

Exemples des v.a. continues. 1) Epreuve : fonctionnement d'un ordinateur jusqu'à la première panne; v.a. T : durée du service sans défaillance. Les valeurs éventuelles d'une v.a. T couvrent d'une façon continue la partie non négative de l'axe Ot (théoriquement, de 0 à ∞). 2) Epreuve : pesée d'un corps sur une balance analytique; v.a. V : erreur de pesée. Les valeurs possibles de la v.a. V peuvent être aussi bien positives que négatives et couvrent totalement une certaine partie de l'axe, aussi bien à droite qu'à gauche de O.

On appelle *loi de répartition* d'une variable aléatoire une règle quelconque (tableau, fonction) qui permet de trouver la probabilité des événements de toute sorte associés à une variable aléatoire (par exemple, la probabilité pour qu'elle prenne une certaine valeur, ou se trouve bornée par certaines limites). Si la v.a. X possède la loi de répartition donnée, on dit qu'elle est « répartie d'après cette loi », qu'elle « suit cette loi de répartition », ou encore « obéit à cette loi de répartition ».

La forme la plus simple de la loi de répartition est le tableau ou suite de répartition applicable seulement aux variables aléatoires discrètes. La suite de répartition est un tableau dont la ligne supérieure dénombre toutes les valeurs possibles de la v.a. X : $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ dans l'ordre croissant, et la ligne inférieure, les probabilités pour la v.a. de prendre la valeur donnée. Le tableau de répartition d'une variable aléatoire s'écrit

$$X: \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots \\ \hline p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots \\ \hline \end{array},$$

où $p_i = \mathrm{P}\{X = x_i\}$. Il est évident que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, comme la somme des probabilités d'un groupe complet des événements incompatibles.

Exemple. L'épreuve consiste à jeter trois fois une pièce de monnaie; v.a. X : le nombre d'apparitions de pile. Valeurs possibles de la v.a. X : $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Les probabilités qui leur correspondent se trouvent d'après le théorème des probabilités totales et le théorème des probabilités composées (ou d'après la formule (2.0.20)) :

$$p_1 = \mathrm{P}\{X = 0\} = 0{,}5^3 = 0{,}125;$$
$$p_2 = \mathrm{P}\{X = 1\} = C_3^1 0{,}5^1 (1 - 0{,}5)^2 = 3 \cdot 0{,}125 = 0{,}375;$$

$p_3 = \mathrm{P}\{X = 2\} = (C_3^1 0{,}5^2 (1 - 0{,}5)^1 = 0{,}375$; $p_4 = 1 - \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 = 0{,}125$. Le tableau de répartition de la v.a. X est de la forme

$$X: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}125 & 0{,}375 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ \hline \end{array}. \qquad (4.0.1)$$

La représentation graphique d'un tableau de répartition s'appelle *polygone de répartition* ; pour le construire on porte en abscisses les valeurs possibles de la v.a., alors que leurs probabilités sont matérialisées par des segments parallèles

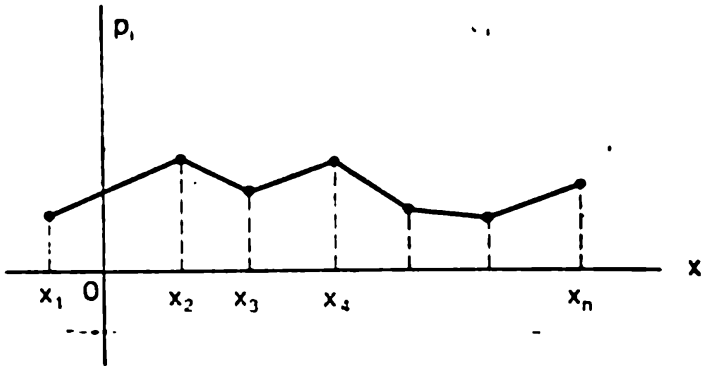


Fig. 4.0.1

à l'axe des ordonnées (fig. 4.0.1). A titre d'illustration, et ce n'est qu'à cet effet, les extrémités de ces segments sont reliées par des segments de droites. La somme de toutes les ordonnées du polygone de répartition est égale à l'unité. Le polygone de répartition d'une v.a. X à tableau de répartition (4.0.1) est représenté par la figure 4.0.2.

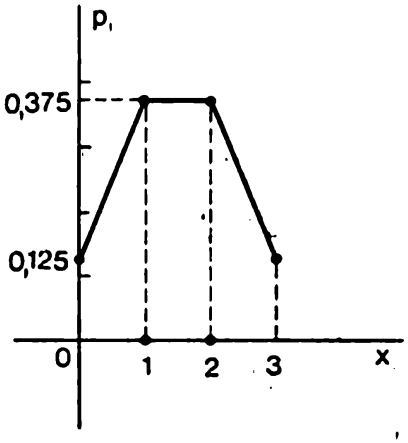


Fig. 4.0.2

En plus de l'interprétation géométrique de la loi de répartition d'une v.a. discrète, il est parfois commode de recourir à son *interprétation mécanique*. Elle consiste en ce que les points $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ de l'axe des abscisses associés aux valeurs possibles de la v.a. X sont représentés comme des points matériels C de masses respectives $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, dont la somme donne l'unité.

Pour une v.a. continue le tableau de répartition ne peut être établi ne serait-ce que du fait que dans sa ligne supérieure il est impossible de dénombrer les valeurs éventuelles de la variable aléatoire (leur ensemble n'étant pas dénombrable).

La forme la plus universelle de la loi de répartition applicable aux variables aléatoires aussi bien discrètes que continues, est la *fonction de répartition* qui constitue la probabilité pour la v.a. X de prendre une valeur plus petite que la valeur x donnée :

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x) \tag{4.0.2}$$

La fonction de répartition $F(x)$ de toute variable aléatoire possède les propriétés : 1) $F(-\infty) = 0$; 2) $F(+\infty) = 1$; 3) avec la croissance de x la fonction $F(x)$ ne décroît pas.

La fonction de répartition $F(x)$ d'une v.a. discrète est une fonction discontinue en escalier (fig. 4.0.3), dont les sauts correspondent aux valeurs possibles de la v.a. : $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, et d'après leurs valeurs sont égales aux probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ de ces valeurs ; entre les sauts, la fonction de répartition $F(x)$ garde sa valeur constante. Au point de discontinuité la

fonction $F(x)$ a la valeur qu'elle possède en s'approchant du point de discontinuité de gauche, c'est-à-dire que la fonction $F(x)$ est *continue à gauche*; cela signifie qu'en s'approchant *de gauche* d'un point elle ne subit pas de discontinuité, alors qu'elle la subit si elle s'en approche *de droite*. Sur le graphique de la fonction de répartition nous marquerons les valeurs de $F(x)$ aux points de discontinuité par des points gras (voir fig. 4.0.3). La valeur du saut de la fonction de répartition $F(x_i)$ est égale à la probabilité p_i pour que la variable aléatoire prenne la valeur x_i.

Connaissant la valeur de la v.a. X on peut trouver la probabilité de n'importe quels événements qui lui sont associés; en particulier, celle pour que la

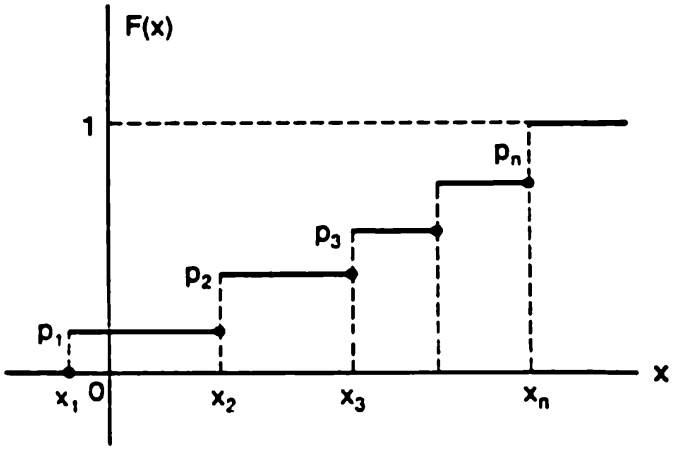


Fig. 4.0.3

v.a. X prenne une valeur qui repose dans un certain intervalle de α à β (bref, la probabilité pour que la v.a. X «tombe» dans l'intervalle compris entre α et β). Convenons d'inclure dans l'intervalle l'extrémité gauche α et en exclure l'extrémité droite β. La probabilité pour que la v.a. X tombe dans l'intervalle de α à β (α inclus) s'exprime par la fonction de répartition à l'aide de la formule

$$P(\alpha \leqslant X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha), \tag{4.0.3}$$

c'est-à-dire que *la probabilité pour la v.a. de tomber dans l'intervalle est égale à l'accroissement de sa fonction de répartition sur cet intervalle.* (Avec d'autres notations la formule (4.0.3) peut se récrire sous la forme

$$P\{X \in [\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha), \tag{4.0.4}$$

où le crochet signifie que le point α est inclus dans l'intervalle de α à β, alors que la parenthèse désigne que le point β en est exclu.

En théorie des probabilités, outre la loi de répartition, caractéristique exhaustive des v.a., on emploie également leurs *caractéristiques numériques*, dont la destination est de décrire sous une forme condensée telles ou telles particularités de la répartition. La plus importante parmi elles est l'espérance mathématique (valeur moyenne) de la variable aléatoire.

On appelle *espérance mathématique* d'une variable aléatoire discrète la somme des produits de toutes ses valeurs possibles x_i par les probabilités attachées à ces valeurs $p_i = P = \{X = x_i\}$:

$$M[X] = \sum_i x_i p_i. \tag{4.0.5}$$

Si le nombre de valeurs éventuelles d'une v.a. X discrète est infini (dénombrable), il se peut aussi que l'espérance mathématique n'existe pas, c'est-

à-dire que la somme (4.0.5) soit divergente. Pour les v.a. discrètes, à ensemble fini des valeurs éventuelles, l'espérance mathématique existe toujours.

Dans plusieurs cas il est commode de noter l'espérance mathématique M $[X]$ par une seule lettre ; nous écrirons alors m_x, où l'indice montre la variable aléatoire à laquelle se rapporte l'espérance mathématique

$$\mathrm{M}\,[X] = m_x.$$

Dans l'interprétation mécanique l'espérance mathématique (4.0.5) n'est rien d'autre que l'*abscisse du centre de masse* (de gravité) du système de points matériels $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ de masses $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$

On appelle *variable aléatoire centrée* et on note $\mathring{X}$ la différence entre la v.a. X et son espérance mathématique m_x:

$$\mathring{X} = X - m_x. \tag{4.0.6}$$

La caractéristique numérique, deuxième suivant l'ordre de l'importance, est la variance qui détermine le degré de dispersion de la v.a. autour de sa valeur moyenne.

On appelle *variance* d'une v.a. X l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée correspondante

$$\mathrm{D}\,[X] = \mathrm{M}\,[\mathring{X}^2]. \tag{4.0.7}$$

Pour une variable aléatoire discrète X la variance se calcule d'après la formule

$$\mathrm{D}\,[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i. \tag{4.0.8}$$

Dans l'interprétation mécanique la variance n'est rien d'autre que le *moment d'inertie* de la répartition des masses par rapport au centre de masse.

Dans le cas où la variance doit être notée par une lettre nous écrirons D_x.

La variance a la dimension du carré de la v.a., ce qui n'est pas toujours commode. Pour obtenir la caractéristique de la variance, ayant la même dimension que la v.a., on extrait de la variance la racine carrée. Cette racine, qui porte le nom d'*écart quadratique moyen*, ou d'écart-type, ou encore de déviation standart de la v.a. X, est notée par la lettre σ:

$$\sigma\,[X] = \sigma_x = \sqrt{D_x} \tag{4.0.9}$$

(on a en vue la valeur arithmétique, c'est-à-dire positive, de la racine).

En plus de l'espérance mathématique et de la variance, on emploie souvent des *moments* de divers ordres, dits initiaux et centrés.

On appelle *moment initial* d'ordre k d'une variable aléatoire X l'espérance mathématique de k-ième degré de cette v.a.

$$\alpha_k\,[X] = \mathrm{M}\,[X^k]. \tag{4.0.10}$$

Pour une v.a. X discrète le moment initial d'ordre k se calcule d'après la formule

$$\alpha_k\,[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i. \tag{4.0.11}$$

Le *moment centré* d'ordre k d'une variable aléatoire X est l'espérance mathématique de k-ième degré de la variable centrée correspondante

$$\mu_k\,[X] = \mathrm{M}\,[\mathring{X}^k]. \tag{4.0.12}$$

Pour une v.a. X discrète le moment centré d'ordre k se calcule d'après la formule

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k. \tag{4.0.13}$$

L'interprétation mécanique des moments centraux et initiaux est donnée par les moments de divers ordres de la répartition des masses par rapport à l'origine des coordonnées et au centre de gravité.

Notons que pour toute v.a. le moment centré d'ordre 1 est nul:

$$\mu_1[X] = \mathrm{M}[\mathring{X}^1] = \mathrm{M}[X - m_x] = 0. \tag{4.0.14}$$

L'espérance mathématique d'une v.a. X n'est rien d'autre que son moment initial d'ordre 1

$$\mathrm{M}[X] = \alpha_1[X], \tag{4.0.15}$$

et la variance, son moment centré d'ordre 2

$$\mathrm{D}[X] = \mu_2[X]. \tag{4.0.16}$$

Les moments centrés sont exprimés à l'aide des moments initiaux par les formules

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2[X] = \alpha_2[X] - m_x^2; \\ \mu_3[X] = \alpha_3[X] - 3m_x\alpha_2[X] + 2m_x^3. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{4.0.17}$$

La première de ces formules est particulièrement importante; elle exprime la variance d'une v.a. par son moment initial d'ordre 2

$$\mathrm{D}[X] = \alpha_2[X] - m_x^2, \tag{4.0.18}$$

ou, avec d'autres notations,

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[X^2] - (\mathrm{M}[X])^2, \tag{4.0.19}$$

c'est-à-dire *la variance est égale à l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire moins le carré de son espérance mathématique.*

Dans ce qui suit nous recourrons souvent à cette expression de la variance à l'aide de son moment initial d'ordre 2.

Pour les applications pratiques de la théorie des probabilités en passant du système d'événements au système de variables aléatoires un rôle important revient à l'indicatrice de l'événement.

On appelle *variable indicatrice* de l'événement A la variable aléatoire U qui, dans l'épreuve considérée, possède deux valeurs éventuelles: 0 ou 1; elle est égale à 0 si l'événement A n'a pas eu lieu, et à 1, si l'événement s'est produit:

$$U = \left\{\begin{array}{ll} 0: & \text{l'événement } A \text{ n'a pas eu lieu} \\ 1: & \text{l'événement s'est produit} \end{array}\right\}, \tag{4.0.20}$$

ou, si on emploie le symbole de l'événement élémentaire ω et de l'événement A en tant qu'un ensemble:

$$U = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ pour } \omega \bar{\in} A \\ 1 \text{ pour } \omega \in A \end{array}\right\}. \tag{4.0.21}$$

Le tableau de répartition de la variable indicatrice U de l'événement A est de la forme

$$U: \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array} \right|,$$

où $p = \mathrm{P}(A)$ est la probabilité de A dans l'épreuve considérée; $q = 1 - p$.

L'espérance mathématique de la v.a. U est égale à

$$\mathrm{M}[U] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

La variance se calcule à l'aide du moment initial d'ordre 2

$$\alpha_2[U] = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p,$$

d'où

$$\mathrm{D}[U] = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

De la sorte, l'espérance mathématique de l'indicatrice d'un événement est égale à la probabilité de ce dernier, alors que sa variance, au produit de la probabilité de sa réalisation par la probabilité de la non-réalisation:

$$\mathrm{M}[U] = p; \quad \mathrm{D}[U] = pq. \tag{4.0.22}$$

Dans plusieurs problèmes de la théorie des probabilités l'utilisation de l'indicatrice des événements simplifie sensiblement la solution (voir chapitre VII).

Pour le calcul des caractéristiques numériques des variables aléatoires dans les expériences dont les conditions ne sont pas connues à l'avance (aléatoires), il est commode d'employer la formule de l'espérance mathématique totale déduite de la formule des probabilités totales. Plus exactement: *si on peut émettre sur les conditions de l'épreuve n hypothèses incompatibles $H_1, H_2, \ldots, H_n$ à probabilités $\mathrm{P}(H_1), \mathrm{P}(H_2), \ldots, \mathrm{P}(H_n)$, l'espérance mathématique totale de la v.a. X se calcule d'après la formule*:

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{M}[X \mid H_i], \tag{4.0.23}$$

où $\mathrm{M}[X \mid H_i]$ est l'espérance mathématique conditionnelle de la v.a. X sous l'hypothèse H_i.

La formule (4.0.23) est valable pour toutes les variables aléatoires, aussi bien discrètes que continues.

Exemple. Un lot se compose d'articles de même type produits par trois usines différentes: N_1 articles de l'usine I, N_2 articles de l'usine II et N_3 articles de l'usine III. Le temps moyen du fonctionnement sans aléas des articles de la première usine est $\bar{t}_1$, de la deuxième, $\bar{t}_2$, et de la troisième, $\bar{t}_3$. On tire au hasard du lot un article. Trouver le temps moyen $\bar{t}$ de son fonctionnement sans défaillance.

Solution. Trois hypothèses sont possibles:

H_1 = [l'article tiré appartient à la première usine];
H_2 = [l'article appartient à la deuxième usine];
H_3 = [l'article appartient à la troisième usine].

$$\mathrm{P}(H_1) = N_1/(N_1 + N_2 + N_3); \quad \mathrm{P}(H_2) = N_2/(N_1 + N_2 + N_3);$$
$$\mathrm{P}(H_3) = N_3/(N_1 + N_2 + N_3).$$

D'après la formule (4.0.23) on a

$$\bar{t}=[N_1\bar{t}_1+N_2\bar{t}_2+N_3\bar{t}_3]/(N_1+N_2+N_3).$$

Le calcul des moments initiaux se fait souvent d'après la formule de l'espérance mathématique

$$\alpha_k[X]=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\cdot \mathrm{M}[X^k|H_i]. \tag{4.0.24}$$

Cette formule peut s'employer également pour le calcul des moments centrés :

$$\mu_k[X]=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\cdot \mathrm{M}[\mathring{X}^k|H_i], \tag{4.0.25}$$

mais il faut alors retenir que la variable $\mathring{X}$ doit se calculer comme $\mathring{X} = X - m_x$, où m_x est l'espérance mathématique *inconditionnelle* de la variable aléatoire X calculée d'après la formule (4.0.23), et non pas l'espérance mathématique conditionnelle $\mathrm{M}[X \mid H_i]$.

Exemple. Le tableau de répartition de la variable aléatoire discrète X s'écrit pour une probabilité 0,4

$$X: \left|\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}\right|, \tag{4.0.26}$$

et pour une probabilité 0,6

$$X: \left|\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}\right|. \tag{4.0.27}$$

Calculer l'espérance mathématique et la variance de la v.a. X en utilisant la formule de l'espérance mathématique totale.

Solution. Hypothèses :

H_1 = {le tableau de répartition de la v.a. X est (4.0.26)} ;

H_2 = {le tableau de répartition de la v.a. X est (4.0.27)}.

$$\mathrm{P}(H_1) = 0{,}4; \quad \mathrm{P}(H_2) = 0{,}6.$$

Les espérances mathématiques conditionnelles de la v.a. X sous la première et la deuxième hypothèses sont

$$\mathrm{M}[X \mid H_1] = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}7 = 1{,}7; \quad \mathrm{M}[X \mid H_2] = 2\cdot 0{,}6 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}8.$$

L'espérance mathématique totale

$$\mathrm{M}[X] = 0{,}4\cdot 1{,}7 + 0{,}6\cdot 2{,}8 = 2{,}36.$$

Le moment initial d'ordre 2

$$\alpha_2[X] = 0{,}4\cdot\alpha_2[X \mid H_1] + 0{,}6\alpha_2[X \mid H_2];$$

$$\alpha_2[X \mid H_1] = 1^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}7 = 3{,}1;$$

$$\alpha_2[X \mid H_2] = 2^2\cdot 0{,}6 + 4^2\cdot 0{,}4 = 8{,}8;$$

$$\alpha_2[X] = 0{,}4\cdot 3{,}1 + 0{,}6\cdot 8{,}8 = 6{,}52.$$

En retranchant le carré de l'espérance mathématique, on trouve

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 6{,}52 - 5{,}5696 = 0{,}9504.$$

Considérons certains types de répartition des variables aléatoires discrètes de grand intérêt qui se présentent souvent dans la pratique.

1. **Loi de répartition binomiale.** On dit que la variable aléatoire X est répartie suivant la *loi binomiale*, si ses valeurs possibles sont $0, 1, \ldots, m, \ldots$ $\ldots, n$ et les probabilités respectives valent

$$P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4.0.28}$$

où $0 < p < 1$; $q = 1 - p$. La répartition (4.0.28) dépend de deux paramètres: n et p.

La formule (2.0.19) du chapitre 2 entraîne que pour n épreuves indépendantes le nombre de réalisations de l'événement A (de « succès ») obéit à une loi de répartition binomiale de paramètres n et p, où p est la probabilité du « succès » d'une épreuve isolée.

Pour une variable aléatoire X à répartition binomiale, l'espérance mathématique et la variance sont respectivement

$$M[X] = np; \quad D[X] = npq, \tag{4.0.29}$$

où $q = 1 - p$.

Le terme de « répartition binomiale » est associé au fait que dans la répartition (4.0.28) les probabilités P_m sont égales aux coefficients des termes en z^m du développement suivant les puissances de z du binôme de n-ième degré $(q + pz)^n$

$$(q + pz)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m. \tag{4.0.30}$$

2. **Loi de répartition de Poisson.** Une variable aléatoire discrète X est dite *répartie d'après la loi de Poisson* si ses valeurs possibles sont $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, m, \ldots$, et la probabilité P_m de l'événement $\{X = m\}$ est exprimée par la formule

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.0.31}$$

où $a > 0$. La répartition de Poisson dépend d'un seul paramètre a égal simultanément à l'espérance mathématique et à la variance de la v.a. X

$$M[X] = D[X] = a. \tag{4.0.32}$$

Cette répartition (ou celle qui lui est proche) se présente dans de nombreux problèmes posés par la pratique. En particulier, la répartition poissonienne est une *limite de la répartition binomiale* pour $p \to 0$; $n \to \infty$, si $np = a = \text{const}$. On peut s'en servir approximativement au lieu de la répartition binomiale, si le nombre d'épreuves n est très grand, et la probabilité du « succès » p de chaque épreuve est très faible. L'avantage que présente la répartition poissonienne devant la loi binomiale consiste en ce que les calculs d'après la formule (4.0.31) sont plus simples que d'après (4.0.30).

Exemple. On procède à $n = 200$ essais indépendants d'un appareil qui dans chaque essai tombe en panne avec une probabilité $p = 0{,}01$. En appliquant la répartition de Poisson faire le calcul approché de a) la probabilité P_0 pour que l'appareil ne tombe en panne en aucun essai et b) la probabilité P_1 pour qu'il ne tombe en panne exactement en un seul essai.

Solution. a) D'après la formule (4.0.31) on trouve $P_0 = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-a}$, où $a = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$.

Compte tenu que $0! = 1$; $a^0 = 1$, on obtient $P_0 = e^{-2} \approx 0{,}135$ (voir tableau de l'annexe 3). D'après la loi binomiale la valeur exacte de la probabilité $P_0 = q^{200} = 0{,}99^{200} \approx 0{,}134$, ce qui se distingue très peu de la valeur $P_0 = 0{,}135$ fournie par la répartition de Poisson.

b) D'après la formule (4.0.31)

$$P_1 = \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx 0{,}270.$$

La formule (4.0.28) permet de calculer la valeur exacte de P_1:

$$P_1 = C_{200}^1 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{199} = 200 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}1353 \approx 0{,}271,$$

ce qui encore se distingue d'une façon négligeable de $P_1 \approx 0{,}270$ calculée d'après la répartition de Poisson.

Le nombre de points aléatoires qui tombent dans le domaine donné de l'espace (uni, bi et tridimensionnel) suit également la répartition poissonienne, si la disposition aléatoire des points dans cet espace satisfait à certaines restrictions.

La variante unidimensionnelle se présente, en particulier, lorsqu'on examine les « flux d'événements ».

On appelle *flux d'événements* la suite des événements (phénomènes) homogènes qui se succèdent en des instants aléatoires.

Exemples. 1) Flux (file) d'appels d'un central téléphonique; 2) flux d'électrons émis par la cathode d'un tube; 3) flux d'acheteurs d'un magasin à libre service; 4) flux de défaillances d'un ordinateur.

Il ne faut pas confondre les événements qui forment un flux et les événements aléatoires dans le sens courant du terme. En particulier, il ne convient pas de parler des « probabilités » des événements qui forment un flux (une file); chacun de ces événements est caractérisé par une variable aléatoire qui est l'instant de sa réalisation sur l'axe du temps.

L'une des premières caractéristiques d'un flux d'événements est le *nombre moyen d'événements* qui se produisent par unité de temps:

$$\lambda = M[X_1], \tag{4.0.33}$$

où X_1 est le nombre d'événements qui apparaissent dans l'intervalle de temps d'une durée unitaire. Cette grandeur s'appelle *densité* du flux ou taux moyen de file. La densité du flux du système peut être aussi bien constante que variable. Dans ce dernier cas elle est notée $\lambda(t)$ et est définie comme la limite du rapport du nombre moyen d'événements qui tombe dans l'intervalle élémentaire Δt adhérant au point t, à la longueur de cet intervalle, lorsque cette dernière tend vers zéro:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[X(t, t+\Delta t)]}{\Delta t}, \tag{4.0.34}$$

où la v.a. $X(t, t+\Delta t)$ est le nombre d'événements qui tombent dans l'intervalle de t à $t+\Delta t$.

Le flux d'événements (système d'attente) est dit *stationnaire*, si la probabilité pour que tel ou tel nombre d'événements tombe dans l'intervalle du temps ne dépend que de la durée τ de cet intervalle et ne dépend pas de la position de ce dernier sur l'axe Ot. En particulier, pour un flux stationnaire sa densité est constante

$$\lambda = \text{const}.$$

Un flux d'événements pratiquement stationnaire dans un intervalle de temps relativement court peut ne pas l'être à l'échelle d'un grand intervalle. Par exemple, le flux d'appels d'un central téléphonique entre 12 h et 12 h 30 mn

est pratiquement stationnaire; or, au cours de 24 h ce n'est pas du tout le cas (les appels de nuit sont notablement moins fréquents que ceux faits pendant la journée).

Un flux d'événements est dit *sans postaction* si la probabilité de tel ou tel nombre d'événements de se produire dans l'intervalle de temps τ donné ne dépend pas du nombre d'événements se produisant dans un autre intervalle disjoint quelconque. En particulier, le comportement « futur » du flux ne dépend pas de la façon dont s'est arrangé son « passé » (d'où le terme « sans postaction »).

L'absence physique de la postaction dans le flux signifie que les événements apparaissent sur l'axe Ot aux instants conditionnés pour chacun d'eux par leurs propres causes, leurs causes individuelles. Ainsi, on peut envisager comme un flux sans postaction une file des clients d'un coiffeur. Par contre, la file des rames de métro qui suivent l'une l'autre à des intervalles définis est munie d'une postaction bien évidente.

Le flux d'événements est dit ordinaire, si la probabilité de l'apparition dans l'intervalle de temps élémentaire Δt de deux ou plus événements est négligeable par rapport à celle de la réalisation d'un seul événement. Pratiquement cela signifie que les événements du flux du système d'attente se présentent sur l'axe du temps un à un et non pas par groupes de 2, de 3, etc.

Un flux ordinaire sans postaction est dit *poissonien*. Si de plus il est stationnaire, il s'appelle flux *stationnaire de Poisson* ou flux *simple*.

Si les événements forment un flux simple, le nombre X d'événements qui tombent dans un intervalle de temps quelconque de durée τ se répartit d'après la loi de Poisson

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.0.35}$$

où $a = \lambda\tau$ est l'espérance mathématique du nombre d'événements produit pendant cette durée.

La formule (4.0.35) reste vraie également pour le cas du flux de Poisson non stationnaire avec $\lambda = \lambda(t) \neq \text{const}$, à cette différence près que le paramètre a se calcule d'après la formule

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\, dt, \tag{4.0.36}$$

où t_0, $t_0 + \tau$ sont les coordonnées des extrémités de l'intervalle.

L'ensemble unidimensionnel des points aléatoires qui conduit à la répartition de Poisson peut s'observer également sur n'importe quel autre axe (par exemple, sur l'axe Ox qui représente le rivage auquel aborde une barque aux points aléatoires). La suite des points aléatoires peut être aussi bi, tridimensionnelle, etc.

On appelle *champ aléatoire de points* l'ensemble des points dispersés d'une façon aléatoire sur un plan ou dans l'espace. L'exemple d'un champ aléatoire sur un plan est donné par celui des gouttes de pluie ou des microfissures sur la coupe d'un métal. L'exemple d'un champ aléatoire dans un espace tridimensionnel peut être fourni par les particules ionisées dans un volume de gaz.

On appelle *densité* d'un champ λ le nombre moyen des points qui tombent sur une unité de surface (dans une unité de volume).

Le champ des points est dit poissonien s'il possède les propriétés suivantes: 1) la probabilité pour que tel ou tel nombre de points se trouve dans un domaine quelconque du plan (de l'espace) ne dépend pas de leur nombre dans un autre domaine disjoint; 2) la probabilité pour deux points ou plus de tomber dans un domaine élémentaire quelconque ($\Delta x \Delta y$ ou $\Delta x \Delta y \Delta z$) est négligeable par rapport à celle pour un seul point.

Pour un flux d'événements la première propriété est analogue à l'absence de postaction, la deuxième, à son ordinarité.

Un champ de points est dit *homogène*, si la probabilité pour tel ou tel nombre de points de se trouver dans un domaine quelconque dépend seulement de la surface de celui-ci (de son volume), et ne dépend pas de la *position* de ce domaine. Cette propriété est analogue à celle de stationnarité d'un flux d'événements. Pour un champ de points homogène, la densité est constante : $\lambda = \text{const}$; pour un champ non homogène, elle dépend des coordonnées du point : $\lambda = \lambda(x, y)$ ou $\lambda = \lambda(x, y, z)$.

Un champ de points poissonien homogène est dit *simple*. Pour un champ de points simple le nombre X de points tombés dans un domaine quelconque S du plan (de l'espace), la répartition obéit à la loi de Poisson (4.0.35), où a est le nombre moyen de points tombés dans le domaine

$$a = \lambda s \quad \text{ou} \quad a = \lambda v,$$

où s (v) est la surface (le volume) du domaine.

Si le champ poissonien est inhomogène, $\lambda \neq \text{const}$, la formule (4.0.35) reste valable à cette différence près que le paramètre a se calcule d'une autre façon :

$$a = \iint\limits_{(s)} \lambda(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{pour un plan,}$$

$$a = \iint\limits_{(v)} \lambda(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{pour un volume.}$$

Pour les calculs liés à la répartition de Poisson, il est commode d'utiliser les tableaux 1, 2, 3 de l'annexe. L'annexe 1 donne les valeurs des probabilités $P_m = \mathrm{P}(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, l'annexe 2, les valeurs de la fonction

$$\bar{R}(m, a) = 1 - R(m, a) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

Si les tableaux ne donnent pas les valeurs correspondantes de a ou de m, les probabilités P_m peuvent se calculer directement d'après la formule (4.0.35) et le tableau 3 de l'annexe qui indique les valeurs de la fonction e^{-x}.

3. **Loi de répartition géométrique.** On dit que la variable aléatoire X obéit à la loi de *répartition géométrique*, si ses valeurs possibles sont 0, 1, 2, ..., m, . . ., et les probabilités de ces valeurs

$$P_m = q^{m-1} p \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.0.37}$$

où $0 < p < 1$; $q = 1 - p$.

Les probabilités P_m constituent une progression géométrique décroissante infinie de raison q.

Dans la pratique, la loi géométrique se présente dans les conditions suivantes : supposons qu'on procède à plusieurs épreuves indépendantes dont le but est d'obtenir un certain résultat A (le « succès ») ; dès que le succès est atteint, les épreuves cessent. Chaque tentative conduit au succès avec une probabilité p. La variable aléatoire X, nombre d'épreuves infructueuses, suit la loi de répartition géométrique (4.0.37).

Le tableau de répartition de la variable aléatoire X est de la forme:

X:	0	1	2	...	m	...
	p	qp	q^2p	...	q^mp	...

L'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X s'écrivent:

$$\mathrm{M}[X] = q/p; \quad \mathrm{D}[X] = q/p^2. \tag{4.0.38}$$

Il est plus fréquent dans la pratique qu'il faut envisager non pas le nombre d'épreuves « infructueuses », mais le nombre total d'épreuves réalisées Y, *y compris la dernière épreuve* qui s'est couronnée par le succès. Il est clair que $Y = X + 1$.

Pour la variable aléatoire Y la probabilité $P_m = \mathrm{P}\{Y = m\}$ se calcule d'après la formule

$$P_m = \mathrm{P}\{Y = m\} = q^{m-1}p \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{4.0.39}$$

Le tableau de répartition de la variable aléatoire Y est de la forme:

Y:	1	2	3	...	m	...
	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

Son espérance mathématique et sa variance s'écrivent:

$$\mathrm{M}[Y] = 1/p; \quad \mathrm{D}[Y] = q/p^2. \tag{4.0.40}$$

Dans ce qui suit nous donnerons à (4.0.39) le nom de *répartition géométrique débutant par l'unité*, ou, en abrégé, *répartition géométrique* $+1$.

4. **Loi de répartition hypergéométrique.** On dit que la variable aléatoire X à valeurs possibles $0, 1, \ldots, m, \ldots, a$ obéit à une loi de répartition hypergéométrique de paramètres n, a, b, si les probabilités de ses valeurs possibles sont exprimées par la formule

$$P_m = \mathrm{P}\{X = m\} = C_a^m C_b^{n-m} / C_{a+b}^n. \text{ *)} \tag{4.0.41}$$

Cette loi se rencontre dans les conditions suivantes: une urne contient a boules blanches et b noires; l'épreuve consiste d'en tirer n boules. La variable aléatoire X, nombre de boules blanches parmi celles tirées de l'urne, possède une répartition hypergéométrique (4.0.41).

Le rôle de l'urne dont on tire les boules peut être rempli par un lot de pièces dont a sont défectueuses et b, bonnes, ou un billet de loterie sportive parmi les $a + b$ cases duquel le joueur doit choisir pour barrer n cases; un tirage établit

*) Si $r > k$, en utilisant la formule (4.0.41), il faut poser $C_k^r = 0$.

par la suite les cases « gagnantes », alors que les cases restantes sont « non gagnantes ». La variable aléatoire X, nombre de cases « gagnantes » devinées correctement, possède une répartition hypergéométrique à paramètres n, a, b.

Les caractéristiques numériques les plus importantes de la variable aléatoire X à répartition hypergéométrique sont :

$$M[X] = na/(a+b);$$

$$D[X] = \frac{nab}{(a+b)^2} - n(n-1)\left[\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]. \qquad (4.0.42)$$

Dans le cas où $a \to \infty$; $b \to \infty$; $\frac{a}{a+b} = \text{const} = p$, la répartition hypergéométrique s'approche de la répartition binomiale à paramètres n, p et peut être approximée par cette dernière. Ceci est dû au fait que dans ces conditions les épreuves qui consistent à tirer n boules de l'urne, où la part des boules blanches est $\frac{a}{a+b} = p$, deviennent pratiquement indépendantes.

Problèmes et exercices

4.1. Construire la fonction de répartition de l'indicatrice U de l'événement A dont la probabilité est égale à p.

Solution.

$$F(x) = P\{U < x\} \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leqslant 0, \\ q \text{ pour } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 \text{ pour } x > 1, \end{cases}$$

où $q = 1 - p$ (voir fig. 4.1).

4.2. Une pièce de monnaie est jetée trois fois. La variable aléatoire X est le nombre de pile sorti. Etablir pour elle 1) le tableau de répartition ; 2) le polygone de répartition ; 3) la fonction de répartition. Trouver $M[X]$, $D[X]$, σ_x.

Solution. La variable X possède une répartition binomiale à paramètres $n = 3$ et $p = 1/2$. Le tableau de répartition

X :	0	1	2	3
	1/8	3/8	3/8	1/8

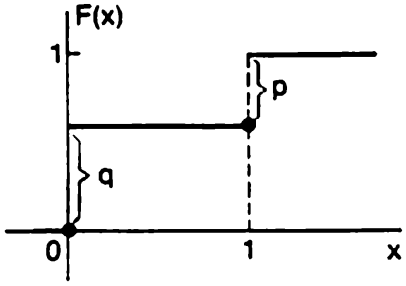


Fig. 4.1

Le polygone de répartition est représenté par la figure 4.2, a ; la fonction de répartition, par la figure 4.2, b.

4.3. En envisageant la variable non aléatoire a comme un cas particulier de la variable aléatoire X établir pour celle-là 1) le tableau de répartition ; 2) la fonction de répartition ; 3) trouver son espérance mathématique et sa variance.

Solution. 1) a : $\left|\frac{a}{1}\right|$; 2) la fonction de répartition est visualisée par la figure 4.3; 3) $M[a] = a$; $D[a] = 0$.

4.4. Une grandeur constante a non aléatoire est ajoutée à une variable aléatoire X. Comment changent alors les caractéristiques de cette dernière : 1) l'espérance mathématique ; 2) la variance ; 3) l'écart quadratique moyen ; 4) le moment initial d'ordre 2 ?

Réponse. 1) A l'espérance mathématique s'ajoute le terme a; 2) la variance ne change pas ; 3) l'écart quadratique moyen ne change pas ; 4) au moment initial d'ordre 2 s'ajoute le terme $a^2 + 2am_x$ (du fait que $\alpha_2[X] = D[X] + m_x^2$).

4.5. Une variable aléatoire X est multipliée par a. Comment changent ses caractéristiques : 1) l'espérance mathématique ; 2) la variance ; 3) l'écart quadratique moyen ; 4) le moment initial d'ordre 2 ?

Réponse. 1) L'espérance mathématique est multipliée par a ; 2) la variance est multipliée par a^2 ; 3) l'écart quadratique moyen est multiplié par $|a|$; 4) le moment initial d'ordre 2 est multiplié par a^2.

4.6. Une pièce de monnaie est jetée n fois ; on considère la variable aléatoire X qui est le nombre de fois que sort pile. Dresser le tableau de répartition de cette variable aléatoire et trouver ses caractéristiques m_x, D_x, σ_x, $\mu_3[X]$.

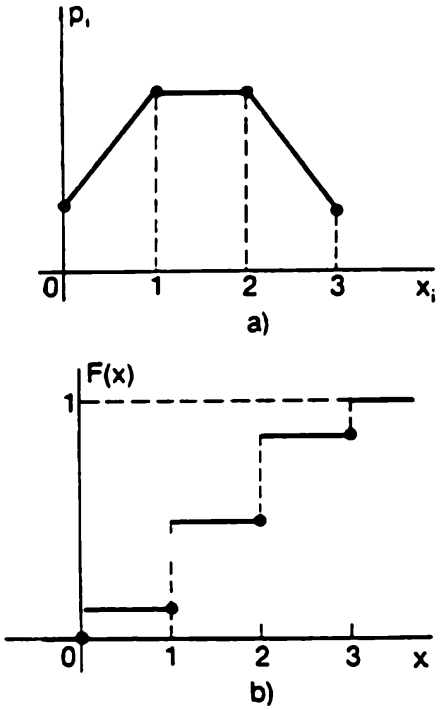


Fig. 4.2

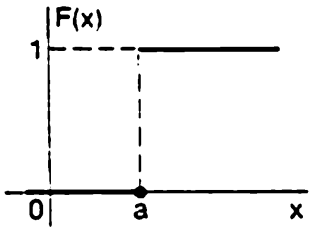


Fig. 4.3

Réponse.

$$X: \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & \dots & m & \dots & n \\ \hline (1/2)^n & C_n^1(1/2)^n & \dots & C_n^m(1/2)^n & \dots & (1/2)^n \end{array}\right|;$$

$$m_x = n/2; \quad D_x = n/4; \quad \sigma_x = \sqrt{n}/2; \quad \mu_3[X] = 0$$

(du fait que la répartition est symétrique par rapport à $m_x = n/2$).

4.7. On procède à n épreuves indépendantes dans chacune desquelles l'événement A apparaît avec une probabilité p. Ecrire le tableau de répartition de la variable aléatoire X, nombre de réalisations de l'événement $\overline{A}$ contraire de A dans n épreuves, et trouver son espérance mathématique et sa variance.

Réponse.

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & \dots & m & \dots & n \\ \hline p^n & C_n^1 q p^{n-1} & \dots & C_n^m q^m p^{n-m} & \dots & q^n \end{array} \right|,$$

où $q = 1 - p$; $m_x = nq$; $D_x = npq$.

4.8. On réalise n épreuves indépendantes dans chacune desquelles l'événement A apparaît avec une probabilité p. On considère la variable aléatoire R, fréquence de l'apparition de l'événement A dans n épreuves, c'est-à-dire le rapport du nombre d'apparitions de l'événement A dans n épreuves au nombre total n d'épreuves réalisées. Ecrire le tableau de répartition de cette variable aléatoire, trouver son espérance mathématique et sa variance.

Réponse.

$$R: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1/n & \dots & m/n & \dots & 1 \\ \hline q^n & C_n^1 p q^{n-1} & \dots & C_n^m p^m q^{n-m} & \dots & p^n \end{array} \right|,$$

où $q = 1 - p$; $m_x = p$; $D_x = pq/n$.

4.9.* On procède à n épreuves indépendantes. Dans toutes les épreuves la probabilité de l'apparition de l'événement A est la même et égale à p. Trouver le nombre le plus probable m^* d'apparitions de l'événement A.

Solution. Déterminons sous quelle condition $m^* = 0$. Si $m^* = 0$, alors $q^n > C_n^1 p q^{n-1}$ ou $q > np$, d'où $p < 1/(n+1)$. Si $m^* = n$, alors $p^n > C_n^1 q p^{n-1}$, $p > nq$, d'où $p > n/(n+1)$.

Considérons le cas où $0 < m^* < n$; alors deux inégalités doivent être vérifiées simultanément:

$$C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*} \geqslant C_n^{m^*+1} p^{m^*+1} q^{n-m^*-1};$$

$$C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*} \geqslant C_n^{m^*-1} p^{m^*-1} q^{n-m^*+1}.$$

Ces deux inégalités sont équivalentes aux inégalités suivantes:

$$(m^* + 1)\, q \geqslant (n - m^*)\, p; \quad (n - m^* + 1)\, p \geqslant m^* q,$$

d'où m^* doit être un nombre entier qui satisfait aux inégalités

$$(n+1)\,p-1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)\,p.$$

On peut s'assurer également que cette condition est satisfaite aussi bien dans le cas $p < 1/(n+1)$ $(m^* = 0)$, que dans un autre cas limite: $p > n/(n+1)$ $(m^* = n)$. Puisque le deuxième membre est d'une unité plus grand que le premier, ils sont séparés seulement par un nombre entier m^*; l'exception présente le cas où $(n+1)\,p$ et $(n+1)\,p-1$ sont des nombres entiers. Alors on a deux valeurs les plus probables: $(n+1)\,p$ et $(n+1)\,p-1$. Si np est un nombre entier, $m^* = np$.

4.10. Deux tireurs tirent chacun sur sa cible en faisant un coup indépendamment l'un de l'autre. Pour le premier tireur la probabilité d'atteindre le but est p_1, et pour le deuxième, p_2. On considère deux variables aléatoires: X_1, le nombre de coups au but du premier tireur; X_2, le nombre de coups au but du deuxième tireur, et leur différence $Z = X_1 - X_2$. Dresser le tableau de répartition de la variable aléatoire Z et trouver ses caractéristiques m_Z et D_Z.

Solution. La variable aléatoire Z possède trois valeurs éventuelles: -1, 0 et $+1$.

$$\mathrm{P}\,\{Z=-1\} = \mathrm{P}\,\{X_1=0\}\,\mathrm{P}\,\{X_2=+1\} = q_1p_2;$$

$$\mathrm{P}\{Z=0\} = \mathrm{P}\,\{X_1=0\}\,\mathrm{P}\,\{X_2=0\} + \mathrm{P}\,\{X_1=1\}\,\mathrm{P}\,\{X_2=1\} =$$
$$= q_1q_2 + p_1p_2;\quad \mathrm{P}\,\{Z=1\} = \mathrm{P}\,\{X_1=1\}\,\mathrm{P}\,\{X_2=0\} = p_1q_2,$$

où $q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$.

Le tableau de répartition de la variable Z s'écrit

Z:	-1	0	1
	q_1p_2	$q_1q_2+p_1p_2$	p_1q_2

$$m_Z = (-1)\,q_1p_2 + 0\,(q_1q_2 + p_1p_2) + 1p_1q_2 =$$
$$= -q_1p_2 + 1p_1q_2 = p_1 - p_2.$$

La variance s'obtient à l'aide du moment initial deux [(voir (4.0.16)]:

$$\alpha_2\,[Z] = (-1)^2\cdot q_1p_2 + 0^2\cdot(q_1q_2 + p_1p_2) + 1^2\cdot p_1q_2 =$$
$$= q_1p_2 + p_1q_2 = p_1 + p_2 - 2p_1p_2;$$
$$D_Z = \alpha_2\,[Z] - m_Z^2 = p_1 + p_2 - 2p_1p_2 - (p_1 - p_2)^2 =$$
$$= p_1q_1 + p_2q_2.$$

4.11. On tire indépendamment 2 coups sur une cible. La probabilité de l'atteindre à chaque coup est égale à p. On considère les

variables aléatoires : X, la différence entre le nombre de coups réussis et le nombre de coups ratés ; Y, la somme du nombre de coups réussis et du nombre de coups ratés. Dresser pour chacune des variables aléatoires X et Y le tableau de répartition. Trouver leurs caractéristiques m_x, D_x, m_y, D_y.

Solution. Le tableau de répartition de la variable X est de la forme

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & 2 \\ \hline q^2 & 2pq & p^2 \end{array} \right|, \text{ où } q = 1 - p.$$

$$m_x = -2q^2 + 2p^2 = 2(p - q); \quad \alpha_2[X] = 4(q^2 + p^2);$$
$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = 8pq.$$

En fait, la grandeur Y n'est pas aléatoire et possède la seule valeur 2 ; son tableau de répartition

$$Y: \left| \begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right|; \quad m_y = 2; \quad D_y = 0.$$

4.12. Nous avons à notre disposition n ampoules, dont chacune possède un défaut avec une probabilité p. Les ampoules sont vissées dans une douille, puis le courant est branché ; à cet instant une ampoule défectueuse grille pour être remplacée ensuite par une autre. Nous considérons la variable aléatoire X, nombre d'ampoules à mettre à l'essai. Etablir son tableau de répartition et trouver l'espérance mathématique.

Solution. Le tableau de répartition de la variable X s'écrit

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ \hline q & pq & p^2q & \dots & p^{i-1}q & \dots & p^{n-1} \end{array} \right|, \text{ où } q = 1 - p. \qquad (4.12.1)$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{n-1} ip^{i-1}q + np^{n-1} = q\frac{d}{dp}\left(\frac{p - p^n}{1 - p}\right) + np^{n-1} = \frac{1 - p^n}{1 - p}.$$

4.13. La variable aléatoire X est répartie d'après la loi de Poisson à espérance mathématique $a = 3$. Construire le polygone de répartition et la fonction de répartition de X. Trouver : 1) la probabilité pour que X prenne une valeur inférieure à son espérance mathématique ; 2) la probabilité pour que X prenne une valeur positive.

Réponse. 1) 0,423; 2) 0,960.

4.14. De temps en temps un ordinateur en service subit des défaillances. On peut admettre que le flux des défaillances est simple. Leur nombre moyen par 24 h est 1,5. Trouver la probabilité des événements suivants:

A = {aucune défaillance en deux jours};

B = {au moins une défaillance au cours d'un jour de 24 h};

C = {une semaine de service de l'ordinateur donne lieu à pas moins de trois défaillances}.

Réponse. $P(A) = 0{,}050$; $P(B) = 0{,}777$; $P(C) = 0{,}998$.

4.15. Pour l'emplacement donné du point où éclate un obus, la cible se trouve couverte par un champ poissonien homogène d'éclats de densité $\lambda = 2{,}5$ éclats/m². L'aire de la projection de l'objectif du tir sur le plan où l'on observe le champ des éclats est égale à $S = 0{,}8$ m². Chaque éclat ayant atteint la cible la couvre avec certitude. Trouver la probabilité pour que la cible soit détruite.

Réponse. 0,865.

4.16. Même énoncé, mais chaque éclat qui atteint la cible la couvre non pas avec certitude, mais avec une probabilité égale à 0,6.

Solution. Au lieu du champ d'éclats donné considérons le « champ des éclats destructeurs » de densité $\lambda^* = 0{,}6\lambda = 1{,}5$ éclats destructeurs/m². L'espérance mathématique du nombre d'éclats destructeurs qui ont atteint la cible est $a^* = \lambda^* S = 1{,}2$ éclat destructeur; d'où la probabilité de destruction: $R_1 = 1 - e^{-a^*} = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$.

4.17. Un tube à vide fonctionne sans défaillance pendant un temps aléatoire T pour être remplacé dès qu'il subit une défaillance. Le flux des défaillances est simple, de densité μ. Trouver la probabilité des événements suivants: A = {pendant le temps τ le tube ne sera pas à remplacer}; B = {le tube devra être remplacé exactement trois fois}; C = {le tube devra être remplacé pas moins de trois fois}.

Solution. L'espérance mathématique du nombre de défaillances X pendant le temps τ est $a = \mu\tau$.

$$P(A) = P_0 = e^{-\mu\tau}, \quad P(B) = P_3 = \frac{(\mu\tau)^3}{3!} e^{-\mu\tau};$$

$$P(C) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - e^{-\mu\tau}[1 + \mu\tau + 0{,}5(\mu\tau^2)].$$

4.18. Une installation se compose de trois ensembles; le premier d'entre eux compte n_1 éléments, le deuxième, n_2, le troisième, n_3. Pour le fonctionnement de l'installation le premier ensemble est absolument nécessaire; les deuxième et troisième ensembles doublent l'un l'autre. Les flux des défaillances des éléments sont simples;

pour l'élément qui fait partie du premier ensemble la densité du flux des défaillances est λ_1, pour ceux du deuxième et du troisième ensembles, λ_2. Le premier ensemble cesse de fonctionner si pas moins de deux de ses éléments tombent en panne. Le deuxième ensemble, tout comme le troisième qui le double, cesse de fonctionner si au moins un élément tombe en panne. Pour que l'installation tout entière soit mise hors service il suffit que cessent de fonctionner le premier ensemble, ou simultanément le deuxième et le troisième. Trouver la probabilité pour que pendant le temps τ l'installation soit mise hors service.

Solution. La probabilité de tomber en panne pendant un temps τ pour un élément du premier, deuxième ou troisième ensembles est égale respectivement à

$$p_1 = 1 - e^{-\lambda_1 \tau} \quad \text{et} \quad p_2 = p_3 = 1 - e^{-\lambda_2 \tau}.$$

La probabilité de tomber en panne pendant le temps τ pour le premier ensemble est

$$\mathcal{P}_1 = 1 - (1 - p_1)^{n_1} - n_1 p_1 (1 - p_1)^{n_1 - 1}.$$

Les probabilités de tomber en panne pour le deuxième et le troisième ensembles sont :

$$\mathcal{P}_2 = 1 - (1 - p_2)^{n_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_3 = 1 - (1 - p_3)^{n_3}.$$

La probabilité de la mise hors service de l'installation tout entière :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + (1 - \mathcal{P}_1)\, \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3.$$

4.19. Il se peut qu'un satellite artificiel de la Terre, qui se déplace sur son orbite pendant n jours, heurte des météorites. Les météorites qui coupent l'orbite et entrent en collision avec le satellite forment un flux poissonien stationnaire de densité $\varkappa$ (météorites par jour). Une météorite ayant frappé le satellite perce son enveloppe avec une probabilité p_0. Une météorite qui a percé l'enveloppe met hors service avec une probabilité p_1 les appareils du satellite. Trouver les probabilités des événements suivants :

A = {pendant le vol du satellite son enveloppe sera percée} ;

B = {pendant le vol du satellite ses appareils seront mis hors service} ;

C = {pendant le vol du satellite seule l'enveloppe sera percée, les appareils poursuivant leur fonctionnement}.

Solution. L'espérance mathématique du nombre de météorites susceptibles de percer l'enveloppe : $a_0 = \varkappa n p_0$. L'espérance mathématique du nombre de météorites qui percent l'enveloppe et endommagent l'équipement : $a_1 = \varkappa n p_1 p_0$

$$\mathrm{P}(A) = 1 - e^{-a_0} = 1 - e^{-\varkappa n p_0}, \quad \mathrm{P}(B) = 1 - e^{-a_1} = 1 - e^{-\varkappa n p_0 p_1},$$

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) = e^{-\varkappa n p_0 p_1} - e^{-\varkappa n p_0}.$$

4.20. Des chasseurs qui participent à la chasse au loup sont alignés en une rangée aléatoire de façon à constituer suivant l'axe Ox un flux de points simple de densité λ (λ chasseurs par unité de longueur, voir figure 4.20). Le loup court perpendiculairement au rang. Un chasseur quelconque tire sur le loup seulement lorsque celui-ci passe devant lui à une distance pas plus grande que R_0 et le tue avec une probabilité p. Calculer la probabilité pour que le loup

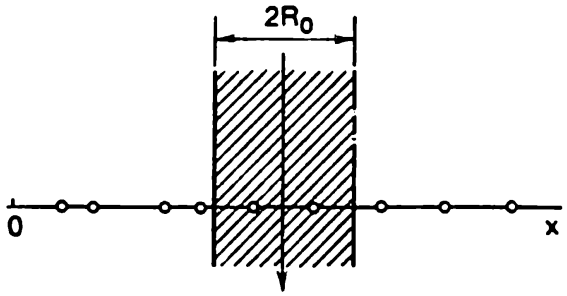


Fig. 4.20

soit tué, s'il ne sait pas où se situent les chasseurs et si le rang est assez long pour que le loup ne passe pas avec certitude au-delà de la rangée.

Solution. Le loup qui court dans la direction indiquée par la flèche est visé par le tir, dans le cas où au moins un chasseur se trouve dans la bande large de $2R_0$ définie par la trajectoire du déplacement du loup. Chaque chasseur, s'il a à tirer sur le loup, enregistre le « succès », c'est-à-dire tue le loup, avec une probabilité p. Passons de « la rangée des chasseurs » de densité λ à la « rangée des chasseurs chanceux » de densité $\lambda^* = \lambda p$. Le loup sera tué dans le cas, où, dans l'intervalle long de $2R_0$ jeté au hasard sur l'axe des abscisses, se trouve ne serait-ce qu'un « chasseur chanceux »; la probabilité de cet événement

$$P(A) = 1 - e^{-2R_0\lambda p}.$$

4.21. Une voiture automobile subit la révision technique et l'entretien. Le nombre de défaillances découvertes par la révision suit la loi de Poisson de paramètre a. Si les défaillances ne sont pas établies, l'examen technique dure en moyenne 2h. Si on en découvre une ou deux, pour les éliminer chacune on met encore en moyenne une demi-heure. Si on découvre plus de deux défaillances, la voiture est soumise à l'inspection technique qui dure en moyenne 4h. Déterminer la loi de répartition du temps moyen T de l'entretien et de la réparation de la voiture et son espérance mathématique $M[T]$.

Solution.

$$T: \left| \begin{array}{c|c|c|c} 2 & 2{,}5 & 3 & 6 \\ \hline e^{-a} & ae^{-a} & \frac{a^2}{2}e^{-a} & 1-e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right) \end{array} \right|.$$

$$M[T] = e^{-a}\left(2+2{,}5a+\frac{3}{2}a^2\right)+6\left[1-e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)\right] =$$
$$= 6-e^{-a}(4+3{,}5a+1{,}5a^2).$$

4.22*. Un troupeau de bétail est soumis à l'examen, chacune de ses bêtes est malade avec une probabilité p. L'examen est réalisé à l'aide de l'étude des analyses de sang. Si on mélange le sang de n bêtes, la présence dans ce mélange d'une seule bête malade rend l'analyse positive. Il faut soumettre à l'examen un grand nombre N de bêtes. On propose à cet effet de procéder de deux façons:

1) examiner toutes les N bêtes, c'est-à-dire faire N analyses;

2) mener l'examen par groupes, en mélangeant d'abord le sang de n bêtes; si l'analyse est négative, admettre que toutes les bêtes de ce groupe sont sains, et passer au groupe suivant de n bêtes; lorsque l'analyse est positive, avant de passer au groupe suivant ($n > 1$), soumettre à l'examen chacune des n bêtes de ce groupe.

Déterminer quel procédé est plus avantageux, le premier ou le deuxième, du point de vue du nombre d'analyses minimal. Calculer $n = n^*$ pour lequel le nombre d'analyses sera minimal si l'examen porte sur tout le troupeau.

Solution. La variable aléatoire X_n est le nombre d'analyses à réaliser par groupe de n bêtes d'après le deuxième mode; son tableau de répartition s'écrit:

$$X_n: \left| \begin{array}{c|c} 1 & n+1 \\ \hline q^n & 1-q^n \end{array} \right|; \quad q = 1-p.$$

Le nombre moyen d'analyses par groupe de n bêtes pour le deuxième mode

$$M[X_n] = q^n + (n+1)(1-q^n) = n + (1-nq^n).$$

Dans le cas du premier mode, pour un groupe de n bêtes il faut faire n analyses. Il est évident que pour $nq^n < 1$, le premier mode est plus avantageux que le deuxième, et pour $nq^n > 1$, c'est le deuxième mode qui est le plus avantageux.

Etablissons q pour lequel le deuxième mode est plus avantageux et quelle sera alors la valeur optimale de $n = n^*$. L'inégalité $nq^n > 1$ entraîne que $q > 1/\sqrt[n]{n}$, et ceci conduit à $q > 0{,}694$, puisque pour des n entiers le minimum de $1/\sqrt[n]{n}$ est atteint avec $n = 3$. Supposons que $q > 0{,}694$ et cherchons la valeur de $n = n^*$ qui minimise le nombre moyen d'analyses par bête:

$$R_n = \mathrm{M}\,[X_n]/n = 1 - q^n + 1/n.$$

A cet effet il faut calculer la racine positive minimale de l'équation

$$dR_n/dn = -q^n \ln q - 1/n^2 = 0,$$

prendre deux nombres entiers qui lui sont les plus proches et par leur substitution directe à R_n choisir n^* optimal. En utilisant la substitution $-\ln q = a$; $an = x$, l'équation $-q^n \ln q = 1/n^2$ est ramenée à l'équation $x^2 e^{-x} = a$ $(a = -\ln q < \ln 3/3 = 0{,}366)$. Pour de petits a et, par suite, pour de petits $p = 1 - q$, la solution de la dernière équation est $x \approx \sqrt{a}$, d'où $n^* \approx 1/\sqrt{a}$. Pour des a non petits la comparaison directe des grandeurs R_2, R_3 et R_4 permet de conclure que toujours $R_3 < R_2$ et que $R_3 < R_4$ avec $0{,}694 < q < 0{,}876$; donc, pour $0{,}694 < q < 0{,}876$, n^* minimal vaut 3. On peut montrer que pour $q > 0{,}889$ $(p < 0{,}111)$ une bonne approximation s'obtient avec la formule $n^* \approx 1/\sqrt{p} + 0{,}5$.

4.23. On essaye à plusieurs reprises de mettre en marche un moteur. Indépendamment de toutes les autres chaque tentative se couronne de succès (le moteur est lancé) avec une probabilité $p = 0{,}6$. Chaque tentative prend un temps τ. Trouver la répartition du temps total T nécessaire pour lancer le moteur, son espérance mathématique et sa variance.

Solution. Le nombre de tentatives X est une variable répartie suivant la loi géométrique qui débute par l'unité (4.0.32); $T = X\tau$ possède la répartition

T:	τ	2τ	3τ	...	$m\tau$	...
	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

$$\mathrm{M}\,[T] = \tau \mathrm{M}\,[X] = \tau/p;$$
$$\mathrm{D}\,[T] = \tau^2 \mathrm{D}\,[X] = \tau^2 q/p^2 \quad (q = 1 - p).$$

4.24. Dans l'énoncé précédent les tentatives sont dépendantes et p_i, probabilité de lancer le moteur après $i - 1$ tentatives infructueu-

ses, est une certaine fonction de i : $p_i = \varphi(i)$. Trouver la répartition de la variable aléatoire $T = \tau X$.

Réponse.

T :	τ	2τ	3τ	...	$m\tau$	...
	p_1	q_1p_2	$q_1q_2p_3$	...	$\prod_{i=1}^{m-1} q_i p_m$	...

où $q_i = 1 - p_i$.

4.25. Lors du montage d'un appareil à fiabilité accrue composé de pièces homogènes, chaque pièce est soumise à des essais sous tous les aspects, à la suite desquels elle est soit reconnue bonne, avec une probabilité p, soit rebutée, avec une probabilité $1 - p$. Les pièces s'avèrent appartenir à telle ou telle catégorie indépendamment l'une de l'autre. La réserve des pièces est pratiquement illimitée. Leur sélection et leurs essais se poursuivent tant que sont accumulées k pièces de haute qualité. La variable aléatoire X est le nombre de pièces rebutées. Trouver sa répartition X : $P_m = \mathrm{P}\{X = m\}$.

Solution. Valeurs éventuelles de la variable aléatoire X : 0, 1, ..., m, . . . Cherchons leurs probabilités :

$P_0 = \mathrm{P}$ {premières k pièces sont bonnes} $= p^k$;

$P_1 = \mathrm{P}$ {parmi les premières k pièces une est rebutée, la $(k+1)$-ième pièce est bonne} $= C_k^1 q^1 p^{k-1} p = C_k^1 q^1 p^k$;

. . . . . .

$P_m = \mathrm{P}$ {parmi les premières $k + m - 1$ pièces, m sont rebutées, la $(m+k)$-ième pièce est bonne} $= C_{k+m-1}^m q^m p^k$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

4.26. Deux variables aléatoires X, Y, indépendamment l'une de l'autre, prennent les valeurs 0 et 1. Leurs tableaux de répartition sont donnés

X :	0	1
	q_x	p_x

,

Y :	0	1
	q_y	p_y

.

Construire les tableaux de répartition : 1) de leur somme $Z = X + Y$; 2) de leur différence $U = X - Y$; 3) de leur produit : $V = XY$.

Solution. La variable aléatoire Z possède trois valeurs possibles: 0, 1 et 2:

$$P\{Z=0\} = P\{X=0,\ Y=0\} = q_x q_y;$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=1,\ Y=0\} + P\{X=0,\ Y=1\} =$$

$$= p_x q_y + q_x p_y;$$

$$P\{Z=2\} = P\{X=1,\ Y=1\} = p_x p_y;$$

$$Z: \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline q_x q_y & p_x q_y + q_x p_y & p_x p_y \end{array} \right|.$$

D'une façon analogue on trouve

$$U: \left| \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline q_x p_y & p_x p_y + q_x q_y & p_x q_y \end{array} \right|;$$

$$V: \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q_x q_y + p_x q_y + q_x p_y & p_x p_y \end{array} \right|.$$

4.27. Le tableau de répartition de la variable aléatoire X s'écrit:

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array} \right|.$$

Construire le tableau de répartition de la variable aléatoire $Y = 1/(3 - X)$.

Réponse.

$$Y: \left| \begin{array}{c|c|c} -1 & 0{,}5 & 1 \\ \hline 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array} \right|.$$

4.28. Le tableau de répartition de la variable aléatoire X est de la forme :

X :	-2	-1	0	1	2
	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

Dresser le tableau de répartition de son carré : $Y = X^2$.

Réponse.

Y :	0	1	4
	0,2	0,5	0,3

4.29. Dans un message transmis par radio on observe des bruits qui entravent le déchiffrement du message ; on ne parvient pas à le déchiffrer avec une probabilité p. Le message est transmis tant qu'il ne soit déchiffré. La durée de sa transmission est de 2 mn. Trouver : 1) l'espérance mathématique du temps T que demande la transmission du message ; 2) la probabilité pour que celle-ci prenne un temps supérieur au temps disponible t_0.

Solution. 1) La variable aléatoire X, nombre de « tentatives » de transmettre le message, possède une répartition « géométrique $+1$ » ; $T = 2X$ mn. La répartition de la variable aléatoire T :

T :	2	4	6	$\dots$	$2m$	$\dots$
	q	pq	p^2q	$\dots$	$p^{m-1}q$	$\dots$

$$2)\quad \mathrm{P}\{T > t_0\} = \sum_{m=[t_0/2]+1}^{\infty} p^{m-1}q = q \sum_{m=[t_0/2]+1}^{\infty} p^{m-1}, \tag{4.29}$$

où $[t_0/2]$ est le nombre entier maximal contenu dans $t_0/2$. En sommant la progression géométrique (4.29), on obtient

$$\mathrm{P}\{T > t_0\} = \frac{q}{1-q}\,\frac{p^{[t_0/2]+1}}{1-p} = p^{[t_0/2]}$$

4.30. Le tableau de répartition de la variable aléatoire discrète X est

X :	x_1	x_2	$\dots$	x_n
	p_1	p_2	$\dots$	p_n

La variable aléatoire Z est le nombre minimal des deux nombres que sont les valeurs de la variable aléatoire X et du nombre a: $Z = \min\{X, a\}$, où $x_1 \leqslant a \leqslant x_n$. Trouver la répartition de la variable aléatoire Z.

Solution. Par définition

$$Z = \begin{cases} X \text{ pour } X \leqslant a; \\ a \text{ pour } X > a. \end{cases}$$

La répartition de la variable aléatoire Z coïncide avec celle de la variable aléatoire X pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots$ telles qu'elles soient inférieures ou égales à a; $P\{Z = a\}$ se calcule comme l'unité moins la somme de toutes ces probabilités:

$$P\{Z = a\} = 1 - \sum_{x_i \leqslant a} p_i.$$

4.31. La répartition de la variable aléatoire discrète X s'écrit

X:	1	3	5	7	9
	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Trouver la répartition de la variable aléatoire $Z = \min\{X, 4\}$.

Réponse. Sur la base de la solution du problème précédent

Z:	1	3	4
	0,1	0,2	0,7

4.32. Deux variables aléatoires X et Y, indépendamment l'une de l'autre, prennent les valeurs d'après les tableaux de répartition:

X:	0	1	2	3
	0,2	0,3	0,4	0,1

; Y:

Y:	1	3	4
	0,7	0,2	0,1

Construire le tableau de répartition de la variable aléatoire $Z = \min\{X, Y\}$.

Solution. $P\{Z = 0\} = P\{X = 0\} = 0{,}2$; $P\{Z = 1\} = P\{X = 1\} + P\{Y = 1, X > 1\} = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}65$;

$P\{Z = 2\} = P\{X = 2, Y > 2\} = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$; $P\{Z = 3\} = P\{X = 3, Y \geqslant 3\} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$.

Z:	0	1	2	3
	0,20	0,65	0,12	0,03

4.33. Pour l'énoncé du problème précédent trouver la répartition de la variable aléatoire $U = \max\{X, Y\}$.

Réponse.

U:	1	2	3	4
	0,35	0,28	0,27	0,10

4.34. Une cellule d'ordinateur a enregistré un nombre binaire de rang n, dont chaque signe prend indépendamment des autres et avec la même probabilité la valeur 0 ou 1. La variable aléatoire X est le nombre de signes « 1 » dans l'écriture du nombre binaire. Trouver la probabilité des événements $\{X = m\}$; $\{X \geqslant m\}$; $\{X < m\}$.

Solution. La répartition de la variable aléatoire X est binomiale à paramètres n, $p = 1/2$. $P\{X = m\} = C_n^m (1/2)^n$;

$$P\{X \geqslant m\} = (1/2)^n \sum_{k=m}^{n} C_n^m; \quad P\{X < m\} = 1 - P\{X \geqslant m\}.$$

4.35. On considère une fraction décimale propre X à trois signes significatifs après la virgule, chaque signe, indépendamment des autres, pouvant prendre avec la même probabilité une valeur quelconque 0, 1, . . ., 9. Construire le tableau de répartition de la variable aléatoire X et trouver son espérance mathématique.

Solution. Les valeurs éventuelles de la variable aléatoire X: 0,000; 0,001, 0,002, . . ., 0,999. La probabilité de chacune d'elles est égale à $p = (0{,}1)^3 = 0{,}001$. Le tableau de répartition de la variable aléatoire X est de la forme

X:	0,000	0,001	0,002	...	0,999
	0,001	0,001	0,001	...	0,001

$$M[X] = \sum_{i=0}^{999} x_i p_i = 0{,}001 \sum_{i=0}^{999} x_i, \text{ où } x_i = i \cdot 0{,}001.$$

Les nombres x_i forment une progression arithmétique de 1000 termes à raison de 0,001. La sommation de la progression donne

$$M[X] = \frac{0+0,999}{2} \cdot 1000 \cdot 0,001 = 0,4995 \approx 0,5.$$

4.36. La variable aléatoire Y est une fraction binaire propre aléatoire à n signes significatifs après la virgule; chaque signe prend indépendamment des autres la valeur 0 ou 1 avec une probabilité 1/2. Trouver la répartition de la variable aléatoire Y et son espérance mathématique $M[Y]$.

Solution. D'une façon analogue au problème précédent toutes les valeurs du nombre binaire de 0,00 . . . 0 à 0,11 . . . 1 sont équiprobables et la probabilité de chacune d'elles est $1/2^n$. L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y (en écriture décimale) $M[Y] = 0,5 - 1/2^{n+1}$.

4.37. Un message transmis par une voie de communication en code binaire se compose de la succession des signes « 0 » et « 1 » qui alternent avec une probabilité égale et indépendamment l'un de l'autre, par exemple 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, . . .

On considère un certain groupe de signes répétés, par exemple, 0, 0, 0 ou 1, 1, 1, 1 (ou simplement 0 ou 1, si les signes ne se répètent pas). On prend au hasard un de ces groupes. La variable aléatoire est le nombre de signes dans le groupe. Trouver sa répartition, son espérance mathématique et sa variance. Trouver $P\{X \geqslant k\}$.

Solution. La variable aléatoire X possède une répartition géométrique qui débute par l'unité:

X:	1	2	...	m	...
	0,5	$0,5^2$	...	$0,5^m$	...

; $M[X] = 1/0,5 = 2$;

$$D[X] = 0,5/0,5^2 = 2; \qquad P\{X \geqslant k\} = \sum_{m=k}^{\infty} 0,5^m = 0,5^{k-1}.$$

4.38. Dans l'énoncé du problème précédent $P\{«0»\} = 0,7$; $P\{«1»\} = 0,3$. Trouver le nombre moyen de signes $M[X]$ dans le groupe des zéros, le nombre moyen de signes $M[Y]$ dans le groupe des unités et le nombre moyen total de signes $M[Z]$ pris au hasard. Trouver les variances $D[X]$, $D[Y]$, $D[Z]$.

Solution. $M[X] = 1/0,7 = 10/7$; $M[Y] = 1/0,3 = 10/3$. D'après la formule de l'espérance mathématique totale on trouve $M[Z] = 0,7 \cdot \frac{10}{3} + 0,3 \cdot \frac{10}{7} = 2$, c'est-à-dire la même chose que dans l'énoncé précédent. $D[X] = 0,3/0,7^2 \approx 0,612$; $D[Y] = 0,7/0,3^2 \approx 7,778$.

Pour obtenir D $[Z]$ cherchons d'abord $\alpha_2[Z] = \mathrm{M}[Z^2]$ d'après la formule de l'espérance mathématique totale [voir (4.0.20)] *):

$$\alpha_2[Z] = 0{,}7\alpha_2[X] + 0{,}3\alpha_2[Y], \text{ où } \alpha_2[X] = \mathrm{D}[X] + (\mathrm{M}[X])^2 \approx 2{,}66; \quad \alpha_2[Y] = \mathrm{D}[Y] + (\mathrm{M}[Y])^2 \approx 18{,}9, \text{ alors } \alpha_2[Z] \approx 7{,}53; \quad \mathrm{D}(Z) = \alpha_2[Z] - (\mathrm{M}[Z])^2 \approx 3{,}53,$$

c'est-à-dire que par rapport à l'énoncé précédent la variance a augmenté.

La probabilité $\mathrm{P}\{X \geqslant k\}$ se trouve d'après la formule des probabilités totales sous les hypothèses $H_0 = \{$premier signe « 0 »$\}$; $H_1 = \{$premier signe « 1 »$\}$:

$$\mathrm{P}(H_0) = 0{,}7; \quad \mathrm{P}(H_1) = 0{,}3; \quad \mathrm{P}\{X \geqslant k \mid H_0\} = 0{,}7^{k-1};$$
$$\mathrm{P}\{X \geqslant k \mid H_1\} = 0{,}3^{k-1}, \text{ alors } \mathrm{P}\{X \geqslant k\} = 0{,}7\cdot 0{,}7^{k-1} + 0{,}3\cdot 0{,}3^{k-1} = 0{,}7^k + 0{,}3^k.$$

4.39. Une installation se compose de m groupes du type I et de n groupes du type II. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant un temps τ) de chaque groupe du type I est p_1, et de chaque groupe du type II, p_2. Les groupes tombent en panne indépendamment l'un de l'autre. Pour le fonctionnement de l'installation il suffit que pendant le temps τ fonctionnent sans panne simultanément deux groupes quelconques du type I et deux groupes quelconques du type II. Trouver la probabilité $\mathcal{P}$ du travail sans défaillance de l'installation.

Solution. L'événement $A = \{$fonctionnement sans défaillance de l'installation$\}$ est le produit de deux événements:

$A_1 = \{$pas moins de deux des m groupes du type I travaillent sans panne$\}$;

$A_2 = \{$pas moins de deux des n groupes du type II travaillent sans panne$\}$.

Le nombre X_1 de groupes du type I travaillant sans défaillance est une variable aléatoire répartie d'après la loi binomiale de paramètres m, p_1; l'événement A_1 consiste en ce que la variable aléatoire X_1 prend la valeur non inférieure à 2; donc

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}\{X_1 \geqslant 2\} = 1 - \mathrm{P}\{X_1 < 2\} = 1 - \mathrm{P}\{X_1 = 0\} - \mathrm{P}\{X_1 - 1\} = 1 - (q_1^m + mq_1^{m-1}p_1) \quad (q_1 = 1 - p_1).$$

*) D'après la formule de l'espérance mathématique totale se calcule le moment initial d'ordre 2 et non pas la variance elle-même (du fait que sous des hypothèses différentes les espérances mathématiques conditionnelles sont différentes).

D'une façon analogue,

$$P(A_2) = 1 - (q_2^n + nq_2^{n-1}p_2) \quad (q_2 = 1 - p_2).$$

La probabilité de fonctionnement sans défaillance de l'installation :

$$\mathcal{P} = P(A) = P(A_1)\,P(A_2) = [1 - (q_1^m + mq_1^{m-1}p_1)]\,[1 - (q_n^2 + nq_2^{n-1}p_2)].$$

4.40. Un appareil est employé (mis en marche) plusieurs fois jusqu'à sa mise hors service (une fois hors service, il n'est pas rétabli). La probabilité pour qu'il s'emploie k fois sans être mis hors service est égale à $P(k)$. La fonction $P(k)$ est donnée (voir fig. 4.40). On sait que l'appareil a été déjà utilisé n fois. Trouver la probabilité Q_m pour qu'il tienne encore à m utilisations et l'espérance mathématique du nombre X des utilisations à venir.

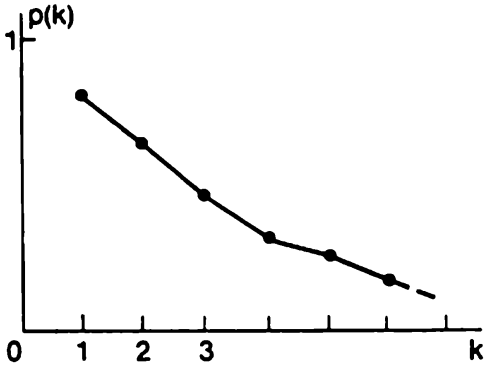


Fig. 4.40

Solution. Q_m est la probabilité conditionnelle pour que l'appareil ne soit pas mis hors service pendant les m utilisations ultérieures sous la condition qu'il ne fût pas mis hors service pendant les premières n utilisations. D'après le théorème des probabilités composées $P(n+m) = P(n)\,Q_m$, d'où

$$Q_m = \frac{P(n+m)}{P(n)}\,; \quad M[X] = \sum_{m=1}^{\infty} mQ_m.$$

4.41. Un ouvrier assure la conduite de n machines-outils de même type alignées avec des intervalles l (fig. 4.41). De temps en

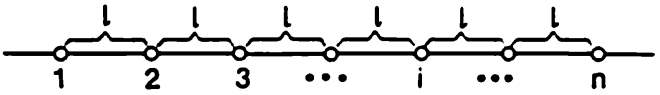


Fig. 4.41

temps les machines-outils s'arrêtent avec la même probabilité et indépendamment l'une de l'autre et imposent le réglage. Après le réglage d'une machine-outil, l'opérateur garde sa place tant que ne s'arrête une autre machine-outil ; alors, il passe vers cette dernière (si c'est la même machine qui tombe en panne, il garde sa place). La variable aléatoire X est la distance que parcourt l'opérateur entre deux réglages. Trouver l'espérance mathématique de X.

Solution. Appliquons la formule de l'espérance mathématique totale à hypothèses H_i = {l'opérateur se tient devant l'i-ième machine-outil} ($i = 1, \ldots, n$). D'après l'énoncé, toutes les hypothèses sont équiprobables: $P(H_1) = P(H_2) = \ldots = P(H_n) = 1/n$. Cherchons l'espérance mathématique $M[X \mid H_i]$ de l'i-ième hypothèse. Chaque machine-outil (l'i-ième y comprise) s'arrête avec une probabilité $1/n$; donc

$$M[X \mid H_i] = \frac{l}{n}\left[\sum_{k=1}^{i-1}(i-k) + \sum_{k=i}^{n}(k-i)\right] =$$

$$= \frac{l}{2n}[i(i-1) + (n-i)(n-i+1)]$$

(pour $i=1$ on suppose que $\sum_{k=1}^{i-1}(i-k)=0$).

D'après la formule de l'espérance mathématique totale

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, M[X \mid H_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{l}{2n}[i(i-1) +$$

$$+ (n-i)(n-i+1)] = \frac{l}{2n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i(i-1) + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(n-i)\right]. \tag{4.41}$$

En appliquant la formule connue $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculons

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

En appliquant cette formule pour le calcul des deux sommes de (4.41), on vérifie qu'elles sont égales entre elles et

$$M[X] = \frac{l}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{l}{n^2}\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{l(n^2-1)}{3n}.$$

4.42. On procède à plusieurs épreuves indépendantes dans chacune desquelles l'événement A apparaît avec une probabilité p; les épreuves cessent dès l'apparition de l'événement A. La variable aléatoire X est le nombre d'épreuves effectuées. Construire son tableau de répartition et son polygone de répartition; déduire les formules de son espérance mathématique, de sa variance et de son écart quadratique moyen.

Solution. La variable aléatoire X possède une répartition géométrique qui débute par l'unité [voir (4.0.32)]. Le tableau de répar-

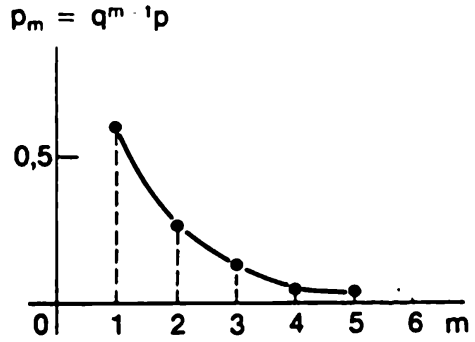


Fig. 4.42

tition de X est de la forme

X:	1	2	3	...	m	...
	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

,

où $q = 1 - p$. Pour $p = 0{,}6$ le polygone de répartition est représenté sur la figure 4.42

$$M[X] = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p = p \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}.$$

Notons que mq^{m-1} n'est rien d'autre que la dérivée par rapport à q de l'expression q^m; d'où

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^m = \frac{d}{dq} \sum_{m=1}^{\infty} q^m.$$

La dernière somme est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante à raison q; en la sommant, on trouve

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)^2}, \tag{4.42}$$

d'où $M[X] = p/(1-q)^2 = 1/p$.

La variance de la variable aléatoire X se trouve à l'aide de son moment initial d'ordre 2:

$$\alpha_2[X] = M[X^2] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} p$$

Pour la calculer multiplions par q la série (4.42); on obtient

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^m = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

La dérivation de cette série donne

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Multiplions cette expression par $p = 1 - q$ pour obtenir $M[X^2] = (1+q)/(1-q)^2$. La variance de la variable aléatoire X vaut [voir formule (4.0.17)]

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = (1+q)/(1-q)^2 - 1/(1-q)^2 = q/p^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{q}/p.$$

Ainsi, pour la répartition géométrique qui commence par l'unité

$$M[X] = 1/p; \quad D[X] = q/p^2; \quad \sigma = \sqrt{q}/p.$$

La variable aléatoire $Y = X - 1$ dont la répartition géométrique commence par zéro, possède les caractéristiques

$$M[Y] = M[X[-1 = q/p; \quad D[Y] = D[X] = q/p^2; \quad \sigma_y = \sqrt{q}/p.$$

4.43. On entreprend plusieurs tentatives pour accorder un schéma électronique complexe. La probabilité pour qu'il soit accordé dès la première tentative est égale à P_1, dès la deuxième, à P_2, dès la k-ième, à P_k, . . . Les probabilités $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_n$ sont données. Après la n-ième tentative infructueuse on cesse d'accorder le schéma. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X qui est le nombre total de tentatives réalisées.

Solution. Le tableau de répartition de la variable aléatoire X s'écrit

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ \hline P_1 & P_2 & \ldots & P_k & \ldots & 1-\sum_{k=1}^{n-1} P_k \end{array} \right|;$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n-1} iP_i + n\left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k\right];$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 P_i + n^2\left[1 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i\right] - (M[X])^2.$$

4.44. Un appareil est monté de pièces de k types; il comporte m_i pièces du type i ($i = 1, \ldots, k$) $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m\right.$; m est le nombre total

de pièces). La probabilité pour qu'une pièce du i-ième type tirée au hasard possède un défaut est q_i. L'appareil ne fonctionne que si dans sa composition il n'y a aucune pièce défectueuse. 1) Trouver la probabilité P pour que l'appareil fonctionne; 2) trouver la probabilité R_2 pour que parmi les pièces il n'y ait pas moins de deux défectueuses.

Solution. 1) P est la probabilité pour que dans m épreuves indépendantes l'événement A = {pièce défectueuse} ne se produit aucune fois:

$$P=\prod_{i=1}^{k}(1-q_i)^{m_i}=P_0; \quad 2)\ R_2=1-(P_0+P_1),$$

où P_0 est la probabilité pour que parmi les m pièces il n'y ait aucune pièce défectueuse; P_1, la probabilité pour que parmi les pièces il y ait exactement une pièce défectueuse, se calcule comme la somme des probabilités pour que parmi les m pièces du i-ième type il y ait exactement une pièce défectueuse, alors que les pièces de tous les autres types ne le soient pas:

$$P_1=m_1q_1(1-q_1)^{m_1-1}\prod_{j\neq 1}(1-q_j)^{m_j}+$$
$$+m_2q_2(1-q_2)^{m_2-1}\prod_{j\neq 2}(1-q_j)^{m_j}+\ldots=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}m_iq_i(1-q_i)^{m_i-1}\prod_{j\neq i}(1-q_j)^{m_j}.$$

4.45. Par une voie de communication on transmet k messages contenant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ signes binaires (« 0 » ou « 1 »). Les signes prennent indépendamment l'un de l'autre et avec une probabilité 0,5 les valeurs 0 ou 1. Chaque signe est perturbé (c'est-à-dire remplacé par le signe opposé) avec une probabilité p. Pour le codage on emploie un code qui corrige les erreurs d'un ou de deux signes (pratiquement avec une certitude totale). Après la correction, la présence d'une erreur ne serait-ce que dans un signe rend tout le message erroné. Trouver la probabilité R pour que ne serait-ce qu'un des k messages soit erroné.

Solution. La variable aléatoire X_i, nombre de signes erronés dans l'i-ième message, possède une répartition binomiale (4.0.23) à paramètres n_i, p. La probabilité pour que l'i-ième message soit erronée est égale à la probabilité pour que dans les n_i signes de ce message il y ait au moins trois signes erronés

$$\mathrm{P}\{X_i\geqslant 3\}=1-\mathrm{P}\{X_i<3\}=1-\sum_{j=0}^{2}C_{n_i}^{j}p^j(1-p)^{n_i-j}.$$

La probabilité pour qu'au moins un des k messages soit erroné est égale à

$$R = 1 - \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^{j} p^j (1-p)^{n_i - j}.$$

4.46. Le montage d'un appareil est assuré avec 4 pièces identiques; on a en tout 10 pièces disponibles, dont 6 sont en bon état et 4 défectueuses; il est impossible de distinguer les pièces de l'extérieur. De leur lot disponible on tire 5 pièces (une de trop pour constituer la « réserve »). Trouver la probabilité pour que pas moins de quatre des pièces tirées soient bonnes.

Solution. La variable aléatoire X est le nombre de bonnes pièces parmi les cinq pièces tirées; sa répartition est hypergéométrique à paramètres 5, 6, 4 [voir (4.0.34)]. La probabilité pour que parmi les 5 pièces m soient en bon état est égale à $P_m = C_6^m C_4^{5-m}/C_{10}^5$; d'où

$$P_4 = 5/21; \quad P_5 = 1/42; \quad \mathrm{P}\{X \geqslant 4\} = P_4 + P_5 = 11/42.$$

4.47. Soient 7 tubes radio dont 3 défectueux, impossibles à distinguer de l'extérieur des tubes neufs. On tire au hasard 4 tubes pour les engager dans 4 douilles. Dresser le tableau de répartition du nombre X de tubes radio qui pourront fonctionner et construire le polygone de répartition. Trouver l'espérance mathématique de ce nombre, sa variance et l'écart quadratique moyen.

Solution. La répartition de la variable X est hypergéométrique à paramètres $n = 4$; $a = 4$; $b = 3$

$$P_1 = C_4^1 C_3^3/C_7^4 = 4/35; \quad P_2 = C_4^2 C_3^2/C_7^4 = 18/35;$$
$$P_3 = C_4^3 C_3^1/C_7^4 = 12/35; \quad P_4 = C_4^4/C_7^4 = 1/35.$$

Son tableau de répartition est de la forme

X:	1	2	3	4
	4/35	18/35	12/35	1/35

Le polygone de répartition de la variable aléatoire X est donné par la figure 4.47. En appliquant les formules (4.0.35) et (4.0.36), calculons $\mathrm{M}[X] \approx 2{,}28$; $\mathrm{D}[X] \approx 0{,}38$.

4.48.* Dans chacune des épreuves indépendantes de la série l'événement A apparaît avec une probabilité p. La tâche consiste à obtenir k fois l'événement A. Le nombre maximal d'épreuves possibles est n (de plus, $n \geqslant 2k$). Les épreuves cessent dès que A apparaît k fois, ou lorsqu'il devient clair qu'il est impossible de l'obtenir k

fois, c'est-à-dire lorsque l'événement contraire $\overline{A}$ est apparu $n - k + 1$ fois. La variable aléatoire X est le nombre d'épreuves effectuées. Trouver sa répartition.

Solution. Les valeurs possibles de la variable aléatoire X : k, $k+1, \ldots, n-1, n$. Cherchons les probabilités correspondantes $P_m = \mathrm{P}\{X = m\}$.

Pour $k \leqslant m \leqslant n - k$, les épreuves peuvent cesser après la m-ième épreuve seulement si l'événement A a eu lieu k fois. Donc,

$P_m = \mathrm{P}\{$premières $m - 1$ épreuves ont donné $k - 1$ apparitions de l'événement A, alors que la m-ième épreuve a donné l'événement $\overline{A}\} =$

$$= C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} q^{m-k} p = C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}. \qquad (4.48.1)$$

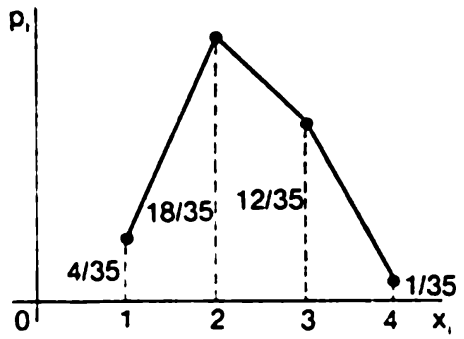


Fig. 4.47

En particulier, pour $m = k$, on a $P_k = p^k$.

Pour $n - k < m \leqslant n$ les épreuves peuvent cesser après la m-ième épreuve du fait que soit l'événement A est apparu k fois, soit l'événement contraire $\overline{A}$ est apparu $n - k + 1$ fois. Nous avons déjà calculé la probabilité de la première variante ; la probabilité de la deuxième vaut

$\mathrm{P}\{$premières $m - 1$ épreuves ont donné $n - k$ apparitions de l'événement $\overline{A}$, et la m-ième épreuve a donné l'événement $\overline{A}\} =$

$$= C_{m-1}^{n-k} p^{m-1-n+k} q^{n-k} q = C_{m-1}^{n-k} p^{m-1-n+k} q^{n-k+1}.$$

En additionnant les probabilités des deux variantes, on obtient

$$P_m = C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k} + C_{m-1}^{n-k} p^{m-1-n+k} q^{n-k+1}. \qquad (4.48.2)$$

Ainsi, la répartition de la variable aléatoire X pour $k \leqslant m \leqslant n - k$ est donnée par la formule (4.48.1), et pour $n - k < m \leqslant n$, par la formule (4.48.2).

4.49. Dans les conditions de l'énoncé précédent $n = 7$; $k = 3$; $p = 0{,}4$. Dresser le tableau de répartition de la variable aléatoire X.

Solution. Les valeurs possibles de la variable aléatoire X : 3, 4, 5, 6, 7.

$$\mathrm{P}_3 = p^3 = 0{,}4^3 = 0{,}064\,; \quad \mathrm{P}_4 = C_{4-1}^{3-1} p^3 q^{4-3} = 3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}115\,;$$

$$\mathrm{P}_5 = C_{5-1}^{3-1} p^3 q^{5-3} + C_{5-1}^{7-3} p^{5-1-7+3} q^{7-3+1} = 6 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}6^5 = 0{,}216\,;$$

$$\mathrm{P}_6 = C_{6-1}^{3-1} p^3 q^{6-3} + C_{6-1}^{7-3} p^{6-1-7+3} q^{7-3+1} = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^3 + 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}293\,;$$

$$\mathrm{P}_7 = C_{7-1}^{3-1} p^3 q^{7-3} + C_{7-1}^{7-3} p^{7-1-7+3} q^{7-3+1} = 15 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^4 + 15 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}312.$$

X :	3	4	5	6	7
	0,064	0,115	0,216	0,293	0,312

Le polygone de répartition est représenté par la figure 4.49.

4.50. Un lot compte a pièces défectueuses et b en bon état. Pour le contrôle on tire du lot n pièces. Si pas moins de m d'entre elles

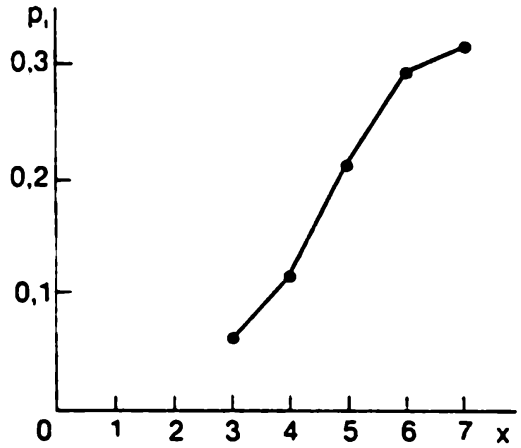


Fig. 4.49

sont défectueuses, tout le lot est rebuté. Trouver la probabilité de l'événement A = {le lot est rebuté}.

Solution. La variable aléatoire X est le nombre de pièces défectueuses dans le lot de contrôle; elle possède une répartition hypergéométrique à paramètres n, a, b

$$P(A) = P\{X \geqslant m\} = 1 - P\{X < m\} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_a^k C_b^{n-k} / C_{a+b}^n.$$

4.51. Une urne contient 100 boules blanches et 400 noires. On tire de l'urne $n = 10$ boules. Trouver par deux procédés la probabilité pour que trois d'entre elles soient blanches 1) exactement, d'après la formule (4.0.40) de la répartition hypergéométrique et 2) approximativement, en remplaçant celle-ci par la répartition binomiale.

Solution. Valeur exacte:

$$P(A) = C_{100}^3 \cdot C_{400}^7 / C_{500}^{10} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{400 \cdot 399 \cdot 398 \cdot 397 \cdot 396 \cdot 395 \cdot 394}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} :$$

$$: \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496 \cdot 495 \cdot 494 \cdot 493 \cdot 492 \cdot 491}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 2{,}0284946 \cdot 10^{-1}.$$

La valeur approchée de $P(A)$ se calcule d'après la formule (4.0.28) de la répartition binomiale, en y posant

$$P_3 = C_{10}^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 = 2{,}0132659 \cdot 10^{-1}.$$

CHAPITRE V

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES ET MIXTES (NON DISCRÈTES)

5.0. A la différence des variables aléatoires discrètes, dont l'ensemble des valeurs possibles est fini ou infini, mais dénombrable, il existe des variables aléatoires continues, non discrètes, dont l'ensemble des valeurs possibles n'est pas dénombrable et couvre sans discontinuités tout l'axe numérique ou certains de ses intervalles.

Exemples des variables aléatoires continues: 1) poids d'un grain de blé tiré au hasard du tas; 2) portée à laquelle un objet est détecté par un radar; 3) retard d'un train.

Pratiquement, pour la mesure de la valeur d'une variable aléatoire continue on recourt toujours à certaines unités (par exemple, pour la taille d'un homme, aux centimètres, pour le poids des grains, aux milligrammes), de sorte qu'après la mesure la variable continue acquiert des valeurs discrètes. Mais la précision de la mesure n'est pas rigidement liée à la variable aléatoire et peut toujours être modifiée. D'autre part, si les valeurs possibles d'une variable aléatoire sont très nombreuses et très serrées sur l'axe numérique, il est plus commode de considérer cette variable aléatoire comme non discrète, en admettant que ses valeurs possibles couvrent d'une façon continue un certain intervalle de l'axe numérique.

Parmi les variables aléatoires non discrètes nous distinguerons deux variétés, les variables aléatoires *continues* et *mixtes*. Une variable aléatoire X est dite *continue*, si sa fonction de répartition $F(x)$ est continue, et d'autre part, si elle possède une dérivée $F'(x)$ partout, sauf, peut-être, aux points isolés (fig. 5.0.1). Si dans certains intervalles la fonction de répartition croît en continu, mais admet, aux points isolés x_1, x_2, . . ., des discontinuités (fig. 5.0.2), alors la variable aléatoire X est dite *mixte*.

Pour une variable aléatoire mixte, tout comme pour une variable discrète, la fonction $F(x)$ est *continue à gauche* (sur la figure 5.0.2 les valeurs de $F(x)$ aux points de discontinuité sont marquées par points gras).

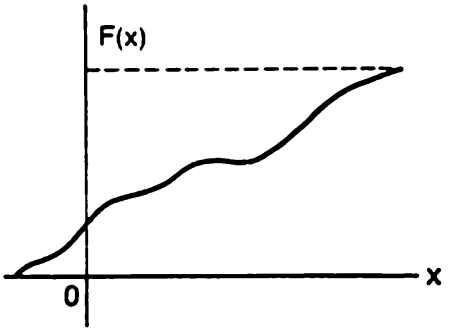


Fig. 5.0.1

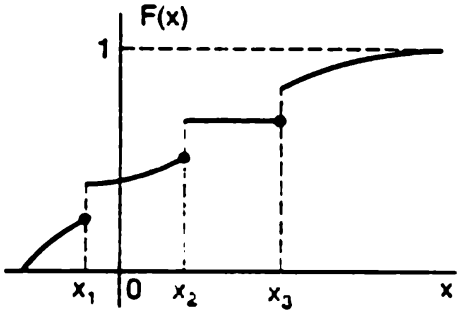


Fig. 5.0.2

La probabilité de chaque valeur isolée x d'une variable aléatoire continue est nulle:

$$P\{x = \alpha\} = 0, \quad \text{quel que soit } \alpha.$$

La probabilité pour qu'une variable aléatoire continue tombe sur l'axe numérique dans l'intervalle de α à β est égale, tout comme pour une variable aléatoire quelconque, à l'accroissement de la fonction de répartition dans cet intervalle:

$$P\{\alpha \leqslant X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha), \tag{5.0.1}$$

mais du fait que $P\{X = \alpha\} = 0$ la formule (5.0.1) peut se récrire comme suit:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) \tag{5.0.2}$$

ou, avec d'autres notations,

$$P\{X \in (\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha). \tag{5.0.3}$$

Si au point α la fonction de répartition $F(x)$ est continue, la probabilité de chaque valeur isolée α d'une variable aléatoire mixte est nulle; mais si au point α $F(x)$ fait un saut, la probabilité de cette valeur est égale au saut de la fonction de répartition au point α. La variable aléatoire mixte X dont la fonction de répartition est représentée par la figure 5.0.2 présente trois sauts aux points x_1, x_2, x_3; la probabilité de chacune de ces valeurs est égale à la valeur du saut au point donné.

Les variables aléatoires mixtes présentent une variété intermédiaire entre les variables continues et discrètes. Dans la pratique elles se présentent ordinairement lorsque la variable aléatoire continue est soumise à certaines restrictions. Par exemple, on observe la valeur de la variable aléatoire continue X à fonction

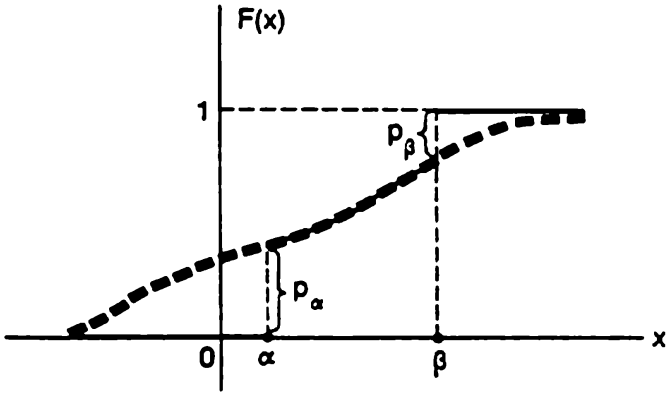


Fig. 5.0.3

de répartition $F(x)$, qui ne change pas si $X \in (\alpha, \beta)$; mais si $X < \alpha$ on pose $X = \alpha$, et si $X > \beta$, on pose $X = \beta$. Alors, la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X ainsi transformée coïncide dans l'intervalle (α, β) avec $F(x)$, alors qu'aux points α et β elle fait des sauts dont la valeur est

$$P_\alpha = P\{X < \alpha\}; \quad P_\beta = P\{X > \beta\}$$

(fig. 5.0.3), où la fonction de répartition de la variable aléatoire initiale X est visualisée par une ligne interrompue. Pour les variables aléatoires continues, en plus de la fonction de répartition $F(x)$, il existe encore une forme de la loi de répartition: la densité de probabilité.

On appelle *densité de probabilité*, ou densité de répartition, ou encore densité tout court, d'une variable aléatoire continue la dérivée de sa fonction de répartition

$$f(x) = F'(x). \tag{5.0.4}$$

Aux points où la dérivée de la fonction de répartition n'existe pas (la courbe $F(x)$ a une brisure), la densité $f(x)$ n'est déterminée d'aucune façon.

On dit que la variable aléatoire X a une densité $f(x)$ ou que la variable aléatoire X est *répartie avec une densité* $f(x)$.

On appelle *élément de probabilité* au point x d'une variable aléatoire continue X la grandeur $f(x)\,dx$ égale approximativement, à des infiniment petits d'ordres supérieurs près, à la probabilité pour que la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle élémentaire dx adjacent au point x:

$$f(x)\,dx \approx \mathrm{P}\,\{x < X < x + dx\}. \tag{5.0.5}$$

La densité $f(x)$ d'une variable aléatoire continue X quelconque possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &1)\ f(x) \geqslant 0; \\ &2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

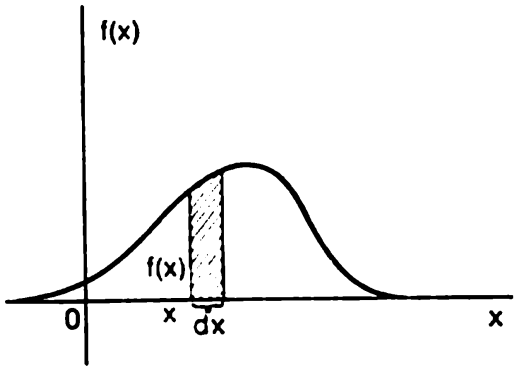


Fig. 5.0.4

Le graphique de la densité $f(x)$ s'appelle *courbe de densité de probabilité* (fig. 5.0.4). Un élément de probabilité $f(x)\,dx$ est interprété géométriquement comme l'aire du rectangle élémentaire qui repose dans l'intervalle dx adjacent au point x et dont la hauteur est $f(x)$ (fig. 5.0.4). La probabilité pour qu'une variable aléatoire continue X tombe dans l'intervalle de α à β est exprimée à l'aide de la densité $f(x)$ par la formule

$$\mathrm{P}\,\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{5.0.7}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X s'exprime à l'aide de $f(x)$ par la formule

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{5.0.8}$$

La représentation géométrique de la fonction de répartition est donnée par l'aire délimitée d'en haut par la courbe de densité, et d'en bas, par l'axe des abscisses et située à gauche du point x (fig. 5.0.5). L'aire totale délimitée par la courbe de densité et l'axe des abscisses est égale à l'unité. L'interprétation mécanique de la répartition d'une variable aléatoire continue est donnée par la masse unitaire répartie d'une façon continue suivant l'axe des abscisses avec une certaine densité, d'où le terme de *densité de probabilité*. Dans cette interprétation aucun point ne possède une masse différente de zéro; la densité de probabilité est la limite du rapport de la masse se rapportant à un intervalle élé-

mentaire dx adjacent au point x, à la longueur de cet intervalle lorsque celle-ci tend vers zéro :

$$f(x)=\lim_{dx\to 0}\frac{P\{X\in(x,\ x+dx)\}}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}=F'(x). \qquad (5.0.9)$$

On appelle *espérance mathématique* d'une variable aléatoire continue X sa moyenne calculée d'après la formule

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \qquad (5.0.10)$$

Si l'intégrale (5.0.10) est divergente, il se peut que l'espérance mathématique n'existe pas. Elle existe toujours si la densité $f(x)$ diffère de zéro seulement dans un intervalle borné de l'axe des abscisses.

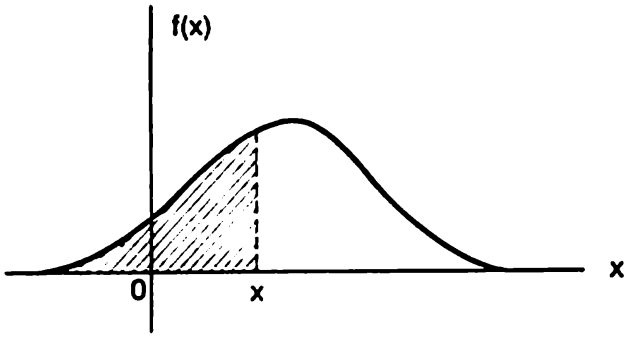


Fig. 5.0.5

Pour les variables aléatoires continues les moments initiaux et centrés de divers ordres sont exprimés par les formules :

$$\alpha_k[X]=M[X^k]=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx, \qquad (5.0.11)$$

$$\mu_k[X]=M[\mathring{X}^k]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k f(x)\,dx, \qquad (5.0.12)$$

où $m_x = M[X]$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X; $\mathring{X} = X - m_x$, la variable aléatoire centrée. Les moments centrés sont exprimés à l'aide des moments initiaux de la même façon que dans le cas des variables aléatoires discrètes

$$\left.\begin{aligned}&\mu_2[X]=\alpha_2[X]-m_x^2,\\&\mu_3[X]=\alpha_3[X]-3m_x\alpha_2[X]+2m_x^3,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\} \qquad (5.0.13)$$

La première de ces formules est employée le plus souvent ; elle exprime la variance par l'intermédiaire du moment initial d'ordre 2

$$\mu_2[X] = \alpha_2[X] - m_x^2, \qquad (5.0.14)$$

ou avec d'autres notations

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \tag{5.0.15}$$

D'après l'interprétation mécanique la variance est le moment d'inertie par rapport au centre de gravité.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire mixte à fonction de répartition $F(x)$ se compose de deux termes : d'une somme et d'une intégrale :

$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int_{(C)} x F'(x)\, dx, \tag{5.0.16}$$

où la somme concerne toutes les valeurs x_i de la variable aléatoire dont les probabilités p_i sont différentes de zéro, alors que l'intégrale porte sur tous les intervalles de continuité de la fonction de répartition.

Les moments initiaux et centrés de divers ordres des variables aléatoires mixtes se calculent d'une façon analogue :

$$\alpha_k[X] = M[X^k] = \sum_i x_i^k p_i + \int_{(C)} x^k F'(x)\, dx; \tag{5.0.17}$$

$$\mu_k[X] = M[\mathring{X}] = \sum_i (x_i - m_x)^k p_i + \int_{(C)} (x - m_x)^k F'(x)\, dx. \tag{5.0.18}$$

Les formules (5.0.13) sont valables aussi pour les variables aléatoires mixtes ; en particulier, c'est le cas de la formule (5.0.15) qui exprime la variance par l'intermédiaire du moment initial d'ordre 2.

Pour une variable aléatoire X non discrète l'espérance mathématique $M[X]$ et la variance $D[X]$ sont les caractéristiques numériques les plus importantes. On appelle *écart quadratique moyen* ou écart-type de la variable aléatoire X la racine carrée de la variance

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D[X]}. \tag{5.0.19}$$

Pour définir le degré d'aléarité d'une variable aléatoire non négative X on emploie parfois le *coefficient de variation* :

$$v_x = \frac{\sigma_x}{m_x}, \tag{5.0.20}$$

où

$$m_x = M[X].$$

En connaissant l'espérance mathématique et l'écart quadratique moyen, on peut se faire une idée sur la *gamme des valeurs possibles* de la variable aléatoire. A cet effet on utilise ce qu'on appelle la *loi des trois sigma*, d'après laquelle cette gamme se range à peu près dans l'intervalle

$$m_x \pm 3\sigma_x. \tag{5.0.21}$$

Pour *toute* variable aléatoire la probabilité pour que X dépasse ces limites n'est pas supérieure à 1/9, alors que dans la plupart des cas pratiques elle est sensiblement plus petite.

Plusieurs formules introduites pour les événements comptent leur analogue dans le schéma des variables aléatoires continues.

Si la probabilité d'un événement A dépend de la valeur prise par la variable aléatoire continue X de densité $f(x)$, la probabilité totale de A se calcule d'après l'*intégrale de la probabilité totale*:

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid x) f(x)\, dx, \tag{5.0.22}$$

où $P(A \mid x)$ est la probabilité conditionnelle de l'événement A sous l'hypothèse $\{X = x\}$.

Le schéma des variables aléatoires continues possède également un analogue de la formule de Bayes (théorème des hypothèses). Si une épreuve a donné lieu à un événement A, dont la probabilité dépend de la valeur prise par la variable aléatoire X de densité $f(x)$, alors la densité de répartition conditionnelle *a posteriori* de la variable aléatoire X, compte tenu de l'apparition de l'événement A, est égale à

$$f_A(x) = f(x)\, P(A \mid x)/P(A) \tag{5.0.23}$$

ou, en remplaçant $P(A)$ par son expression (5.0.22),

$$f_A(x) = f(x)\, P(A \mid x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, P(A \mid x)\, dx\,; \tag{5.0.24}$$

la formule (5.0.24) s'appelle *intégrale de Bayes*.

Dans le schéma des variables aléatoires continues on emploie également l'*intégrale de l'espérance mathématique totale*

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} M[X \mid y]\, f(y)\, dy, \tag{5.0.25}$$

où X est une variable aléatoire quelconque (discrète, continue ou mixte); Y, une variable aléatoire continue de densité $f(y)$; $M[X \mid y]$, l'espérance mathématique conditionnelle de la variable aléatoire X sous la condition que la variable aléatoire Y a pris la valeur y.

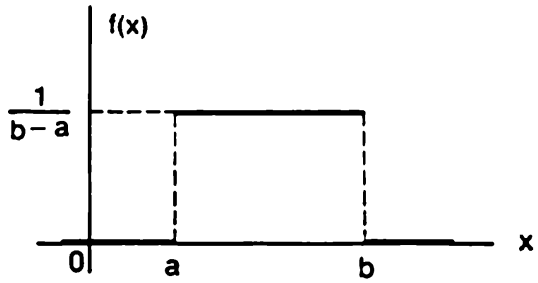


Fig. 5.0.6

Considérons certaines lois de répartition des variables aléatoires, qui se présentent souvent et qui sont importantes pour la pratique.

1. Loi de répartition uniforme. On dit qu'une variable aléatoire X est répartie suivant la *loi uniforme* dans l'intervalle (a, b), si dans cet intervalle sa densité $f(x)$ est constante et nulle hors de lui

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } x \in (a, b), \\ 0 & \text{pour } x \bar{\in} (a, b). \end{cases} \tag{5.0.26}$$

La courbe de la densité uniforme a la forme d'un rectangle (la répartition est dite parfois rectangulaire) (voir figure 5.0.6).

Les valeurs de $f(x)$ aux points a et b ne sont pas définies; ceci d'ailleurs

n'est pas essentiel, puisque la probabilité de tomber en l'un quelconque de ces points est nulle *).

L'espérance mathématique, la variance et l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire X de densité (5.0.26) s'écrivent respectivement :

$$M[X]=\frac{a+b}{2}; \quad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (5.0.27)$$

La loi de densité uniforme se présente pratiquement dans tous les cas, où il n'y a aucune raison d'admettre que certaines valeurs de X sont « préférables » par rapport à d'autres dans le sens de leur apparition.

Les erreurs apparues au cours des *mesures* dites *grossières* réalisées avec des instruments à divisions de grosse valeur, lorsque la valeur mesurée est arrondie jusqu'à la valeur entière la plus proche (plus petite ou plus grande), sont réparties suivant la loi uniforme. Par exemple, l'erreur en centimètres commise en mesurant la dimension d'une feuille de papier avec une règle graduée en centimètres obéit à la loi de répartition uniforme dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, si l'on arrondit jusqu'à la valeur entière la plus proche, dans l'intervalle $(-1, 0)$ si la valeur mesurée est arrondie jusqu'à la valeur entière plus petite, ou encore dans l'intervalle $(0, 1)$, si la valeur mesurée est arrondie jusqu'à la valeur entière plus grande. La répartition uniforme dans l'intervalle $(-1, 0)$ (mn) est caractéristique d'une erreur de la détermination du temps avec une montre dont la trotteuse indique les minutes, si la position de la trotteuse est enregistrée à l'instant où on la regarde. L'angle que fait avec l'axe Ox un rayon OM d'une roue bien équilibrée animée d'une rotation et arrêtée sous l'action du frottement est également réparti uniformément dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ (fig. 5.0.7). Dans le problème de Buffon (voir problème 1.45), l'angle déterminant l'orientation de l'aiguille se répartit également avec une densité uniforme, du fait que l'aiguille est jetée au hasard, et aucune direction n'est préférentielle par rapport aux autres. Dans les calculs d'ordinateurs les erreurs d'arrondissement ont également une répartition uniforme.

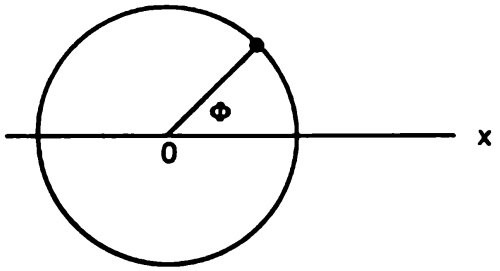


Fig. 5.0.7

Voici les conditions typiques qui déterminent l'apparition d'une répartition uniforme : le point μ est jeté au hasard sur l'axe Ox divisé en intervalles de même

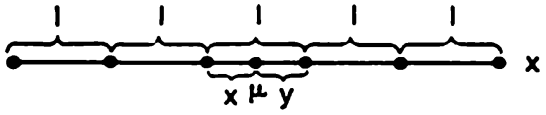


Fig. 5.0.8

longueur l (fig. 5.0.8) ; par exemple, un passager se présente à la station de métro à l'instant qui n'est lié d'aucune façon à l'horaire des rames, celles-ci succèdent l'une à l'autre exactement dans des intervalles égaux. La répartition est également uniforme dans l'intervalle $(0, l)$ pour chacun des tronçons aléatoires X, Y en lesquels le point μ divise l'intervalle où il est tombé.

*) Dans ce qui suit, en donnant la densité $f(x)$ dans divers intervalles de l'axe Ox par des formules différentes, nous n'indiquerons pas sa valeur aux extrémités des intervalles.

Dans ce qui suit, au lieu d'une écriture détaillée (5.0.26), pour la densité de répartition uniforme nous écrirons simplement

$$f(x) = 1/(b-a) \quad \text{pour} \quad x \in (a, b)$$

en entendant que sur tous les intervalles de l'axe des abscisses qui ne sont pas indiqués par l'expression, $f(x) = 0$. Nous procéderons de même pour d'autres répartitions dont la densité est donnée par des expressions différentes dans des intervalles différents de l'axe, en entendant par là que dans tous les intervalles non indiqués elle est nulle.

2. **Loi de répartition exponentielle.** On dit qu'une variable aléatoire X obéit à la loi de répartition *exponentielle* si

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pour} \quad x > 0, \tag{5.0.28}$$

où λ est le paramètre de répartition exponentielle; en abrégé

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

La loi exponentielle a une grande importance pour la théorie des processus aléatoires de Markov et dans la théorie des files d'attente (voir chapitres X et XI).

La loi exponentielle est intimement liée au flux d'événements simple (voir chapitre IV). Si on porte sur l'axe du temps Ot le flux d'événements simple

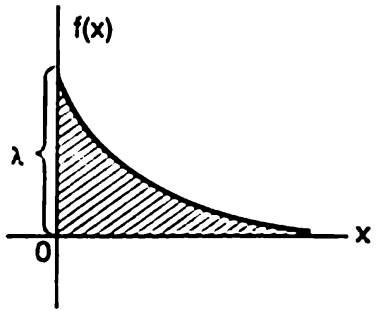


Fig. 5.0.9

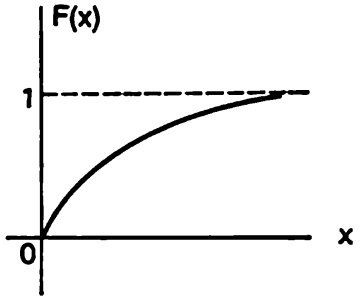


Fig. 5.0.10

de densité λ, l'intervalle de temps X entre deux événements voisins possède une répartition exponentielle de densité (5.0.28). La courbe de répartition est de la forme représentée sur la figure 5.0.9. La fonction de répartition de la variable aléatoire X à répartition exponentielle de paramètres λ s'écrit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

(Voir figure 5.0.10.)

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X répartie suivant la loi exponentielle est une grandeur inverse à son paramètre λ:

$$M[X] = 1/\lambda. \tag{5.0.29}$$

La variance et l'écart quadratique moyen valent respectivement

$$D[X] = 1/\lambda^2; \quad \sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 1/\lambda, \tag{5.0.30}$$

c'est-à-dire que *l'écart quadratique moyen d'une variable aléatoire à répartition exponentielle est égal à son espérance mathématique.* Le coefficient de variation de la répartition exponentielle vaut l'unité

$$v_x = \frac{\sigma_x}{m_x} = 1. \tag{5.0.31}$$

Les variables aléatoires à $v_x > 1$ sont « plus aléatoires » que celles à répartition exponentielle, et celles à $v_x < 1$, « moins aléatoires ». Le coefficient de variation d'une variable c non aléatoire est nul:

$$v_c = 0.$$

Pour les calculs relatifs aux répartitions exponentielles il est commode de recourir à la table de l'annexe 3 qui donne les valeurs de la fonction e^{-x}.

3. **Loi de répartition de Cauchy.** On dit que la variable aléatoire continue X suit la *loi de Cauchy* si sa densité de répartition est exprimée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{5.0.32}$$

La courbe de répartition d'après la loi de Cauchy est de la forme représentée par la figure 5.0.11. L'expression de la densité de répartition de la loi de Cauchy (5.0.32) est d'une forme bien simple, mais son application pratique est

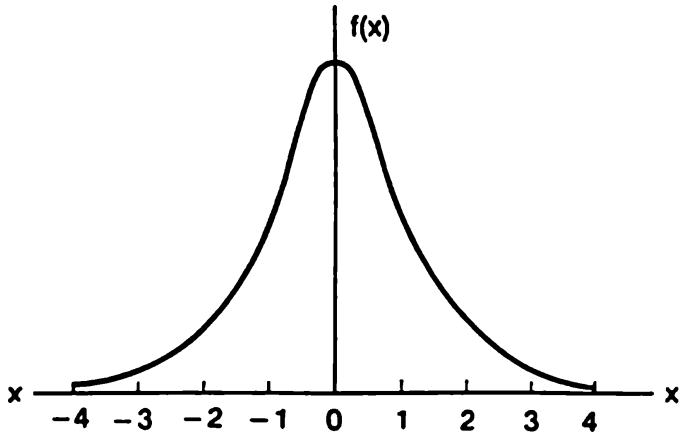


Fig. 5.0.11

rendue difficile par le fait que la variable aléatoire X répartie d'après cette loi ne possède pas les caractéristiques numériques les plus importantes, que ce soit l'espérance mathématique M $[X]$, ou la variance D $[X]$, sans parler des moments d'ordres supérieurs.

Des considérations de symétrie peuvent faire admettre que la valeur moyenne de la variable aléatoire X à densité de répartition (5.0.32) est nulle. Or, il n'en est pas ainsi: la valeur numérique de l'intégrale qui exprime l'espérance mathématique

$$\mathrm{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx \tag{5.0.33}$$

n'est nulle que si on fait tendre ses bornes inférieure et supérieure vers l'infini d'une façon « symétrique », de sorte que leurs modules soient égaux. On dit pour une telle intégrale qu'elle « converge en valeur principale ». Mais si on fait

tendre la borne inférieure vers $-\infty$, et la borne supérieure, vers $+\infty$, indépendamment l'une de l'autre, on obtient les valeurs de l'intégrale les plus différentes.

Pour ce qui est du moment initial d'ordre 2 (dans notre cas, si on convient que $m_x = 0$, c'est également la variance), l'intégrale correspondante

$$\alpha_2 [X] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

diverge et, par suite, la variance de la variable aléatoire X répartie suivant la loi de Cauchy *n'existe en général pas*, ou, si l'on veut, elle est égale à l'infini.

La loi de répartition de Cauchy se présente dans plusieurs cas pratiques. En l'appliquant il faut prendre garde, car ici les caractéristiques numériques n'existent pas, il est donc impossible de mettre à profit l'appareil mathématique très commode qu'elles présentent.

4. **Loi de répartition normale.** L'une des plus fréquentes dans les phénomènes aléatoires de la Nature est ce qu'on appelle la loi de répartition normale ou la loi de Gauss.

On dit que la variable aléatoire continue X obéit à la loi de *répartition normale*, ou est répartie d'après la loi normale, si sa densité $f(x)$ est exprimée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.0.34}$$

ou, si on utilise l'écriture d'une fonction exponentielle sous la forme $e^x = \exp\{x\}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{5.0.35}$$

La courbe représentative de la densité de la loi normale a la forme d'une cloche symétrique. Le centre de symétrie est le point d'abscisse $x = m$ (fig. 5.0.12). L'espérance mathématique de la variable aléatoire X à répartition normale est m, la variance σ^2, l'écart quadratique moyen σ. Les grandeurs m, σ s'appellent *paramètres* de la loi normale. On donne souvent à m le nom de *centre de dispersion*. Avec la variation de m la courbe de la densité de la loi normale se déplace le long de l'axe des abscisses sans changer de forme. La variation de σ équivaut à la variation de l'échelle suivant les deux axes : suivant l'axe des abscisses l'échelle augmente avec l'augmentation de σ, pour diminuer autant suivant l'axe des ordonnées (l'aire délimitée par la courbe de la densité doit rester égale à l'unité).

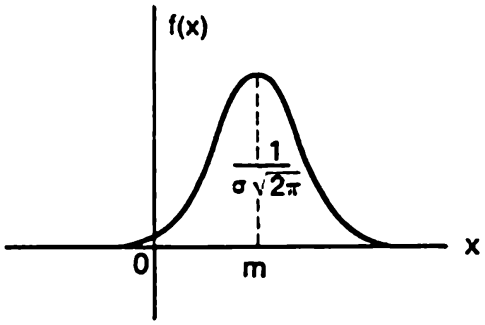


Fig. 5.0.12

Le tableau de l'annexe 4 donne les valeurs de la densité de la loi normale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{5.0.36}$$

pour le cas $m = 0$; $\sigma = 1$. En utilisant ce tableau, en y substituant à x la quantité $\frac{x-m}{\sigma}$ et en divisant le résultat par σ, on peut calculer la valeur de la densité de la loi normale pour les paramètres m et σ quelconques.

La probabilité pour que la variable aléatoire X à densité de la loi normale de paramètres m et σ tombe dans l'intervalle de α à β est exprimée par la formule

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right), \qquad (5.0.37)$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de Laplace:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (5.0.38)$$

La fonction de Laplace possède les propriétés suivantes:

1) $\Phi(0) = 0$;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (fonction impaire);
3) $\Phi(\infty) = 0{,}5$.

Les valeurs de la fonction de Laplace sont consignées sur le tableau de l'annexe 4.

La probabilité pour la variable aléatoire X de tomber dans l'intervalle d'une longueur $2l$ symétrique par rapport au centre de dispersion (c'est-à-dire la probabilité pour que la variable X s'écarte de son espérance mathématique à moins de l) est exprimée par la formule:

$$P\{|X-m| < l\} = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right). \qquad (5.0.39)$$

En particulier, lorsque $l = 3\sigma$,

$$P\{|X - m| < 3\sigma\} = 0{,}997,$$

c'est-à-dire que pour une variable aléatoire X répartie d'après la loi normale la « règle des trois sigma » est observée avec une probabilité très élevée (0,997).

La fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X à densité de loi normale est exprimée par l'intermédiaire de la fonction de Laplace $\Phi(x)$ de la façon suivante:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0{,}5. \qquad (5.0.40)$$

La loi normale se présente lorsque la variable aléatoire X se forme par sommation d'un grand nombre de termes aléatoires indépendants ou faiblement dépendants, comparables d'après leur influence sur la dispersion de la somme (pour plus de détails voir chapitre VIII où il s'agit du *théorème limite central* de la théorie des probabilités).

En règle générale, les erreurs des mesures précises ont une répartition normale, ou approchée de la loi normale, du fait qu'elles se composent d'une multitude des « erreurs élémentaires » pratiquement indépendantes, dont chacune est due à une cause isolée négligeable. Les erreurs de mesure des paramètres d'entrée assurant le fonctionnement d'un dispositif automatique se répartissent également suivant la loi normale, tout comme les erreurs d'exécution des commandes par ce dispositif.

Si le nombre N d'épreuves indépendantes dans chacune desquelles la variable aléatoire X prend une certaine valeur, est grand, leur résultat moyen

$$\overline{X} = 1/N \sum_{i=1}^{N} X_i$$

est proche de la loi normale de répartition.

Cette loi, tout en n'étant pas universelle et unique, est, pourtant, celle qui se présente le plus souvent dans la pratique, ce qui lui a valu le nom de « normale ».

Problèmes et exercices

5.1. Peut-on avoir pour une valeur quelconque de l'argument 1) une fonction de répartition supérieure à l'unité? 2) une densité de répartition supérieure à l'unité? 3) une fonction de répartition négative? 4) une densité de répartition négative?

Réponse. 1) non; 2) oui; 3) non; 4) non.

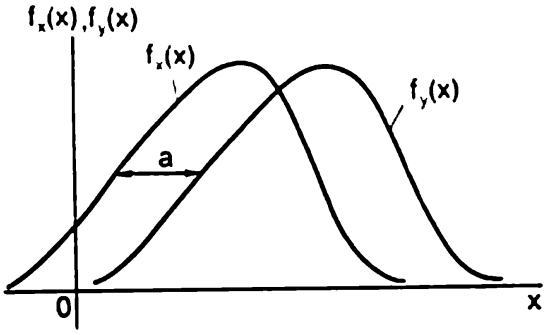


Fig. 5.3

5.2. Quelle est la dimension: 1) de la fonction de répartition; 2) de la densité de répartition; 3) de l'espérance mathématique; 4) de la variance; 5) de l'écart quadratique moyen; 6) du moment initial d'ordre 3?

Réponse. 1) sans dimension; 2) opposée à la dimension de la variable aléatoire; 3) dimension de la variable aléatoire; 4) dimension du carré de la variable aléatoire; 5) dimension de la variable aléatoire; 6) dimension du cube de la variable aléatoire.

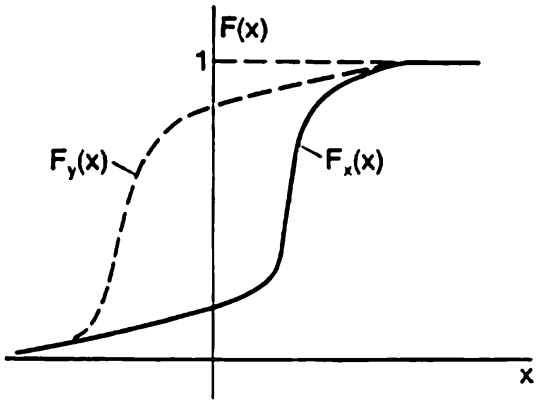


Fig. 5.4

5.3. On donne la courbe de la densité $f_x(x)$ d'une variable aléatoire X (fig. 5.3). Construire sur le même graphique la densité $f_y(x)$ de la variable aléatoire $Y = X + a$, où a est une variable non aléatoire. Ecrire l'expression de $f_y(x)$.

Solution. La courbe de densité de la variable aléatoire Y est la courbe de densité de $f_x(x)$ déplacée à droite de la valeur a: $f_y(x) = f_x(x - a)$.

5.4. On donne la courbe de la fonction de répartition $F_x(x)$ d'une variable aléatoire X (fig. 5.4). Construire sur le même graphique la fonction de répartition $F_y(x)$ de la variable aléatoire $Y = -X$.

Solution. $F_y(x) = \mathrm{P}\{Y < x\} = \mathrm{P}\{-X < x\} = \mathrm{P}\{X > -x\} = 1 - \mathrm{P}\{X < -x\} = 1 - F_x(-x)$.

Pour construire le graphique de la fonction $F_y(-x)$ il faut obtenir la réflexion spéculaire de la courbe $F_x(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées et retrancher chaque ordonnée de l'unité (voir la ligne en traits interrompus de la figure 5.4).

5.5. Construire la fonction de répartition $F(x)$ d'une variable aléatoire à répartition uniforme dans l'intervalle (a, b).

Solution. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a; \\ 1/(b-a) & \text{pour } a < x < b; \\ 0 & \text{pour } x > b; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant a; \\ (x-a)/(b-a) & \text{pour } a < x \leqslant b; \\ 1 & \text{pour } x > b \end{cases}$$

(fig. 5.5).

5.6. Une variable aléatoire X est répartie d'après « la loi du triangle rectangle » dans l'intervalle $(0, a)$ (fig. 5.6). 1) Ecrire

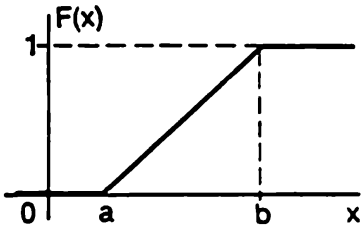


Fig. 5.5

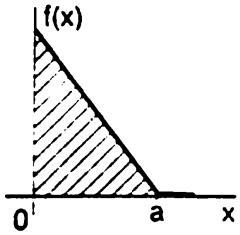


Fig. 5.6

l'expression de la densité $f(x)$; 2) trouver la fonction de répartition $F(x)$; 3) trouver la probabilité pour que la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle de $a/2$ à a; 4) trouver les caractéristiques de la variable X : m_x, D_x, σ_x, $\mu_3[X]$.

Réponse.

1) $$f(x) = \begin{cases} 2(1-x/a)/a & \text{pour } x \in (0, a); \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, a); \end{cases}$$

ou en abrégé

$$f(x) = 2(1-x/a)/a \quad \text{pour } x \in (0, a);$$

2) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 0; \\ x(2-x/a)/a & \text{pour } 0 < x \leqslant a; \\ 1 & \text{pour } x > a; \end{cases}$$

3) $P\{X \in (a/2, a)\} = F(a) - F(a/2) = 1/4$;
4) $m_x = a/3$; $D_x = a^2/18$; $\sigma_x = a/(3\sqrt{2})$;
d'après la formule (4.0.17)

$$\mu_3[X] = \alpha_3[X] - 3m_x\alpha_2[X] + 2m_x^3 = a^3/135.$$

5.7. Une variable aléatoire X obéit à la loi de Simpson (loi du triangle isocèle) dans l'intervalle de $-a$ à a (fig. 5.7, *a*). 1) Ecrire l'expression de la densité de répartition; 2) construire le graphique

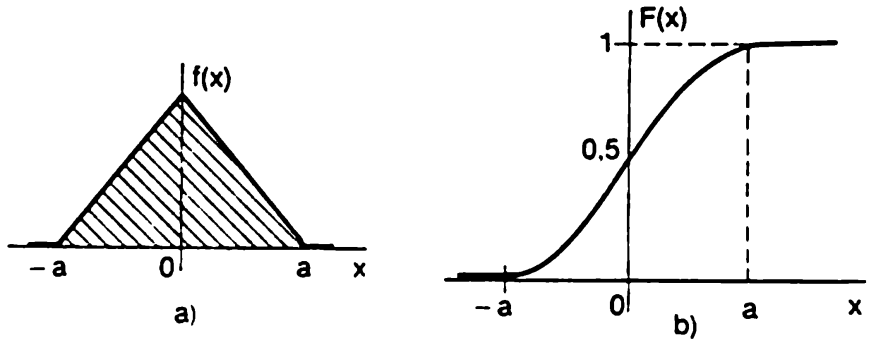


Fig. 5.7

de la fonction de répartition; 3) trouver les caractéristiques numériques de la variable aléatoire X : m_x, D_x, σ_x, $\mu_3[X]$; 4) trouver la probabilité pour que la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle $(-a/2, a)$.

Réponse.

$$1) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{pour } 0 < x < a; \\ \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right) & \text{pour } -a < x < 0; \\ 0 & \text{pour } x < -a \text{ ou } x > a, \end{cases}$$

ou en abrégé

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \quad \text{pour } x \in (-a, a);$$

2) Pour $x \in (-a, a)$ la courbe de la fonction de répartition se compose de deux tronçons de paraboles (fig. 5.7, *b*);
3) $m_x = 0$; $D_x = a^2/6$; $\sigma_x = a/\sqrt{6}$; $\mu_3[X] = 0$;
4) $P\{X \in (-a/2, a)\} = 7/8$.

5.8. Une variable aléatoire est répartie d'après la loi de Cauchy $f(x) = a/(1 + x^2)$. 1) Trouver le coefficient a; 2) trouver la fonction de répartition $F(x)$; 3) trouver la probabilité pour que la variable X tombe dans l'intervalle $(-1, +1)$; 4) les caractéristiques numériques

que sont l'espérance mathématique et la variance existent-elles pour la variable aléatoire X ?

Réponse. 1) $a = \frac{1}{\pi}$; 2) $F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$; 3) $P\{-1 < X < 1\} = 1/2$; 4) les caractéristiques m_x et D_x n'existent pas du fait que les intégrales qui les expriment sont divergentes.

5.9. Une variable aléatoire X obéit à la loi exponentielle à paramètre μ : $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ pour $x > 0$. 1) Construire la courbe de

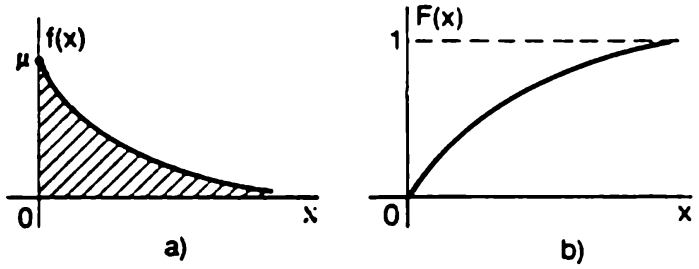


Fig. 5.9

densité ; 2) trouver la fonction de répartition $F(x)$ et construire son graphique ; 3) trouver la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à son espérance mathématique.

Réponse. 1) Voir fig. 5.9, *a* ; 2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$ (voir fig. 5.9, *b*) ;

3) $m_x = 1/\mu$; $P\{X < 1/\mu\} = F(1/\mu) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

5.10. Une variable aléatoire X obéit à la loi de Laplace $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$, où λ est un paramètre positif. 1) Trouver le coefficient a ;

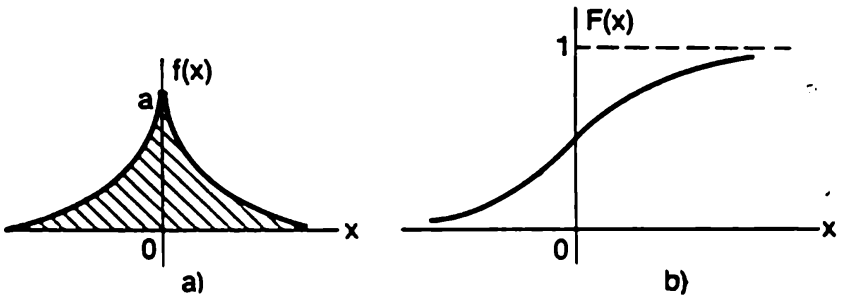


Fig. 5.10

2) construire les courbes de densité et de fonction de répartition ; 3) calculer m_x et D_x.

Réponse. 1) $a = \lambda/2$; 2) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{+\lambda x} & \text{pour } x \leqslant 0 ; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & \text{pour } x > 0, \end{cases}$

les courbes de la densité et de la fonction de répartition sont données par la figure 5.10, *a*, *b* ;

3) $m_x = 0$; $D_x = 2/\lambda^2$.

5.11. La variable aléatoire R, distance entre le point touché et le centre de la cible, est répartie suivant la loi de Rayleigh : $f(r) = Are^{-h^2r^2}$ pour $r > 0$ (fig. 5.11).

Trouver 1) le coefficient A ; 2) le mode $\mathcal{M}$ de la variable aléatoire R, c'est-à-dire l'abscisse de sa densité maximale ; 3) m_r et D_r ; 4) la probabilité pour qu'à la suite du coup tiré la distance entre le point touché et le centre de la cible s'avère plus petite que le mode.

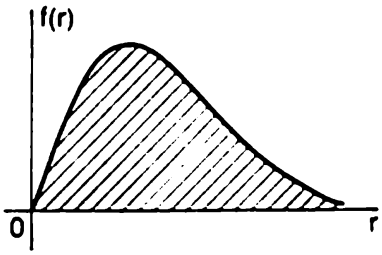


Fig. 5.11

Réponse. 1) $A = 2h^2$; 2) $\mathcal{M} = 1/(h\sqrt{2})$; 3) $m_r = \mathcal{M}\sqrt{\pi/2} = \sqrt{\pi}/(2h)$; $D_r = (4-\pi)/(4h^2) = \mathcal{M}^2(4-\pi)/2$; 4) $P\{R < \mathcal{M}\} \approx 0{,}393$.

5.12. Avec une probabilité p_1 la densité d'une variable aléatoire X est $f_1(x)$, et avec une probabilité p_2, $f_2(x)$ $(p_1 + p_2 = 1)$. Ecrire l'expression de la densité et de la fonction de répartition de la variable X. Trouver son espérance mathématique et sa variance.

Solution. D'après la formule des probabilités totales à hypothèses $H_1 = \{$la densité de la variable X est $f_1(x)\}$ et $H_2 = \{$la densité de la variable X est $f_2(x)\}$ on obtient

$$F(x) = P\{X < x\} = p_1F_1(x) + p_2F_2(x),$$

où

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx\,;\quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(x)\,dx\,;\quad f(x) = F'(x) = p_1f_1(x) + p_2f_2(x).$$

D'après la formule de l'espérance mathématique totale

$$m_x = p_1\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\,dx + p_2\int_{-\infty}^{\infty} xf_2(x)\,dx = p_1m_{x_1} + p_2m_{x_2},$$

où m_{x_1} et m_{x_2} sont les espérances mathématiques des densités $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

La variance s'obtient à l'aide du moment initial d'ordre deux

$$D_x = p_1\alpha_{21} + p_2\alpha_{22} - m_x^2 = p_1\int_{-\infty}^{\infty} x^2f_1(x)\,dx + p_2\int_{-\infty}^{\infty} x^2f_2(x)\,dx - m_x^2,$$

où α_{21} et α_{22} sont pour les densités $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les moments initiaux d'ordre 2.

5.13. Des billes de roulement sont rebutées de la façon suivante : si la bille ne passe pas par le trou de diamètre d_1, mais passe par

celui de diamètre $d_2 > d_1$, elle est considérée comme réceptable. Si l'une de ces conditions n'est pas remplie, la bille est rebutée. On sait que le diamètre D d'une bille est une variable aléatoire à répartition normale de caractéristiques $m_d = (d_1 + d_2)/2$ et $\sigma_d = (d_2 - d_1)/4$. Déterminer la probabilité p pour que la bille soit rebutée.

Solution. L'intervalle (d_1, d_2) est symétrique par rapport à m_d. D'après la formule (5.0.36), en posant $l = (d_2 - d_1)/2$, on trouve la probabilité pour que la bille ne soit pas rebutée

$$P\{|D - m_d| < (d_2 - d_1)/2\} = 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right),$$

d'où

$$p = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{2(d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}\right) = 1 - 2\Phi(2) = 0{,}0455.$$

5.14. Pour l'énoncé du problème précédent trouver l'écart quadratique moyen σ_d du diamètre de la bille, si l'on sait que le rebut fait 10 % de toute la production.

Solution. La probabilité du rebut

$$p = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0{,}1\,; \quad \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0{,}45.$$

D'après le tableau de la fonction de Laplace (annexe 5) chercher l'argument pour lequel la fonction de Laplace est égale à 0,45:

$$(d_2 - d_1)/(2\sigma_d) \approx 1{,}65\,; \quad \sigma_d \approx (d_2 - d_1)/3{,}3.$$

5.15. Un ordinateur subit des défaillances à des instants aléatoires de son fonctionnement. Le temps T du travail de l'ordinateur jusqu'à la première défaillance est réparti d'après la loi exponentielle de paramètre ν: $\varphi(t) = \nu e^{-\nu t}$ $(t > 0)$. Dès l'apparition d'une défaillance, elle est détectée sur-le-champ, et l'ordinateur est mis en réparation. Celle-ci dure un temps t_0, après quoi l'ordinateur est de nouveau mis en service. Trouver la densité $f(t)$ et la fonction de répartition $F(t)$ de l'intervalle de temps Z entre deux défaillances consécutives. Trouver son espérance mathématique et sa variance. Calculer la probabilité pour que Z soit plus grand que $2t_0$.

Solution. $Z = T + t_0$;

$$f(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu(t - t_0)} & \text{pour } t > t_0\,; \\ 0 & \text{pour } t < t_0\,; \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu(t - t_0)} & \text{pour } t > t_0\,; \\ 0 & \text{pour } t < t_0\,; \end{cases}$$

$$\mathrm{M}[Z] = 1/\nu + t_0\,; \quad D[Z] = 1/\nu^2\,; \quad \mathrm{P}\{Z > 2t_0\} = 1 - F(2t_0) = e^{-\nu t_0}.$$

5.16. Le temps T entre deux pannes d'un ordinateur est réparti d'après la loi exponentielle de paramètre λ : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$. La réalisation d'un problème défini rend impératif le fonctionnement sans défaillance de la machine pendant un temps τ. Si pendant ce temps il y a une panne, la résolution du problème doit être reprise de nouveau. Une panne est mise en évidence seulement en un temps τ après le début de la résolution. On considère la variable aléatoire Θ qui est le temps pendant lequel le problème est résolu. Trouver sa loi de répartition et son espérance mathématique (temps moyen de la résolution du problème).

Réponse. La variable aléatoire Θ est discrète et son tableau de répartition est de la forme :

$$\Theta : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \tau & 2\tau & \dots & i\tau & \dots \\ \hline p & pq & \dots & pq^{i-1} & \dots \\ \hline \end{array},$$

où $p = e^{-\lambda\tau}$; $q = 1 - p = 1 - e^{-\lambda\tau}$; $M[\Theta] = \tau/p = \tau/e^{-\lambda\tau}$.

5.17. Pour l'énoncé précédent trouver la probabilité pour que pendant le temps $t = k\tau$ donné soient résolus au moins m problèmes ($m < k$).

Solution. Notons $P_{m,k}$ la probabilité pour que pendant le temps $t = k\tau$ on résout exactement m problèmes. $P_{m,k}$ est la probabilité pour que parmi les k intervalles de temps τ il y ait exactement m tels qu'ils ne donnent pas lieu à des pannes. La probabilité pour que pendant un intervalle de temps τ il n'y ait pas de panne $p = P(T > \tau) = e^{-\lambda\tau}$. D'après le théorème de la répartition des épreuves

$$P_{m,k} = C_k^m p^m q^{k-m} = C_k^m e^{-m\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-m}.$$

La probabilité pour que soient résolus pas moins de m problèmes est

$$R_{m,k} = \sum_{i=m}^{k} P_{i,k} = \sum_{i=m}^{k} C_k^i e^{-i\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-i}$$

où, si c'est plus commode,

$$R_{m,k} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} C_k^i e^{-i\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-i}.$$

5.18. Démontrer que dans un flux simple d'intensité λ la loi de la répartition de la distance entre les événements voisins est exponentielle de paramètre λ.

Solution. Cherchons d'abord la fonction de répartition $F(t)$ de la variable aléatoire T qui est la distance entre les événements voisins :

$F(t) = \mathrm{P}\{T < t\} = \mathrm{P}$ {en un temps t apparaît au moins un événement du flux simple} $= 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$; d'où $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$.

5.19. On considère un champ poissonien des points sur un plan à densité constante λ. Trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques m_r, D_r de la distance R d'un point quelconque du champ au point voisin le plus proche.

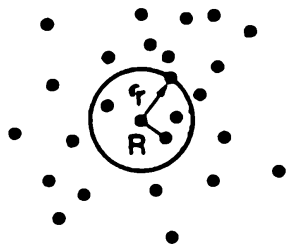


Fig. 5.19

Solution. Cherchons la fonction de répartition $F(r)$ de la variable R. A cet effet menons autour d'un point du champ un cercle de rayon r (fig. 5.19). Pour que la distance R de ce point jusqu'au point voisin le plus proche soit inférieure à r il faut que dans le cercle tombe au moins un point en plus du point donné. D'après les propriétés du champ poissonien la probabilité de cet événement ne dépend pas du fait si au centre du cercle il y a déjà un point ou non. Donc

$$F(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \ (r > 0),$$

d'où

$$f(r) = 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} \ (r > 0).$$

Cette loi de répartition s'appelle *loi de Rayleigh* (voir le problème 5.11)

$$m_r = \int_0^\infty r 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2}\, dr = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}};$$

$$\alpha_2[R] = \int_0^\infty r^2 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2}\, dr = \frac{1}{\pi\lambda};$$

$$D_r = \alpha_2[R] - m_r^2 = 1/(\pi\lambda) - 1/(4\lambda) = (4-\pi)/(4\pi\lambda).$$

5.20. Des points sont répartis d'une façon aléatoire dans un espace tridimensionnel. Le nombre de points dans un certain volume v de cet espace est une variable aléatoire qui vérifie la loi de Poisson à espérance mathématique $a = \lambda v$, où λ est le nombre moyen de points qui se trouvent dans le volume unitaire. Trouver la loi de répartition de la distance R d'un point quelconque de l'espace jusqu'au point aléatoire le plus proche.

Solution. La fonction de répartition $F(t)$ est la probabilité pour que dans une sphère de rayon r tombe au moins un point :

$$F(r) = \mathrm{P}\{R < r\} = 1 - e^{-\lambda v(r)},$$

où $v(r) = 4/3\pi r^3$ est le volume d'une sphère de rayon r; on en tire

$$f(r) = 4\pi r^2 \lambda e^{-\lambda \frac{4}{3}\pi r^3} \quad (r > 0).$$

5.21. Les étoiles d'un certain amas stellaire forment un champ poissonien de points de densité λ (nombre moyen d'étoiles par unité de volume). On fixe une étoile arbitraire pour considérer l'étoile la plus proche d'elle, puis l'étoile suivante (deuxième) dans l'ordre d'éloignement, puis la troisième, etc. Trouver la loi de répartition de la distance R_n entre l'étoile donnée et la n-ième étoile de cette série.

Réponse. La fonction de répartition $F_n(r)$ est de la forme

$$F_n(r) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \text{ où } a = \frac{4}{3}\pi r^3 \lambda \ (r > 0);$$

la densité de répartition:

$$f_n(r) = \frac{dF_n(r)}{dr} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} 4\pi\lambda r^2 \quad (r > 0).$$

5.22. Dans une forêt les arbres poussent aux points aléatoires qui forment un champ poissonien de densité λ (nombre moyen d'arbres par unité de surface). On choisit dans cette forêt un point arbitraire O pour considérer les variables aléatoires:

R_1, la distance du point O jusqu'à l'arbre le plus proche;

R_2, la distance du point O jusqu'à l'arbre suivant (deuxième dans l'ordre d'éloignement);

. . . . . .

R_n, la distance du point O jusqu'au n-ième arbre d'après l'éloignement.

Trouver la loi de répartition de chacune de ces variables aléatoires.

Solution. La fonction de répartition de la variable aléatoire est obtenue dans le problème 5.19:

$$F_1(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0).$$

La fonction de répartition $F_2(r) = P\{R_2 < r\}$ est égale à la probabilité pour que pas moins de deux arbres tombent dans le cercle de rayon r:

$$F_2(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} - \pi r^2 \lambda e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0).$$

En raisonnant d'une façon analogue, on obtient

$$F_n(r) = P\{R_n < r\} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (r > 0).$$

où $a = \pi r^2 \lambda$.

La densité $f_n(r)$ s'obtient en dérivant $F_n(r)$ par rapport à r:

$$f_n(r) = \frac{dF_n(r)}{da}\frac{da}{dr} = \left(-\sum_{k=0}^{n-1} k\frac{a^{k-1}}{k!}e^{-a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^k}{k!}e^{-a}\right) 2\pi\lambda r = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}e^{-a}2\pi\lambda r \quad (r > 0).$$

5.23. Au carrefour s'élève un signal lumineux qui pour 1 mn allume le feu vert, puis pour 0,5 mn, le feu rouge, puis encore pour 1 mn, le feu vert suivi de nouveau pour 0,5 mn de feu rouge, etc. A un instant aléatoire non lié au fonctionnement du signal une voiture s'approche du carrefour. 1) Trouver la probabilité pour que la voiture passe le carrefour sans s'arrêter; 2) trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques du temps d'attente au carrefour T_{at}; 3) construire la courbe de la fonction de répartition $F(t)$ du temps d'attente T_{at}.

Solution. L'instant du passage de la voiture par le carrefour est réparti uniformément dans l'intervalle égal à la période de la succession des couleurs du signal lumineux. Cette période est égale à $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ mn (fig. 5.23, *a*).

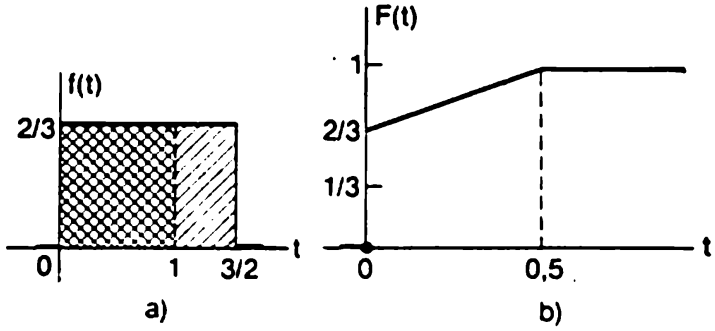


Fig. 5.23

Pour que la voiture passe par le carrefour sans s'arrêter il suffit que l'instant du passage tombe dans l'intervalle de temps (0; 1). Pour la variable aléatoire répartie uniformément dans l'intervalle (0; 1,5) la probabilité pour que la voiture tombe dans l'intervalle (0; 1) est égale à 2/3. Le temps d'attente T_{at} est une variable aléatoire mixte; avec une probabilité de 2/3 elle est nulle et avec une probabilité 1/3 elle prend avec la même densité de probabilité une valeur quelconque entre 0 et 0,5 mn. Le graphique de la fonction de répartition $F(t)$ est représenté sur la figure 5.23, *b*.

Le temps moyen d'attente au carrefour

$$M[T_{at}] = 0 \cdot 2/3 + 0{,}25 \cdot 1/3 \approx 0{,}083 \text{ mn}.$$

La variance du temps d'attente:

$$D[T_{at}] = \alpha_2[T_{at}] - (M[T_{at}])^2 = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{0,5} t^2 \frac{1}{0,5}\,dt - (0,083)^2 \approx$$

$$\approx 0,0208\,\text{mn}^2;\ \sigma_{t_{at}} \approx 0,144\,\text{mn}.$$

5.24. *Fonction de répartition normale.* Une variable aléatoire X suit une loi de répartition normale de paramètres m, σ. Trouver la fonction de répartition $F(x)$.

Solution.

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0,5.$$

5.25*. Montrer que la fonction de la forme

$$f_s(x) = ax^s e^{-\alpha^2 x^2} \text{ pour } x > 0$$

[$\alpha > 0$ et $a > 0$ sont des constantes, et s, un nombre naturel ($s = 1, 2, 3, \ldots$)] possède les propriétés de la densité de répartition. Déterminer les paramètres a et α en partant de l'espérance mathématique donnée m_x et trouver D_x.

Solution. Les paramètres a et α sont fournis par les conditions

$$\int_0^\infty ax^s e^{-(\alpha x)^2}\,dx = 1;\quad \int_0^\infty ax^{s+1} e^{-(\alpha x)^2}\,dx = m_x.$$

Les intégrales écrites ci-dessus sont ramenées à la fonction gamma d'Euler par la substitution $(\alpha x)^2 = t$:

$$\int_0^\infty x^s e^{-(\alpha x)^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha^{s+1}}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s-1}{2}}\,dt = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Big/(2\alpha^{s+1}),$$

où $\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-t} t^{m-1}\,dt$, $(m > 0)$; de plus $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$; pour des $n = 1, 2, \ldots$ entiers on obtient $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

D'après les conditions données on trouve

$$a\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Big/(2\alpha^{s+1}) = 1;\quad a\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)\Big/(2\alpha^{s+2}) = m_x,$$

d'où

$$a = \frac{2\alpha^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}; \quad \alpha = \frac{1}{m_x} \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Le moment initial d'ordre 2

$$\alpha_2[X] = \int_0^\infty ax^{s+2}e^{-(\alpha x)^2}\,dx = a\frac{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right)}{2\alpha^{s+3}} =$$

$$= a\frac{\frac{s+1}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1}\alpha^2} = \frac{s+1}{2\alpha^2},$$

d'où l'on tire

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \frac{s+1}{2\alpha^2} - m_x^2 = m_x^2\left\{\frac{(s+1)\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{s+2}{2}\right)} - 1\right\}.$$

Certaines lois de la forme $f_s(s)$ ont des noms particuliers : $f_1(x)$ s'appelle *loi de Rayleigh*, et $f_2(x)$, *loi de Maxwell*. Pour la loi de Rayleigh ($s = 1$) $f_1(x) = axe^{-\alpha^2x^2}$ ($x > 0$)

$$\alpha = \frac{1}{m_x}\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad a = 2\alpha^2 = \frac{\pi}{2m_x^2}; \quad D_x = m_x^2\left[\frac{4}{\pi} - 1\right]\alpha_2[X] = \frac{a}{2}.$$

Pour la loi de Maxwell ($s = 2$) $f_2(x) = ax^2e^{-\alpha^2x^2}$

$$\alpha = \frac{2}{m_x\sqrt{\pi}}; \quad a = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{\pi^2 m_x^3}; \quad D_x = m_x^2\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right).$$

Note. Toutes les lois de la forme

$$f_s(x) = ax^s e^{-\alpha^2x^2} \quad (x > 0)$$

pour un s donné sont à paramètre unique, c'est-à-dire dépendent d'un seul paramètre qui peut être donné, par exemple, par l'espérance mathématique ou la variance.

5.26 *. *Moments de la loi normale.* Soit une variable aléatoire X répartie suivant la loi normale à paramètres m et σ. Trouver l'expression de a grandeur $\alpha_s[X]$ qui est le moment initial d'ordre s.

Solution. Exprimons les moments initiaux $\alpha_s[X] = M[X^s]$ par l'intermédiaire des moments centrés $\mu_s[X] = M[(X - m)^s]$:

$$\alpha_s = M[(X - m + m)^s] = \sum_{k=0}^{s} C_s^k \mu_k[X]\, m^{s-k}; \quad \mu_0[X] = 1.$$

Pour les moments centrés avec $s = 2n+1$ impair

$$\mu_s[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^s e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = 0$$

et avec $s = 2n$ pair, d'après les formules du problème précédent,

$$\mu_s[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^s e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y^s e^{-\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2} (\sigma\sqrt{2})^{2n+1} = (2n+1)!!\,\sigma^{2n}.$$

Par exemple:

$$\mu_2[X] = \sigma^2; \qquad \alpha_2[X] = m^2 + \sigma^2;$$
$$\alpha_3[X] = m^3 + 3\sigma^2 m;$$
$$\mu_4[X] = 3\sigma^4; \qquad \alpha_4[X] = m^4 + 6\sigma^2 m^2 + 3\sigma^4;$$
$$\alpha_5[X] = m^5 + 10\sigma^2 m^3 + 5\cdot 3\sigma^4 m;$$
$$\mu_6[X] = 15\sigma^6; \qquad \alpha_6[X] = m^6 + 15\sigma^2 m^4 + 15\cdot 3\sigma^4 m^2 + 15\sigma^6.$$

5.27. Une variable aléatoire X obéit à la loi de répartition normale à paramètres m et σ. Ecrire l'expression de sa fonction de répartition $F(x) = P\{X < x\}$. Ecrire l'expression de la fonction de répartition $\Psi(y) = P\{Y < y\}$ de la variable aléatoire $Y = -X$.

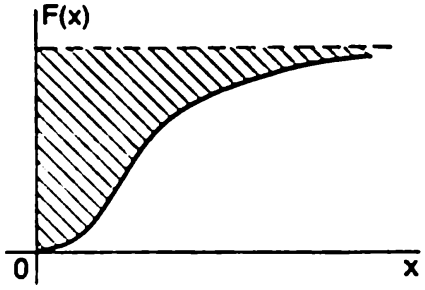


Fig. 5.28

Solution. D'après la solution du problème 5.24:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0{,}5;$$

$$\Psi(y) = P\{Y < y\} = P\{-X < y\} =$$
$$= P(X > -y) - 1 = F(y) =$$
$$= \Phi\left(\frac{y+m}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

5.28*. La fonction de répartition $F(x)$ d'une variable aléatoire non négative X est donnée par le graphique de la figure 5.28. Son espérance mathématique est égale à m_x. Montrer que la représentation géométrique de m_x peut être donnée par l'aire hachurée de la

figure 5.28 (délimitée par la courbe $y = F(x)$, la droite $y = 1$ et l'axe des ordonnées).

Solution. Soit

$$m_x = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \int_0^\infty xF'(x)\,dx = -\int_0^\infty x[1-F(x)]'\,dx.$$

En appliquant l'intégration par parties, on obtient

$$m_x = -x[1-F(x)]\Big|_0^\infty + \int_0^\infty [1-F(x)]dx.$$

Montrons que le premier terme est nul

$$x[1-F(x)]\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] = 0.$$

En effet, pour une variable aléatoire non négative X qui possède une espérance mathématique finie, la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty xf(x)\,dx$ amène $\int_K^\infty xf(x)\,dx \to 0$ pour $K \to \infty$, et puisque

$$K\int_K^\infty f(x)\,dx \leqslant \int_K^\infty xf(x)\,dx,$$

il vient : $K[1-F(K)] \to 0$ pour $K \to \infty$. Par conséquent, $\lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] = 0$.

On en tire

$$m_x = \int_0^\infty [1-F(x)]\,dx,$$

or, ceci est justement l'aire hachurée de la figure 5.28.

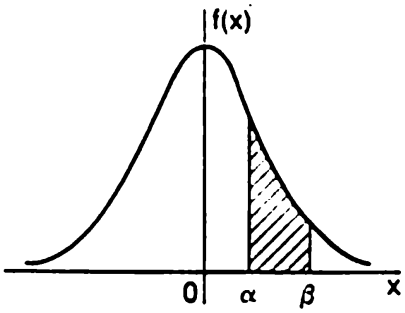


Fig. 5.29

5.29. Une variable aléatoire X suit la loi normale à espérance mathématique $m = 0$ (fig. 5.29). L'intervalle (α, β), qui n'inclut pas l'origine des coordonnées, est donné. Pour quelle valeur de l'écart quadratique moyen σ la probabilité pour que la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle (α, β) atteint-elle le maximum ?

Solution. La valeur de σ s'obtient en dérivant par rapport à σ la probabilité de tomber dans l'intervalle (α, β) et en annulant la

dérivée. On a

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\frac{\beta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\};$$

$$\frac{d}{d\sigma}[P\{\alpha < X < \beta\}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right) - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right) \right\} = 0,$$

on en tire

$$\beta e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} = \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}.$$

Par conséquent,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln\beta - \ln\alpha)}} = \sqrt{\frac{\beta+\alpha}{2} \frac{\beta-\alpha}{\ln\beta - \ln\alpha}}.$$

Pour le petit intervalle $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$

$$\sigma \approx a\,[1 - (\varepsilon/a)^2/6] \approx a.$$

Par exemple, pour $\varepsilon/a < 0{,}24$, la formule $\sigma \approx a$ donne une erreur inférieure à 1 %.

5.30. Soit une variable aléatoire X qui obéit à la loi normale à espérance mathématique m et écart quadratique moyen σ. Il faut remplacer approximativement la loi normale par une loi uniforme dans l'intervalle (α, β); les limites α, β doivent être choisies de façon à conserver sans changer les caractéristiques essentielles de la variable aléatoire X que sont l'espérance mathématique et la variance.

Solution. Pour la répartition uniforme dans l'intervalle (α, β)

$$M[X] = (\alpha + \beta)/2; \quad \sigma[X] = (\beta - \alpha)/(2\sqrt{3});$$

$$(\alpha + \beta)/2 = m; \quad (\beta - \alpha)/(2\sqrt{3}) = \sigma.$$

En résolvant ces équations par rapport à α et β, on obtient

$$\alpha = m - \sigma\sqrt{3}; \quad \beta = m + \sigma\sqrt{3}.$$

5.31. La densité d'une variable aléatoire continue X est $f(x)$. Une épreuve a établi l'apparition de l'événement $A = \{X \in (\alpha, \beta)\}$ [la variable aléatoire X est tombée dans l'intervalle (α, β)]. Trouver la densité conditionnelle $f_A(x)$ de la variable aléatoire X en présence de l'événement A.

Solution. $P(A) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$. D'après l'intégrale de Bayes (5.0.24) on a

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) \Big/ \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right\} & \text{pour } x \in (\alpha, \beta); \\ 0 & \text{pour } x \notin (\alpha, \beta). \end{cases} \tag{5.31}$$

Les courbes de répartition $f(x)$ et $f_A(x)$ sont représentées sur la figure 5.31. L'ordonnée de la courbe $f_A(x)$ est égale en chaque point à l'ordonnée de la courbe $f(x)$ divisée par l'aire S hachurée sur la figure 5.31. Puisque $S < 1$, alors $f_A(x) > f(x)$ pour tout $x \in (\alpha, \beta)$.

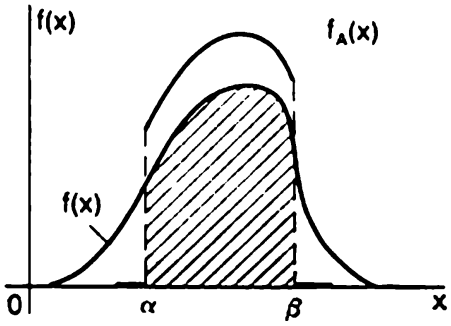


Fig. 5.31

5.32. Une entreprise fabrique des pièces homogènes dont la cote nominale est l_0; en fait, on observe des écarts aléatoires de cette dimension, répartis d'après la loi normale à espérance mathématique $m = 0$ et écart quadratique moyen σ. Au contrôle, toutes les pièces dont les cotes s'écartent de la valeur nominale à plus de la tolérance Δ sont rebutées. Trouver la probabilité de l'événement $A = \{$la pièce est rebutée$\}$. Trouver et construire la densité de probabilité pour la cote de la pièce ayant passé le contrôle.

Solution. $P(A) = P\{|X| > \Delta\} = 1 - 2\Phi(\Delta/\sigma)$; $P(\bar{A}) = 2\Phi(\Delta/\sigma)$.

D'après la formule (5.31)

$$f_{\bar{A}}(x) = \frac{f(x)}{P(\bar{A})} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi(\Delta/\sigma)}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour } |x| < \Delta.$$

La cote L de la pièce qui a subi le contrôle est égale à l'erreur X plus la cote nominale l_0 et possède la densité conditionnelle

$$\varphi_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi(\Delta/\sigma)}\, e^{-\frac{(x-l_0)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour } x \in (l_0 - \Delta,\ l_0 + \Delta),$$

représentée sur la figure 5.32.

5.33. La fiabilité p d'un dispositif radiotechnique dépend aussi bien du temps total τ passé depuis la mise en circuit, que du fait si à

un instant quelconque $t < \tau$ le stabilisateur de tension subit une défaillance. Si le stabilisateur ne tombe pas en panne jusqu'à l'instant τ, la fiabilité est donnée par la fonction $p = p_0(\tau)$; si la défaillance a lieu à l'instant $t < \tau$, la fiabilité est fonction de deux arguments: $p = p_1(\tau, t)$. Le temps de fonctionnement sans défaillance du stabilisateur est une variable aléatoire T de densité $f(t)$. Trouver la fonction de répartition $F_\Theta(x)$ de la durée Θ du fonctionnement sans défaillance du dispositif et son espérance mathématique m_Θ.

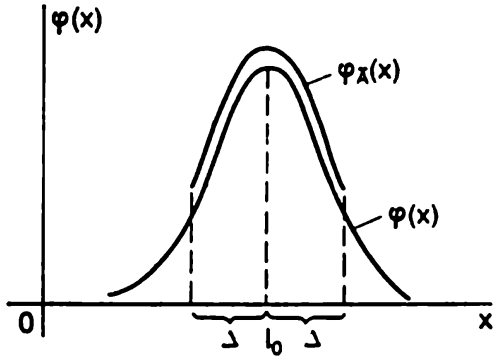


Fig. 5.32

Solution. La fiabilité totale de l'installation (la probabilité de son fonctionnement sans défaillance pendant le temps τ) se trouve d'après l'intégrale de la probabilité totale

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(t, \tau) f(t)\, dt + p_0(\tau) \int_\tau^\infty f(t)\, dt.$$

La fonction de répartition du temps Θ

$$F_\Theta(x) = \mathrm{P}\{\Theta < x\} = 1 - p(x).$$

La variable Θ étant non négative, il vient (voir énoncé 5.28):

$$m_\Theta = \mathrm{M}[\Theta] = \int_0^\infty [1 - F_\Theta(x)]\, dx = \int_0^\infty p(\tau)\, d\tau.$$

5.34. On attend l'arrivée par la voie radio d'un message S; l'instant T de sa réception est aléatoire et possède la densité $f(t)$. A un certain instant τ on a établi que le message n'est pas encore reçu. Trouver sous cette condition la densité de répartition $\varphi(t)$ du temps Θ qui reste jusqu'à l'arrivée du message S.

Solution. D'après l'intégrale de Bayes, $f_A(t)$, la densité conditionnelle de la variable T sous la condition de la réalisation de l'événement $A = \{$avant l'instant τ le message n'est pas reçu$\}$, est

$$f_A(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{f(t)}{1 - \int_0^\tau f(t)\, dt} & \text{pour } t > \tau: \\ 0 & \text{pour } t < \tau. \end{cases}$$

Etant donné que $\Theta = T - \tau$, il vient

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{1 - \int\limits_0^{\tau} f(t)\,dt} & \text{pour } t > 0; \\ 0 & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

Sur la figure 5.34 sont visualisés $f(t)$ et $\varphi(t)$; pour la loi $\varphi(t)$ l'origine des coordonnées est confondue avec le point τ.

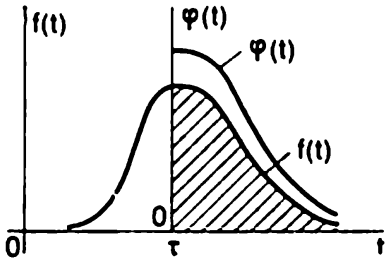


Fig. 5.34

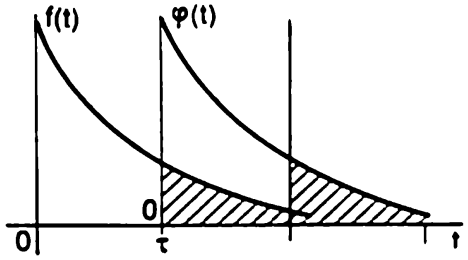


Fig. 5.35

5.35. L'instant T de la réalisation d'un événement A est une variable aléatoire dont la densité obéit à la loi exponentielle $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$. A l'instant τ on apprend que l'événement n'a pas encore eu lieu. Trouver la densité conditionnelle $\varphi(t)$ du temps Θ qui reste jusqu'au début de l'événement.

Solution. On observe l'événement B = {jusqu'à l'instant τ l'événement A n'est pas encore survenu}.

$$P(B) = 1 - \int\limits_0^{\tau} f(t)\,dt = e^{-\lambda\tau}.$$

$$f_B(t) = f(t)/P(B) = \lambda e^{-\lambda\tau}/e^{-\lambda\tau} = \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} \quad (t > \tau).$$

La densité conditionnelle de la variable aléatoire $\Theta = T - \tau$ est

$$\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t > 0,$$

c'est-à-dire la densité exponentielle qui coïncide avec $f(t)$ (voir fig. 5.35). De la sorte, pour la densité exponentielle de T, la densité conditionnelle du temps Θ resté jusqu'à la réalisation de l'événement ne dépend pas du temps que nous avons mis déjà à attendre l'événement. La densité exponentielle est la seule qui présente cette propriété. Rappelons que dans un flux simple l'intervalle de temps entre deux événements voisins est justement réparti d'après la loi exponentielle: le temps resté jusqu'à la venue de l'événement successif ne dépend pas du temps que nous avons mis à l'attendre (dans un flux simple ceci résulte de l'absence de la postaction).

5.36. La probabilité pour qu'un tube radio subit une défaillance à l'instant de mise en circuit dépend de la tension U du circuit et est égale à $q(U)$. La tension U est aléatoire et sa densité suit la loi normale de paramètres u_0 et σ_u. Trouver la probabilité totale q de la défaillance du tube à l'instant de branchement.

Solution. D'après la formule de l'intégrale des probabilités totales (5.0.23)

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} q(u) f(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_u} \int_{-\infty}^{\infty} q(u)\, e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\sigma_u^2}}\, du.$$

5.37. Une tension aléatoire U de densité $f(u)$ passe par un limiteur qui « coupe » toutes les valeurs de la tension inférieures à u_1 et supé-

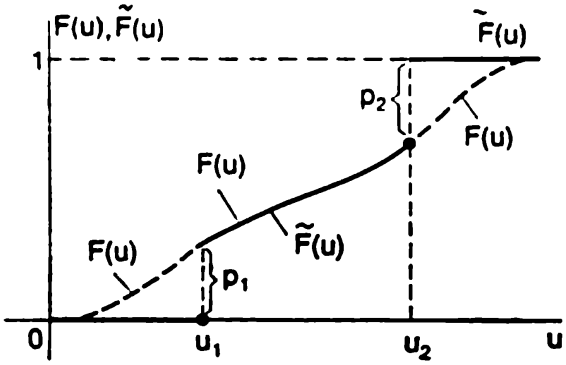


Fig. 5.37

rieures à u_2, dans le premier cas en l'élevant à u_1 et dans le deuxième, en la réduisant à u_2. Trouver la répartition de la variable aléatoire $\tilde{U}$, tension qui a passé par le limiteur, et calculer son espérance mathématique et sa variance.

Solution.

$$\tilde{U} = \begin{cases} u_1 \text{ pour } U < u_1; \\ U \text{ pour } u_1 < U < u_2; \\ u_2 \text{ pour } U > u_2. \end{cases}$$

La variable aléatoire $\tilde{U}$ est du type mixte; deux de ses valeurs u_1 et u_2 ont des probabilités p_1 et p_2 différentes de zéro; pour toutes les valeurs de u entre u_1 et u_2 la fonction de répartition $\tilde{F}(u)$ de la variable $\tilde{U}$ est continue et coïncide avec

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)\, du; \quad p_1 = \int_{-\infty}^{u_1} f(u)\, du; \quad p_2 = \int_{u_2}^{\infty} f(u)\, du.$$

Le graphique de la fonction $\widetilde{F}(u)$ est représenté sur la figure 5.37.

$$M[U] = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \int_{u_1}^{u_2} u f(u)\, du;$$

$$D[U] = \alpha_2[U] - (M[U])^2;$$

$$\alpha_2[U] = u_1^2 p_1 + u_2^2 p_2 + \int_{u_1}^{u_2} u^2 f(u)\, du.$$

5.38. Un message de durée l est transmis par la voie radio (fig. 5.38, *a*). Pour « étouffer » le message on réalise un brouillage de du-

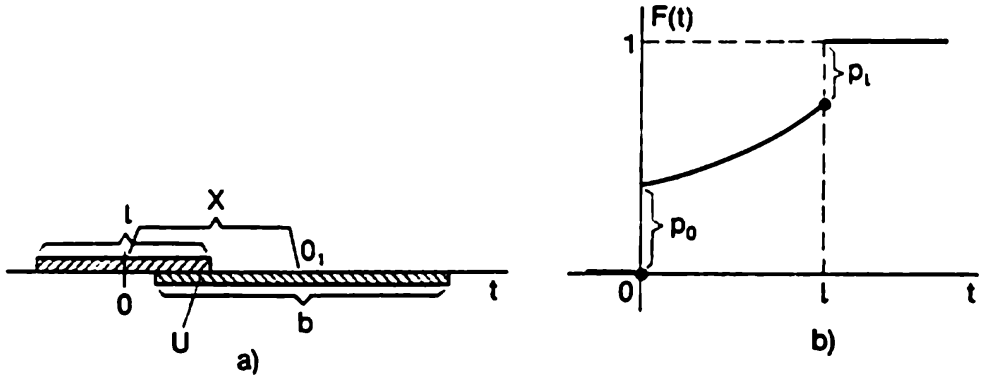


Fig. 5.38

rée $b > l$ établi de façon que le centre du signal brouillant O_1 coïncide avec le centre du message O.

Dans la réalité, les erreurs aléatoires font que le centre du brouillage est décalé de X par rapport au centre du message. La variable aléatoire X est répartie d'après la loi normale de paramètres $m = 0$, $\sigma = l/2$. Trouver la répartition de la variable aléatoire U qui est la durée de la partie du message « étouffée » par le brouillage, calculer l'espérance mathématique m_u, la variance D_u et l'écart quadratique moyen σ_u.

Solution. La variable aléatoire U est mixte; elle prend deux valeurs 0 et l avec des probabilités différentes de zéro; dans l'intervalle de 0 à l la fonction de répartition $F(u)$ est continue. Le brouillage b n'entrave pas le message l ($U = 0$) si son centre est éloigné de O à plus de $(b + l)/2$.

$$p_0 = P\{U = 0\} = P\left\{|X| > \frac{b+l}{2}\right\} = 1 - P\left\{|X| < \frac{b+l}{2}\right\} =$$

$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l}{2}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l}{l}\right).$$

Pour que le brouillage b couvre totalement le message l ($U = l$) il faut que son centre O_1 soit éloigné de O à moins de $(b - l)/2$:

$$p_l = \mathrm{P}\{U = l\} = \mathrm{P}\left\{|X| < \frac{b-l}{2}\right\} = 2\Phi\left(\frac{b-l}{l}\right).$$

Avec $(b - l)/2 < X < (b + l)/2$ il s'avère que se trouve couverte une certaine partie U du message l ($0 < U < l$). Cherchons la fonction de répartition de la variable aléatoire U: $\mathrm{P}\{U < u\}$ pour $0 < u < l$. Pour que la partie couverte par le brouillage soit inférieure à u, il faut que le centre du brouillage O_1 se trouve par rapport au centre du message plus loin qu'à $(b + l)/2 - u = (b + l - 2u)/2$:

$$F(u) = \mathrm{P}\left\{|X| > \frac{b+l-2u}{2}\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{|X| < \frac{b+l-2u}{2}\right\} = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l-2u}{l}\right).$$

Ainsi, dans l'intervalle de 0 à l $F(u) = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l-2u}{l}\right)$ (fig. 5.38, b).

Pour trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire U, il faut trouver $F'(u)$ dans l'intervalle $(0, l)$. Compte tenu que

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad \Phi\left(\frac{b+l-2u}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{b+l-2u}{l}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et en dérivant $F(u)$ par rapport à la variable u figurant dans la limite supérieure, on trouve

$$F'(u)\,du = \frac{4}{l\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(b+l-2u)^2}{2l^2}} du \quad (0 < u < l);$$

$$\mathrm{M}[U] = 0 \cdot p_0 + lp_l + \int_0^l uF'(u)\,du;$$

$$\alpha_2[U] = 0 \cdot p_0 + l^2 p_l + \int_0^l u^2 F'(u)\,du;$$

$$\mathrm{D}[U] = \alpha_2[U] - (\mathrm{M}[U])^2; \quad \sigma_u = \sqrt{\mathrm{D}[U]}.$$

5.39. Une variable aléatoire X possède avec la probabilité p_1 la densité $f_1(x)$, avec la probabilité p_2, la densité $f_2(x)$, . . ., avec la probabilité p_i, la densité $f_i(x)$ ($i = 1, \ldots, n$). Trouver la densité totale (moyenne) de la variable aléatoire X.

Solution. Cherchons l'élément de probabilité $f(x)\,dx$ d'après la formule des probabilités totales aux hypothèses $H_i = \{$la densité de la variable aléatoire est $f_i(x)\}$ ($i = 1, \ldots, n$). D'après la formule des probabilités totales

$$f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x)\,dx,$$

d'où

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x).$$

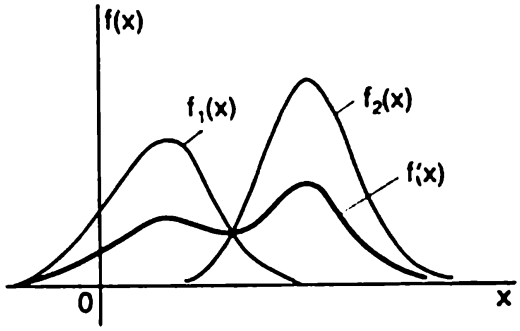


Fig. 5.39

En particulier, s'il y a deux hypothèses et leurs probabilités valent $p_1 = p_2 = 1/2$, alors $f(x)$ est la demi-somme des densités $f_1(x)$ et $f_2(x)$ (fig. 5.39). La présence de deux bosses de la courbe de densité fait toujours penser que la densité est obtenue par moyennage de deux densités de caractères différents.

5.40. Une variable aléatoire X avec la probabilité 0,4 est répartie suivant la loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 2$, et avec la pro-

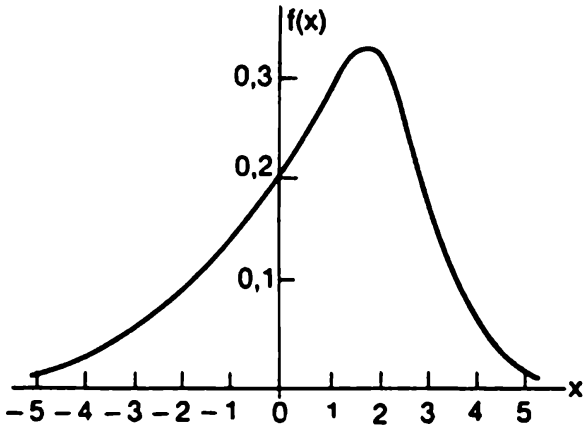


Fig. 5.40

babilité 0,6, suivant la loi normale de paramètres $m = 2$ et $\sigma = 1$. Trouver la densité de répartition de la variable aléatoire X.

Réponse. $f(x) = \dfrac{0{,}4}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{8}} + \dfrac{0{,}6}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

Le graphique de $f(x)$ est représenté sur la figure 5.40.

5.41. Soient deux variables aléatoires, dont X, discrète, est à tableau de répartition

X :	x_1	x_2	...	x_n
	p_1	p_2	...	p_n

et Y, continue, de densité $f(y)$. Les variables X et Y prennent leurs valeurs indépendamment l'une de l'autre. Leur somme $Z = X + Y$ est-elle une variable aléatoire discrète, continue ou mixte? Trouver sa répartition.

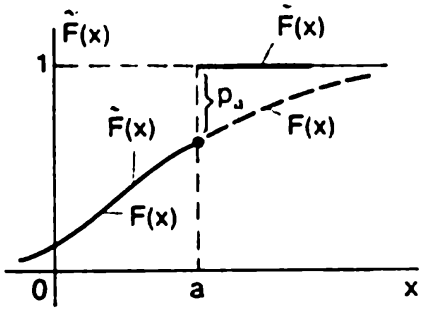


Fig. 5.42

Solution. La variable aléatoire Z est continue. Sa densité $\tilde{f}(z)$ se trouve d'après la formule des probabilités totales aux hypothèses $H_1 = \{X = x_1\}$; $H_2 = \{X = x_2\}$; ...; $H_n = \{X = x_n\}$. Pour l'i-ième hypothèse l'élément conditionnel de probabilité de la variable aléatoire Z est égal à

$$f_i(z)\,dz = f(z - x_i)\,dz.$$

L'élément total de probabilité

$$\tilde{f}(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} p_i f(z - x_i)\,dz,$$

on en tire

$$\tilde{f}(z) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(z - x_i).$$

5.42. La variable $Z = \min\{X, a\}$ est-elle une variable discrète, continue ou mixte si X est une variable aléatoire continue à densité $f(x)$; a, une quantité non aléatoire? Trouver la répartition de Z, son espérance mathématique et sa variance.

Solution. La variable aléatoire Z est déterminée par la formule

$$Z = \begin{cases} X, & \text{si } X < a, \\ a, & \text{si } X \geqslant a. \end{cases}$$

La valeur de $Z = a$ possède la probabilité

$$p_a = \mathrm{P}\{X \geqslant a\} = \mathrm{P}\{X > a\} = \int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

Pour $p_a > 0$, Z est une variable aléatoire mixte; pour $p_a = 0$ elle est continue.

Pour $z < a$, la fonction de répartition $\widetilde{F}(z)$ de la variable aléatoire Z coïncide avec $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ (fig. 5.42).

$$M[Z] = ap_a + \int_{-\infty}^{a} xf(x)\,dx;$$

$$D[Z] = \alpha_2[Z] - (M[Z])^2; \quad \alpha_2[Z] = a^2 p_a + \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)\,dx.$$

Si $P\{X \geqslant a\} = 0$, alors $Z = \min\{X, a\} = X$; $\widetilde{F}(z) = F(z)$.

5.43. Deux sources A et B envoient des signaux périodiques de même durée l et de mêmes intervalles L entre eux (fig. 5.43, *a*);

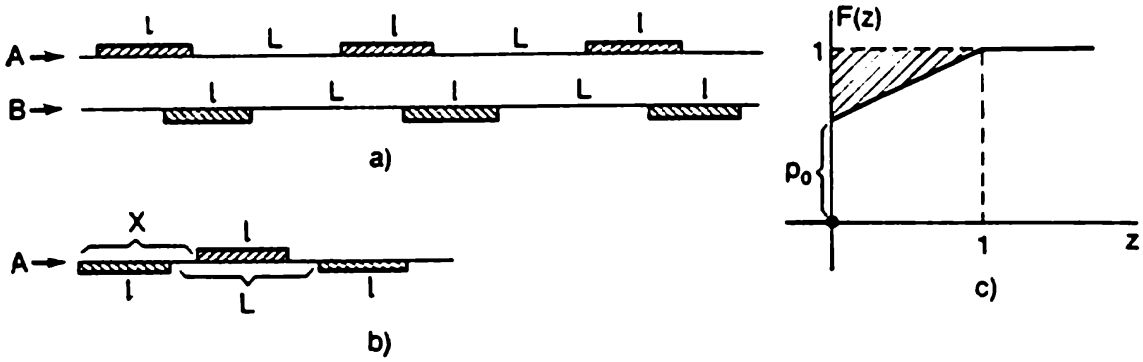


Fig. 5.43

$l < L$. Les instants de la transmission des messages à partir des sources A et B ne sont pas accordés. Lorsque les messages transmis se superposent, ils sont perturbés. Trouver 1) la probabilité R pour qu'au moins un message soit perturbé (totalement ou en partie); 2) la probabilité pour qu'il soit perturbé pas plus de 10 % de chaque message; 3) la fonction de répartition de la variable aléatoire Z, « part du texte perturbé »; 4) la part moyenne $\bar{z}$ du texte perturbé.

Solution. Supposons que l'axe B (voir fig. 5.43, *a*) se superpose au hasard sur l'axe A. Les débuts et les fins de tous les messages étant liés fonctionnellement, il suffit d'envisager sur l'axe A seulement un couple d'intervalles voisins : l, message ; L, intervalle (fig. 5.43, *b*). Retenons comme origine celle de l'intervalle l sur l'axe A et notons X l'abscisse de l'origine de l'intervalle l le plus proche dans le temps sur l'axe B. La variable X est répartie avec une densité constante dans

l'intervalle $L + l$. Il est évident que la non-superposition des messages aura lieu dans le cas où $l < X < L$; la probabilité de ceci

$$p_0 = (L - l)/(L + l); \quad R = 1 - p_0 = 1 - (L - l)/(L + l).$$

Afin de calculer la probabilité p pour que les messages se recouvrent pas plus qu'à 10 %, il faut augmenter l'intervalle de « non-superposition » favorable $L - l$ de deux intervalles de durée de $0{,}1\ l$; on obtient $L - l + 2 \cdot 0{,}1\ l = L - 0{,}8\ l$; $p = (L - 0{,}8\ l)/(L + l)$. La variable aléatoire Z, part des messages perturbés, est une variable mixte; sa valeur $z = 0$ a une probabilité différente de zéro $p_0 = (L - l)/(L + l)$; pour $0 < z < 1$, $F(z) = [L - l(1 - 2z)]/(L + l)$; pour $z = 1$, cette expression se transforme en unité: $F(1) = 1$, et entre $z = 0$ et $z = 1$ elle croît linéairement (fig. 5.43, *c*).

L'espérance mathématique de la variable aléatoire Z est égale à l'aire hachurée de la figure 5.43, *c*, c'est-à-dire $\bar{z} = [1 - (L - l)/(L + l)]/2 = l/(L + l)$.

5.44. Soit une variable continue X à densité $f(x)$ (fig. 5.44, *a*). Sa valeur observée se conserve si elle tombe dans l'intervalle (x_1, x_2),

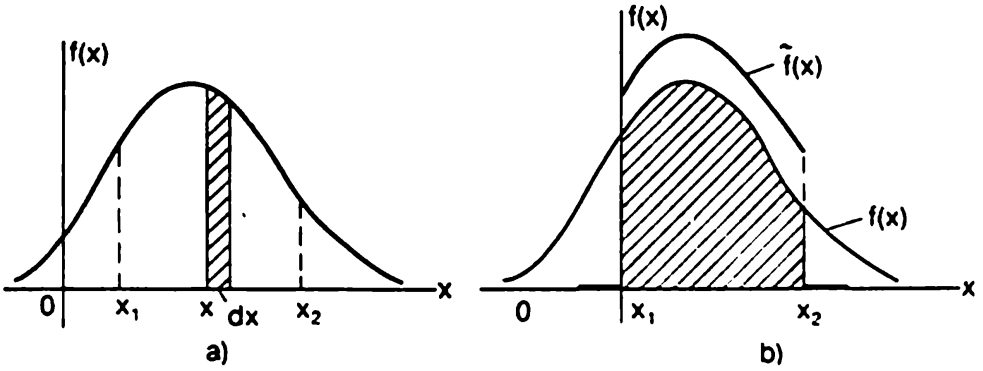


Fig. 5.44

elle est rejetée, si elle dépasse les limites de cet intervalle. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire $\tilde{X}$ (variable aléatoire « tronquée ») à marge des valeurs de x_1 à x_2. Trouver la densité $\tilde{f}(x)$ de la variable aléatoire $\tilde{X}$.

Solution. La densité cherchée $\tilde{f}(x)$ n'est rien d'autre que la densité conditionnelle de la variable X sous la condition qu'elle tombe dans l'intervalle (x_1, x_2). Calculons l'élément de probabilité $f(x)\,dx$ pour l'intervalle $(x, x + dx) \subset (x_1, x_2)$ (voir fig. 5.44, *a*). D'après le théorème des probabilités composées

$$f(x)\,dx = \mathrm{P}\,\{X \in (x_1, x_2)\}\,\tilde{f}(x)\,dx,$$

où $\tilde{f}(x)\,dx$, élément de probabilité conditionnelle, est la probabilité pour que la variable X tombe dans l'intervalle $(x,\ x+dx)$ sous la condition que $X \in (x_1,\ x_2)$ et

$$P\{X \in (x_1,\ x_2)\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx; \quad \tilde{f}(x) = f(x) \Big/ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

La courbe $\tilde{f}(x)$ est semblable à celle de $f(x)$ et s'obtient à partir de cette dernière par division de chaque ordonnée par l'aire hachurée de la figure 5.44, *a* (voir courbe en gros trait de la figure 5.44, *b*); hors de l'intervalle $(x_1,\ x_2)$, $\tilde{f}(x) = 0$.

5.45. Une femme affirme: « Mon mari est de taille moyenne; or, la plupart des hommes sont plus petits que la taille moyenne ». Cette affirmation est-elle absurde?

Solution. L'affirmation n'est pas absurde et peut être même vraie, si la densité de répartition de la taille X des hommes n'est pas symétrique par rapport à la valeur moyenne (l'espérance mathématique), comme, par exemple, c'est représenté sur la figure 5.45. L'aire hachurée de la figure 5.45 est égale à la part moyenne des hommes à taille au-dessous de la moyenne m_x, et elle est plus grande que l'aire hachurée.

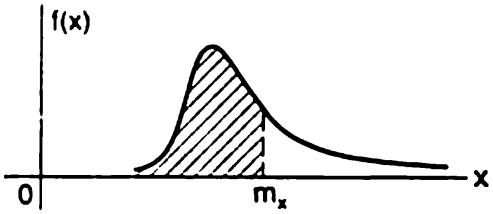


Fig. 5.45

5.46. En théorie de la fiabilité des dispositifs techniques on recourt souvent en tant que loi de répartition de la durée du service sans aléas à la *loi de Weibull* à fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^n} \ (x > 0), \tag{5.46}$$

où $\alpha > 0$ est une certaine constante; n, un nombre entier positif. Trouver 1) la densité $f(x)$; 2) l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X répartie d'après la loi de Weibull.

Solution.

1) $f(x) = dF(x)/dx = n\alpha x^{n-1} e^{-\alpha x^n}$;

2) $M[X] = \int_0^\infty x n \alpha x^{n-1} e^{-\alpha x^n}\,dx$.

Procédons à la substitution de la variable : $\alpha x^n = y$; $x = \alpha^{-1/n} y^{1/n}$,

$$dx = \frac{1}{n}\alpha^{-1/n} y^{\frac{1-n}{n}} dy ;$$

$$M[X] = \int_0^\infty n y e^{-y} \frac{1}{n} \alpha^{-\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} dy =$$

$$= \alpha^{-\frac{1}{n}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{n}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \alpha^{-\frac{1}{n}},$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ est la fonction gamma connue.

$$M[X^2] = \int_0^\infty n\alpha x^{n+1} e^{-\alpha x^n} dx =$$

$$= \int_0^\infty n\alpha\alpha^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} y^{1+\frac{1}{n}} e^{-y} \frac{1}{n} \alpha^{-\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} dy =$$

$$= \alpha^{-\frac{2}{n}} \int_0^\infty y^{\frac{2}{n}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) \alpha^{-\frac{2}{n}} ;$$

$$D[X] = \alpha^{-2/n} [\Gamma(1 + 2/n) - \{\Gamma(1 + 1/n)\}^2].$$

5.47. La durée de service d'une installation technique est une variable aléatoire T à densité $f(t)$ $(t > 0)$. A l'instant t_0, si jusque-là l'installation n'est pas tombée en panne, on la soumet à un entretien préventif, après quoi elle travaille encore un temps T_1 à densité $f_1(t)$. Si l'installation subit une défaillance à un certain instant $u < t_0$, on procède sur-le-champ au dépannage, après quoi l'installation travaille encore un temps aléatoire T_2 de densité $f_2(t)$ (un deuxième entretien ne se fait pas). Trouver l'espérance mathématique du temps Θ que fonctionnera encore l'installation (sans le temps absorbé par l'entretien).

Solution. Soit $t < t_0$, la valeur prise par la variable T ; sous cette hypothèse l'espérance mathématique conditionnelle de la variable Θ est $M[\Theta \mid t] = t + m_2$, où $m_2 = \int_0^\infty t f_2(t)\, dt$ est l'espérance mathématique du fonctionnement de l'installation après l'entretien. Mais si $t \geqslant t_0$, une défaillance naturelle de l'installation n'aura pas lieu

jusqu'à l'instant t_0 et $M[\Theta \mid t] = t_0 + m_1$, où $m_1 = \int_0^\infty t f_1(t)\,dt$.

Donc

$$M[\Theta \mid t] = \begin{cases} t + m_1 & \text{pour } t < t_0; \\ t_0 + m_1 & \text{pour } t \geqslant t_0. \end{cases}$$

L'espérance mathématique totale (inconditionnelle) de la variable Θ

$$M[\Theta] = \int_0^{t_0} (t + m_2) f(t)\,dt + \int_{t_0}^\infty (t_0 + m_1) f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{t_0} t f(t)\,dt + m_2 \int_0^{t_0} f(t)\,dt + (t_0 + m_1) \int_{t_0}^\infty f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{t_0} t f(t)\,dt + m_2 P\{T < t_0\} + (t_0 + m_1) P\{T > t_0\} =$$

$$= \int_0^{t_0} t f(t)\,dt + m_2 F(t_0)(t_0 + m_1) + (1 - F(t_0)),$$

où $F(t)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire T:

$$F(t) = \int_0^t f(t)\,dt.$$

5.48. On transmet par le canal radio une suite de messages de même durée l (fig. 5.48, *a*) à intervalles aléatoires T_1, T_2, . . . entre eux.

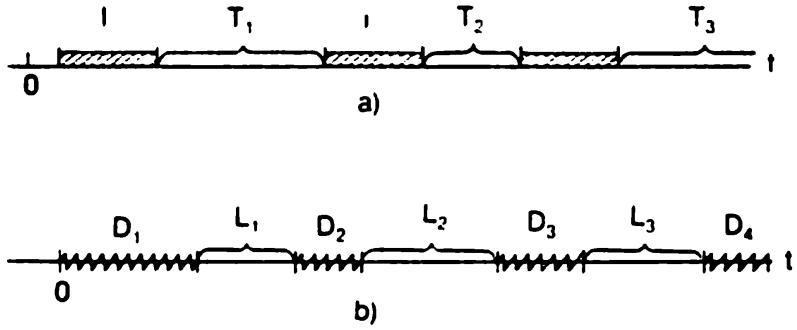


Fig. 5.48

Les intervalles T_1, T_2, . . . ont la même répartition. De temps en temps des bruits aléatoires se mélangent aux messages (fig. 5.48, *b*). Les instants de l'apparition et de la cessation des bruits ne sont liés

d'aucune façon à la succession des messages. La durée D de chaque bruit est aléatoire, elle est répartie suivant la loi exponentielle de paramètre μ ; la durée de l'intervalle entre les bruits est également aléatoire, elle est répartie d'après la loi exponentielle de paramètre ν. Si le bruit couvre le message tout entier ou sa partie, alors soit le message, soit sa partie correspondante sont perturbés. Trouver la part moyenne du message, qui sera perturbée par les bruits, c'est-à-dire le rapport de la durée moyenne du texte perturbé à celle du texte transmis.

Solution. $1/\mu$ est la durée moyenne d'un brouillage ; $1/\nu$, la durée moyenne de l'intervalle entre ces derniers ; la part moyenne du temps sur l'axe Ot couvert par les bruits vaut

$$\frac{1/\mu}{1/\mu+1/\nu}=\frac{\nu}{\mu+\nu}\,.$$

Il est clair que la même part moyenne des messages sera perturbée par les bruits indépendamment de la répartition de leur durée et de la durée des intervalles entre eux, si $\mu = 1/\mathrm{M}\,[D]$; $\nu = 1/\mathrm{M}\,[T]$.

5.49. En un temps τ (durée de l'observation) un signal arrive avec une probabilité p ; il apparaît en un point quelconque de l'intervalle τ avec la même densité de probabilité. On sait qu'à l'instant $t < \tau$

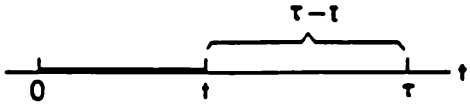


Fig. 5.49

(fig. 5.49), le signal n'est pas encore apparu. Trouver la probabilité Q pour qu'il apparaisse pendant le temps $\tau - t$ qui reste.

Solution. Q n'est rien d'autre que la probabilité conditionnelle pour que le signal apparaisse pendant le temps $\tau - t$, si l'on sait que jusqu'à l'instant t il n'est pas encore apparu. La probabilité totale p de l'apparition du signal en un temps τ est égale à la probabilité tp/τ, pour qu'il arrive en un temps t plus la probabilité $1 - tp/\tau$ pour qu'il n'arrive pas pendant ce temps multipliée par Q. On en tire

$$p=\frac{1}{\tau}p+\left(1-\frac{t}{\tau}p\right)Q;\quad Q=\frac{p\,(1-t/\tau)}{1-tp/\tau}$$

5.50. L'instant de l'arrivée du signal est une variable aléatoire T de densité $f(t)$. A un certain instant $t < \tau$ le signal n'est pas encore reçu. Trouver la probabilité pour qu'il arrive pendant l'intervalle de temps suivant de t à τ (fig. 5.50).

Solution. Le problème est analogue à l'énoncé précédent. Désignons par p la probabilité pour que le signal arrive pendant le temps τ; elle est égale à $p = \int_0^\tau f(t)\,dt$. Raisonnons comme dans le problème précédent pour trouver la probabilité totale p de l'apparition du signal en un temps τ; elle est égale à la probabilité p_t pour que le signal apparaisse avant l'instant t: $p_t = \int_0^t f(t)\,dt$ plus la probabilité de l'événement contraire $1 - p_t$ multipliée par la probabilité conditionnelle Q pour que le signal arrive pendant le temps restant $(\tau - t)$, c'est-à-dire

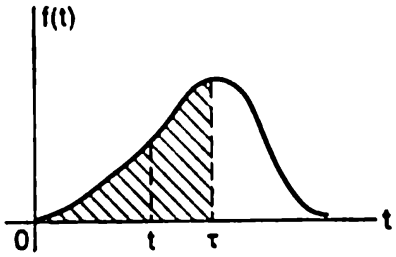


Fig. 5.50

$$\int_0^\tau f(t)\,dt = \int_0^t f(t)\,dt + \left\{1 - \int_0^t f(t)\,dt\right\} Q,$$

d'où

$$Q = \frac{\int_0^\tau f(t)\,dt - \int_0^t f(t)\,dt}{1 - \int_0^t f(t)\,dt} = \frac{\int_t^\tau f(t)\,dt}{1 - F(t)} = \frac{F(\tau) - F(t)}{1 - F(t)},$$

où $F(t)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

Si $f(t)$ est la répartition exponentielle de paramètre λ, alors $Q = 1 - e^{-\lambda(\tau - t)}$.

5.51. Dans l'énoncé du problème précédent $f(t)$ est la répartition normale de paramètres m, σ; $t = m$, c'est-à-dire que le signal n'est pas arrivé en un temps m *). Trouver la probabilité pour qu'il arrive en un intervalle de temps d'une durée σ qui suit directement $t = m$.

Solution. $\tau = m + \sigma$;

$$\int_m^{m+\sigma} f(t)\,dt = \Phi\left(\frac{m + \sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi(0) = \Phi(1) \approx 0{,}341;$$

$$Q \approx 0{,}341/0{,}5 = 0{,}682.$$

*) Le problème a un sens seulement lorsque T est une variable pratiquement non négative, c'est-à-dire pour $m - 3\sigma > 0$.

CHAPITRE VI

SYSTÈMES DE VARIABLES ALÉATOIRES (VECTEURS ALÉATOIRES)

6.0. L'interprétation géométrique d'un système de deux variables aléatoires (X, Y) est donnée par un *point aléatoire* du plan xOy (fig. 6.0.1) de coordonnées (X, Y) ou par un vecteur aléatoire orienté de l'origine des coordonnées vers le point (X, Y), dont les composantes sont les variables aléatoires X et Y (fig. 6.0.2).

Un système de trois variables aléatoires (X, Y, Z) est représenté par un *point aléatoire* ou un *vecteur aléatoire dans un espace tridimensionnel*; un système

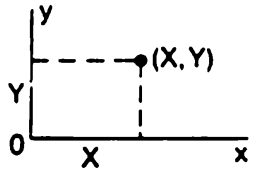


Fig. 6.0.1

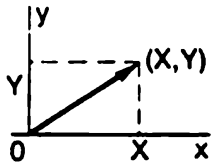


Fig. 6.0.2

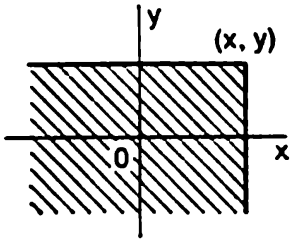


Fig. 6.0.3

de n variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, par un *point aléatoire* ou un *vecteur aléatoire dans un espace à n-dimensions.*

On appelle *fonction de répartition commune* de deux variables aléatoires (X, Y) ou fonction de répartition d'un système de deux variables aléatoires, la probabilité pour que soient vérifiées simultanément deux inégalités $X < x$ et $Y < y$:

$$F(x, y) = \mathrm{P}\{X < x, Y < y\}. \quad (6.0.1)$$

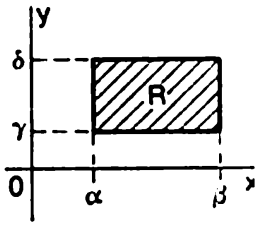


Fig. 6.0.4

L'interprétation géométrique de $F(x, y)$ est donnée par la probabilité pour le point aléatoire (X, Y) de se trouver dans le quadrant hachuré à sommet (x, y) de la figure (6.0.3). La probabilité pour que le point aléatoire (X, Y) tombe dans le rectangle R de côtés parallèles aux axes de coordonnées qui inclut ses limites inférieure et de gauche, mais n'inclut pas les limites supérieure et de droite (fig. 6.0.4), est exprimée à l'aide de la fonction de répartition par la formule

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in R\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \quad (6.0.2)$$

La fonction de répartition $F(x, y)$ possède les propriétés : 1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$; 2) $F(+\infty, +\infty) = 1$; 3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$, où $F_1(x)$, $F_2(y)$ sont les fonctions de répartition des variables aléatoires X et Y; 4) $F(x, y)$ est la fonction non décroissante des arguments x et y; 5) $F(x, y)$ est continue à gauche par rapport à chacune des coordonnées; 6) $F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \leqslant \beta$, $\gamma \leqslant \delta$ (cette dernière propriété signifie que la probabilité de tomber dans le rectangle est non négative).

On appelle *densité commune* de deux variables aléatoires continues ou densité de probabilité d'un système, la limite du rapport de la probabilité pour que le point aléatoire tombe dans le domaine élémentaire du plan Δx, Δy adjacent au point (x, y), à l'aire de ce domaine, lorsque ses dimensions Δx et Δy tendent vers zéro. La densité commune est exprimée par l'intermédiaire de la fonction de répartition commune

$$f(x, y) = \partial^2 F(x, y)/dx\,dy = F''_{xy}(x, y), \tag{6.0.3}$$

c'est-à-dire qu'elle constitue la dérivée partielle seconde mixte de la fonction de répartition par rapport aux deux arguments.

La surface représentative de la fonction $f(x, y)$ s'appelle *surface de répartition*.

On appelle *élément de probabilité* d'un système de deux variables aléatoires la grandeur $f(x, y)\,dx\,dy$ qui exprime la probabilité approchée pour que le point aléatoire (X, Y) tombe dans le rectangle élémentaire de côtés dx, dy adjacent au point (x, y).

La probabilité pour que le point (X, Y) tombe dans un domaine arbitraire D est exprimée par la formule

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{6.0.4}$$

Propriétés de la densité commune:

$$1)\ f(x, y) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

La fonction de répartition commune s'exprime par l'intermédiaire de la densité commune:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{6.0.5}$$

Les densités des variables isolées d'un système sont exprimées à l'aide de la densité commune:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy; \qquad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx. \tag{6.0.6}$$

On appelle *loi de répartition conditionnelle* d'une variable aléatoire d'un système sa loi de répartition calculée sous la condition que l'autre variable aléatoire ait pris une valeur définie.

Les fonctions de répartition conditionnelles des variables aléatoires X et Y d'un système sont notées par $F_1(x \mid y)$ et $F_2(y \mid x)$, alors que les densités de probabilité conditionnelles, par $f_1(x \mid y)$ et $f_2(y \mid x)$.

Le théorème de multiplication des densités (des lois de répartition)

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y \mid x) \quad \text{ou} \quad f(x, y) = f_2(y) f_1(x \mid y). \tag{6.0.7}$$

Densités conditionnelles exprimées à l'aide des densités inconditionnelles:

$$f_2(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad \text{pour } f_1(x) \neq 0; \quad f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad \text{pour } f_2(y) \neq 0. \tag{6.0.8}$$

Les variables aléatoires X et Y sont dites *indépendantes* si la loi de répartition de l'une d'elles ne dépend pas de la valeur que prend l'autre variable:

$$f_1(x \mid y) = f_1(x) \quad \text{ou} \quad f_2(y \mid x) = f_2(y). \tag{6.0.9}$$

Pour les variables aléatoires indépendantes le théorème de multiplication des densités se met sous la forme

$$f_1(x, y) = f_1(x) f_2(y). \tag{6.0.10}$$

On appelle *moment initial* d'ordre $k + s$ d'un système (X, Y) la variable

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \mathrm{M}[X^k Y^s]. \tag{6.0.11}$$

Le *moment centré* d'ordre $k + s$ d'un système (X, Y) est la variable

$$\mu_{ks}[X, Y] = \mathrm{M}[\mathring{X}^k \mathring{Y}^s]. \tag{6.0.12}$$

Formules de calcul des moments:

a) pour les variables aléatoires discrètes:

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}, \tag{6.0.13}$$

$$\mu_{ks}[X, Y] = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, \tag{6.0.14}$$

où $p_{ij} = (\mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$;

b) pour les variables aléatoires continues:

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \iint_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y)\, dx\, dy, \tag{6.0.15}$$

$$\mu_{ks}[X, Y] = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y)\, dx\, dy, \tag{6.0.16}$$

où $f(x, y)$ est la densité commune.

L'*ordre* du moment $\alpha_{ks}[X, Y]$ ou $\mu_{ks}[X, Y]$ est la somme des indices k et s.

Le *moment de corrélation* ou covariance de deux variables aléatoires X, Y est le moment centré mixte d'ordre deux, c'est-à-dire μ_{11}:

$$K_{xy} = \mu_{11}[X, Y] = \mathrm{M}[\mathring{X}\mathring{Y}]. \tag{6.0.17}$$

Il est commode de calculer K_{xy} à l'aide du moment initial mixte deux

$$K_{xy} = \alpha_{11}[X, Y] - m_x m_y, \tag{6.0.18}$$

ou avec d'autres notations:

$$K_{xy} = \mathrm{M}[X \cdot Y] - \mathrm{M}[X] \cdot \mathrm{M}[Y]. \tag{6.0.19}$$

Pour les variables aléatoires indépendantes la covariance est nulle.

On appelle *coefficient de corrélation* ou moment de corrélation normé r_{xy} de deux variables aléatoires X, Y, la grandeur sans dimension

$$r_{xy} = K_{xy}/(\sigma_x \sigma_y), \tag{6.0.20}$$

où $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\mu_{20}[X, Y]}$ et $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\mu_{02}[X, Y]}$.

Le coefficient de corrélation détermine à quel point est étroite la liaison entre les variables aléatoires.

Les variables aléatoires X, Y sont dites *non corrélées* si leur covariance, ou ce qui revient au même, leur coefficient de corrélation, est nulle.

L'indépendance des variables aléatoires entraîne leur non-corrélation, alors que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Si les variables aléatoires X, Y sont liées par une relation fonctionnelle linéaire de la forme $Y = aX + b$, où a et b ne sont pas aléatoires, leur coefficient de corrélation $r_{xy} = \pm 1$, où le signe « + » ou « — » est pris conformément au signe du facteur a. Pour deux variables aléatoires quelconques $|r_{xy}| \leqslant 1$.

On appelle *fonction de répartition commune* de n variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n la probabilité pour que soient vérifiées simultanément n inégalités de la forme $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{P}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}. \tag{6.0.21}$$

On appelle *densité d'un système* des n variables aléatoires la dérivée n-ième partielle mixte de la fonction de répartition

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2, \ldots, \partial x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{6.0.22}$$

La fonction de répartition $F_i(x_i)$ d'une des variables X_i d'un système s'obtient à partir de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si on pose que tous ses arguments sauf x_i, sont égaux à $+\infty$:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, +\infty, \ldots, x_i, +\infty, \ldots, +\infty). \tag{6.0.23}$$

La densité d'une variable aléatoire isolée X_i d'un système $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se calcule à l'aide de la densité commune d'après la formule

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n-1)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n. \tag{6.0.24}$$

La densité d'un sous-système isolé $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ d'un système $(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n)$ est exprimée par la formule

$$f_{1, \ldots, k}(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n-k)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n. \tag{6.0.25}$$

La densité conditionnelle d'un sous-système $X_1, \ldots, X_k$, les valeurs de toutes les autres variables aléatoires étant fixées, est donnée par la formule:

$$f_{1, \ldots, k}(x_1, \ldots, x_k | x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_{k+1, \ldots, n}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}. \tag{6.0.26}$$

Si les variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont indépendantes il vient

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n). \tag{6.0.27}$$

La probabilité pour que le point aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se trouve dans les limites d'un domaine D à n-dimensions est exprimée par une intégrale n-uple

$$P\{(X_1, \ldots, X_n) \in D\} = \int_{(D)}^{(n)}\int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (6.0.28)$$

On appelle *matrice de corrélation* d'un système de n variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ le tableau composé de covariances de toutes ces variables prises deux à deux:

$$\| K_{ij} \| = \begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{Vmatrix},$$

où $K_{ij} = K_{x_i x_j} = M[\mathring{X}_i \mathring{X}_j]$ est la covariance des variables aléatoires X_i, X_j.

La matrice de corrélation étant symétrique $(K_{ij} = K_{ji})$, on n'écrit ordinairement que la moitié du tableau:

$$\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & K_{nn} \end{Vmatrix}.$$

La diagonale principale de la matrice de corrélation est composée des variances des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$K_{ii} = D[X_i]. \quad (6.0.29)$$

On appelle *matrice de corrélation normée* d'un système de n variables aléatoires un tableau composé de coefficients de corrélation de toutes ces variables prises deux à deux:

$$\| r_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2n} \\ & & 1 & \ldots & r_{3n} \\ & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

où $r_{ij} = K_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$ est le coefficient de corrélation des variables X_i, X_j.

La *loi de répartition normale* de deux variables aléatoires X, Y (loi normale sur un plan) est de la forme

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}, \quad (6.0.30)$$

où m_x, m_y sont les espérances mathématiques des variables aléatoires X Y; σ_x, σ_y, leurs écarts quadratiques moyens; r, leur coefficient de corrélation.

Pour les variables aléatoires réparties d'après la loi normale la non-corrélation est équivalente à l'indépendance. Si les variables aléatoires X, Y sont non corrélées (indépendantes), alors $r = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}. \quad (6.0.31)$$

Dans ce cas les axes Ox et Oy s'appellent *axes de dispersion principaux*. Mais si de plus $m_x = m_y = 0$, la loi normale se met sous la *forme canonique*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}. \quad (6.0.32)$$

La probabilité pour qu'un point aléatoire réparti d'après la loi normale tombe dans un rectangle R de côtés parallèles aux axes de dispersion principaux (voir fig. 6.0.4) s'écrit

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in R\} = \left[\Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\Phi\left(\frac{\delta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma - m_y}{\sigma_y}\right)\right]. \quad (6.0.33)$$

On appelle *ellipse d'égale densité* (*ellipse de dispersion*) la figure délimitée par cette courbe ; en tous les points de cette figure la densité commune de la loi normale est constante : $f(x, y) = \text{const}$. Les demi-axes de l'ellipse sont proportionnels à σ_x, σ_y : $a = k\sigma_x$; $b = k\sigma_y$.

La probabilité pour qu'un point aléatoire réparti d'après la loi normale tombe dans le domaine E_k délimité par l'ellipse de dispersion de demi-axes a et b, est égale à

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in E_k\} = 1 - e^{-k^2/2}, \quad (6.0.34)$$

où k sont les dimensions des demi-axes de l'ellipse données en écarts quadratiques moyens : $k = a/\sigma_x = b/\sigma_y$.

Si $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, la dispersion suivant la loi normale est dite *circulaire*. Pour la dispersion normale circulaire à $m_x = m_y = 0$ la distance R entre le point (X, Y) et l'origine des coordonnées (centre de dispersion) est répartie d'après la *loi de Rayleigh*

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour } r > 0. \quad (6.0.35)$$

Dans un espace tridimensionnel la loi normale des variables aléatoires indépendantes (X, Y, Z) est exprimée par la formule

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-m_z)^2}{\sigma_z^2}\right]\right\}. \quad (6.0.36)$$

La probabilité pour qu'un point aléatoire (X, Y, Z) se trouve dans le domaine E_k délimité par un ellipsoïde d'égale densité de demi-axes $a = k\sigma_x$; $b = k\sigma_y$; $c = k\sigma_z$ s'écrit

$$P\{(X, Y, Z) \in E_k\} = 2\Phi(k) - \sqrt{2/\pi}\, k e^{-k^2/2}. \qquad (6.0.37)$$

Problèmes et exercices

6.1. On transmet deux messages dont chacun peut être perturbé ou non l'un indépendamment de l'autre. La probabilité de l'événement A = {message perturbé} pour le premier message est égale à p_1, et pour le deuxième, à p_2. On considère le système de deux variables aléatoires (X, Y) déterminées de la façon suivante:

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si le premier message est perturbé;} \\ 0 \text{ si le premier message n'est pas perturbé;} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 \text{ si le deuxième message est perturbé;} \\ 0 \text{ si le deuxième message n'est pas perturbé} \end{cases}$$

(X et Y sont les indicatrices de l'événement A dans la première et la deuxième épreuves).

Trouver la répartition commune de couple de variables aléatoires (X, Y), c'est-à-dire l'ensemble des probabilités p_{ij} de chaque combinaison de leurs valeurs. Trouver la fonction de répartition commune $F(x, y)$.

Solution. La répartition commune est déterminée par les probabilités

$$p_{00} = P\{X = 0, Y = 0\} = q_1 q_2;$$
$$p_{01} = P\{X = 0, Y = 1\} = q_1 p_2;$$
$$p_{10} = P\{X = 1, Y = 0\} = p_1 q_2;$$
$$p_{11} = P\{X = 1, Y = 1\} = p_1 p_2,$$

où $q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$ (voir le tableau).

y_i \ x_i	0	1
0	$q_1 q_2$	$p_1 q_2$
1	$q_1 p_2$	$p_1 p_2$

Sur le plan xOy la répartition est concentrée en quatre points de coordonnées (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) (fig. 6.1). En utilisant l'interprétation géométrique de la fonction de répartition comme la probabilité de tomber dans le quadrant de sommet au point (x, y)

(voir fig. 6.0.3), on obtient pour $F(x, y)$ le tableau des valeurs suivant :

$y \backslash x$	$x \leqslant 0$	$0 < x \leqslant 1$	$1 < x$
$y \leqslant 0$	0	0	0
$0 < y \leqslant 1$	0	$q_1 q_2$	q_2
$1 < y$	0	q_1	1

6.2. La fonction de répartition du système de deux variables aléatoires (X, Y) est égale à $F(x, y)$. Trouver la probabilité pour que le point aléatoire (X, Y) tombe dans le domaine D (fig. 6.2) délimité à droite par l'abscisse α, d'en bas et d'en haut par les ordonnées γ, δ.

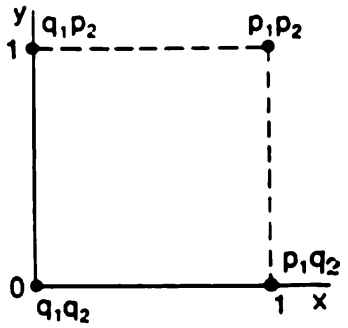


Fig. 6.1

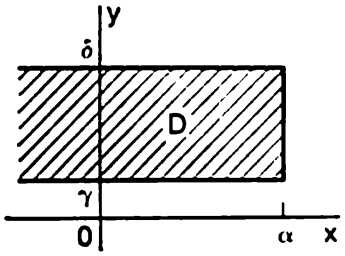


Fig. 6.2

Réponse. $P\{(X, Y) \in D\} = F(\alpha, \delta) - F(\alpha, \gamma)$.

6.3. Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui vérifient chacune la loi exponentielle

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0); \quad f_2(y) = \mu e^{-\mu y} \quad (y > 0).$$

Ecrire les expressions 1) de la densité commune ; 2) de la fonction de répartition du système (X, Y).

Réponse.

$$1)\ f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ ou } y < 0; \\ \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)} & \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0; \end{cases}$$

$$2)\ F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 0 \text{ ou } y \leqslant 0; \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0. \end{cases}$$

6.4. Un système de variables aléatoire (X, Y) est réparti à densité constante à l'intérieur d'un carré R de côté a (fig. 6.4, a). Ecrire l'expression de la densité $f(x, y)$. Construire la fonction de répartition

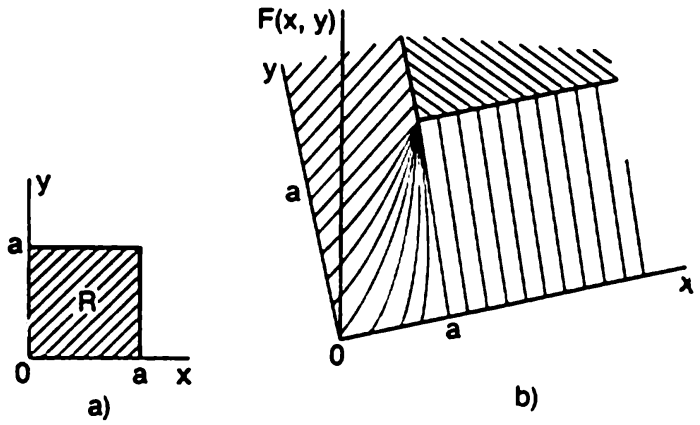


Fig. 6.4

du système. Ecrire les expressions de $f_1(x)$ et de $f_2(y)$. Déterminer si les variables X et Y sont indépendantes ou dépendantes.

Réponse. $f(x, y) = \begin{cases} 1/a^2 & \text{pour } (x, y) \in R; \\ 0 & \text{pour } (x, y) \notin R; \end{cases}$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 0 & \text{ou } y \leqslant 0; \\ xy/a^2 & \text{pour } 0 < x \leqslant a & \text{et } 0 < y \leqslant a; \\ y/a & \text{pour } x > a & \text{et } 0 < y \leqslant a; \\ x/a & \text{pour } 0 < x \leqslant a & \text{et } y > a; \\ 1 & \text{pour } x > a & \text{et } y > a. \end{cases}$$

La surface $F(x, y)$ est visualisée par la figure 6.4, b.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/a & \text{pour } x \in (0, a); \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, a); \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1/a & \text{pour } y \in (0, a); \\ 0 & \text{pour } y \notin (0, a). \end{cases}$$

Les variables X, Y sont indépendantes du fait que

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

6.5. La surface de répartition du système de variables aléatoires (X, Y) est un cône droit circulaire (fig. 6.5, a) ayant pour base un cercle K de centre à l'origine des coordonnées et de rayon r_0. Hors de

ce cercle la densité commune $f(x, y)$ est nulle. 1) Ecrire l'expression de $f(x, y)$; 2) trouver $f_1(x)$; $f_2(y)$; $f_1(x \mid y)$; $f_2(y \mid x)$; 3) déterminer si les variables aléatoires X, Y sont dépendantes ; 4) déterminer si les variables aléatoires X, Y sont corrélées.

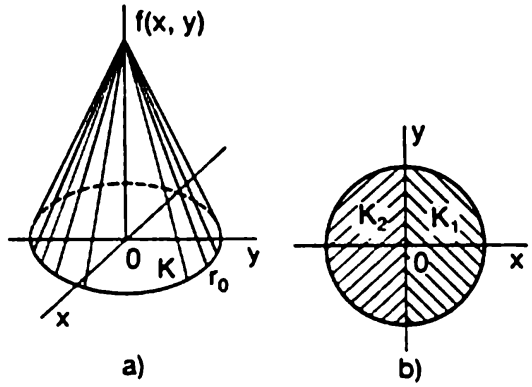


Fig. 6.5

Solution.

$$1)\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{r_0^3\pi}\left(r_0 - \sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{pour } x^2+y^2 < r_0^2 ; \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 > r_0^2 ; \end{cases}$$

$$2)\ f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{r_0^3\pi}\left[r_0\sqrt{r_0^2-x^2} - x^2 \ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-x^2}}{|x|}\right)\right] & \text{pour } |x| < r_0 ; \\ 0 & \text{pour } |x| > r_0 ; \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{r_0^3\pi}\left[r_0\sqrt{r_0^2-y^2} - y^2 \ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-y^2}}{|y|}\right)\right] & \text{pour } |y| < r_0 ; \\ 0 & \text{pour } |y| > r_0 . \end{cases}$$

Ensuite, pour $|x| < r_0$

$$f_2(y|x) = \begin{cases} \dfrac{r_0 - \sqrt{x^2+y^2}}{r_0\sqrt{r_0^2-x^2} - x^2 \ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-x^2}}{|x|}\right)} & \text{pour } |y| < \sqrt{r_0^2-x^2} ; \\ 0 & \text{pour } |y| > \sqrt{r_0^2-x^2} \end{cases}$$

et pour $|y| < r_0$

$$f_1(x|y) = \begin{cases} \dfrac{r_0 - \sqrt{x^2+y^2}}{r_0\sqrt{r_0^2-y^2} - y^2 \ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-y^2}}{|y|}\right)} & \text{pour } |x| < \sqrt{r_0^2-y^2} ; \\ 0 & \text{pour } |x| > \sqrt{r_0^2-y^2} ; \end{cases}$$

3) étant donné que $f_1(x \mid y) \neq f_1(x)$, les variables aléatoires X, Y sont dépendantes;

4) cherchons le moment de corrélation (la covariance) K_{xy}; puisque $m_x = m_y = 0$, on a

$$K_{xy} = \iint\limits_{(K)} xyf(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(K_1)} xyf(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{(K_2)} xyf(x, y)\,dx\,dy,$$

où K_1 est la moitié droite du cercle K; K_2, sa moitié gauche (fig. 6.5, *b*); la fonction $xy\,f(x, y)$ est impaire par rapport à l'argument x; donc les intégrales en K_1 et K_2 ne se distinguent que par le signe; dans la sommation les intégrales se réduisent réciproquement; donc, $K_{xy} = 0$ et les variables X, Y ne sont pas corrélées.

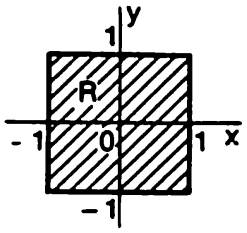


Fig. 6.6

6.6. Un couple de variables aléatoires X, Y possède la densité commune

$$f(x, y) = a/(1 + x^2 + x^2y^2 + y^2).$$

1) Calculer le coefficient a; 2) établir si les variables X, Y sont les dépendantes; trouver $f_1(x)$; $f_2(y)$; 3) calculer la probabilité pour que le point aléatoire (X, Y) tombe dans les limites du carré R de centre en origine des coordonnées et de côtés d'une longueur $b = 2$, parallèles aux axes de coordonnées (fig. 6.6).

Solution. 1) La condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y)\,dx\,dy = 1$$

conduit à $a = 1/\pi^2$;

2) les variables aléatoires X, Y sont indépendantes:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}; \quad f(x, y) = f_1(x)\,f_2(y);$$

$$3)\ \mathrm{P}\{(X, Y) \in R\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{dx\,dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{4}.$$

6.7. Soient des variables aléatoires indépendantes X, Y. La variable aléatoire X est répartie d'après la loi normale de paramètres $m_x = 0$; $\sigma_x = 1/\sqrt{2}$. La répartition de la variable aléatoire Y est uniforme dans l'intervalle (0, 1). Ecrire les expressions de la densité

commune $f(x, y)$ et de la fonction de répartition $F(x, y)$ du système (X, Y).

Réponse. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ pour $y \in (0, 1)$;

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leqslant 0; \\ y[\Phi(x\sqrt{2}) + 0{,}5] & \text{pour } 0 < y \leqslant 1; \\ \Phi(x\sqrt{2}) + 0{,}5 & \text{pour } y > 1. \end{cases}$$

6.8. La surface de répartition $f(x, y)$ d'un système de variables aléatoires (X, Y) est un cylindre circulaire droit de base à centre en

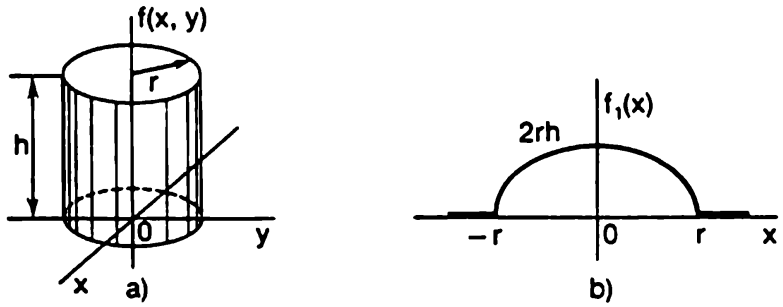


Fig. 6.8

origine des coordonnées (fig. 6.8, *a*) et de hauteur h. Déterminer le rayon r du cylindre; trouver $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_1(x \mid y)$, $f_2(y \mid x)$; m_x, D_x; K_{xy}.

Solution. Le rayon r se calcule à partir de la condition que le volume du cylindre est égal à l'unité, d'où $r = \sqrt{1/(\pi h)}$. La densité commune

$$f(x, y) = \begin{cases} h, & \text{si } x^2 + y^2 < r^2; \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Donc

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y\, dy = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, h & \text{pour } |x| < r; \\ 0 & \text{pour } |x| > r. \end{cases}$$

D'une façon analogue,

$$f_2(y) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - y^2}\; h & \text{pour } |y| < r; \\ 0 & \text{pour } |y| > r. \end{cases}$$

Le graphique de la fonction $f_1(x)$ est représenté sur la figure 6.8, *b*. Pour $|y| < r$

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} & \text{pour } |x| < \sqrt{r^2-y^2}; \\ 0 & \text{pour } |x| > \sqrt{r^2-y^2}. \end{cases}$$

D'une façon analogue, pour $|x| < r$

$$f_2(y|x) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{r^2-x^2}) & \text{pour } |y| < \sqrt{r^2-x^2}; \\ 0 & \text{pour } |y| > \sqrt{r^2-x^2}. \end{cases}$$

Les espérances mathématiques sont nulles: $m_x = m_y = 0$ du fait que la fonction $f(x, y)$ est paire aussi bien par rapport à x que par rapport à y;

$$D_x = 2h \int_{-r}^{r} x^2 \sqrt{r^2-x^2}\, dx = hr^4 \frac{\pi}{4} = \frac{r^2}{4}; \quad \sigma_x = \frac{r}{2}; \quad K_{xy} = 0.$$

6.9. Un point aléatoire (X, Y) est réparti avec une densité constante à l'intérieur du carré R hachuré de la figure 6.9, *a*. Ecrire l'ex-

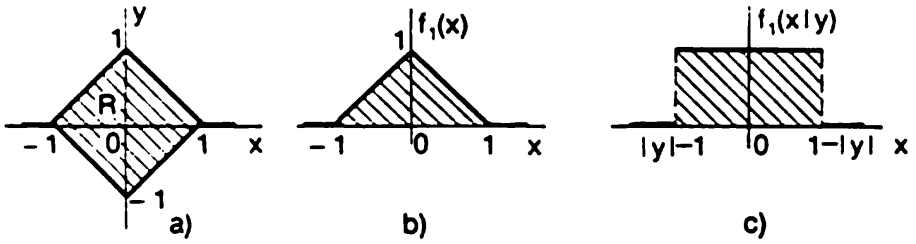


Fig. 6.9

pression de la densité commune $f(x, y)$. Trouver les expressions des densités de répartition $f_1(x)$, $f_2(y)$ des variables isolées X, Y du système. Ecrire les expressions des densités conditionnelles $f_1(x \mid y)$, $f_2(y \mid x)$. Les variables aléatoires X, Y sont-elles dépendantes ou indépendantes? Sont-elles corrélées ou non?

Solution. L'aire du carré est égale à deux; donc

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } (x, y) \in R; \\ 0 & \text{pour } (x, y) \notin R. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-(1-x)}^{1-x} dy = 1 - x & \text{pour } 0 < x < 1; \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-(1+x)}^{1+x} dy = 1 + x & \text{pour } -1 < x < 0; \\ 0 & \text{pour } x < -1 \text{ ou } x > 1, \end{cases}$$

ou en abrégeant

$$f_1(x)=\begin{cases} 1-|x| & \text{pour } |x|<1; \\ 0 & \text{pour } |x|>1. \end{cases}$$

Le graphique de la loi $f_1(x)$ est représenté sur la figure 6.9, *b* (loi de Simpson). D'une façon analogue,

$$f_2(y)=\begin{cases} 1-|y| & \text{pour } |y|<1; \\ 0 & \text{pour } |y|>1. \end{cases}$$

Ensuite, pour $|y|<1$

$$f_1(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|y|)} & \text{pour } |x|<1-|y|; \\ 0 & \text{pour } |x|>1-|y|. \end{cases}$$

Le graphique de la densité $f_1(x, y)$ est représenté sur la figure 6.9, *c*. Pour $|x|<1$

$$f_2(y\mid x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|x|)} & \text{pour } |y|<1-|x|; \\ 0 & \text{pour } |y|>1-|x|. \end{cases}$$

Les variables aléatoires X, Y sont dépendantes, mais ne sont pas corrélées.

6.10. La densité commune des variables aléatoires X, Y est donnée par la formule

$$f(x,y)=\frac{1}{1{,}6\pi}\exp\left\{-\frac{1}{1{,}28}[(x-2)^2-1{,}2(x-2)(y+3)+ \right.$$
$$\left. +(y+3)^2]\right\}.$$

Trouver le coefficient de corrélation des variables X, Y.

Réponse. $r_{xy}=0{,}6$.

6.11. Le système de variables aléatoires X, Y est réparti avec une densité $f(x, y)$. Exprimer à l'aide de cette dernière les probabilités des événements 1) $\{X>Y\}$; 2) $\{X>|Y|\}$; 3) $\{|X|>Y\}$ et 4) $\{Y-X>1\}$.

Solution. Sur les figures 6.11, *a* à *d* sont hachurés les domaines D_1, D_2, D_3, D_4; le fait de tomber dans ces domaines correspond aux événements 1 à 4. Les probabilités de tomber dans ces domaines

$$1)\ P\{X>Y\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy;$$

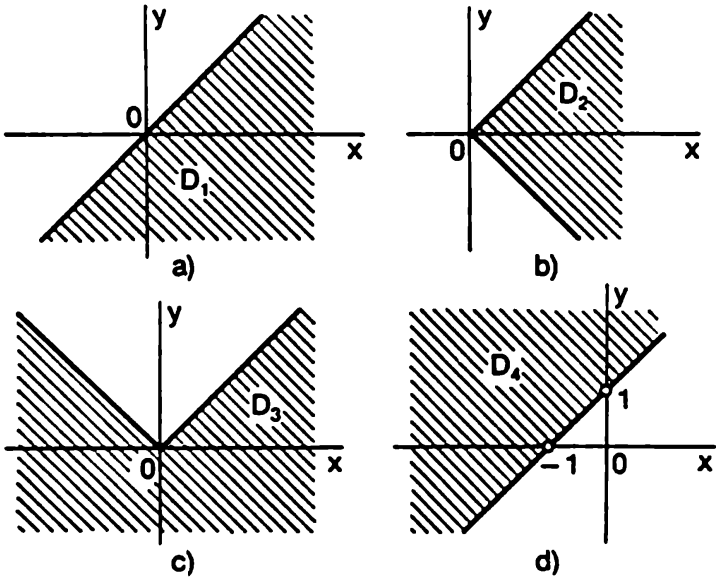


Fig. 6.11

2) $P\{X > |Y|\} = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-x}^{x} f(x, y)\, dx\, dy$;

3) $P\{|X| > Y\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{|x|} f(x, y)\, dx\, dy$;

4) $P\{Y - X > 1\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{x+1}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$.

6.12. La répartition du système de deux variables aléatoires X, Y obéit à la loi normale de paramètres $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$; $r_{xy} = 0$. Déterminer les probabilités des événements suivants :

$$A = \{|Y| < X\}; \quad B = \{Y < X\} \text{ et } C = \{Y < |X|\}.$$

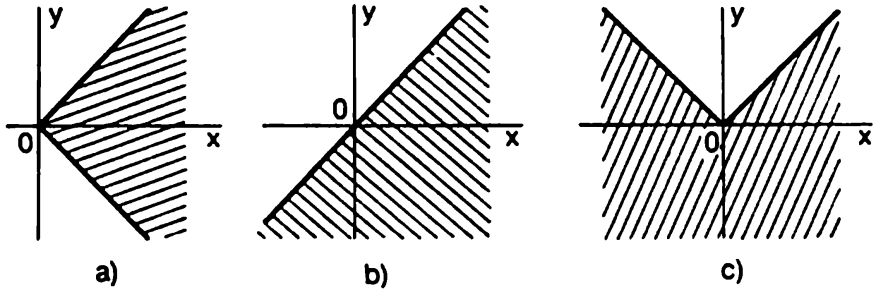


Fig. 6.12

Solution. Les figures 6.12, *a* à *c* représentent les domaines qui correspondent aux événements A, B, C. Avec une dispersion circu-

laire les probabilités des événements sont : $P(A) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}75$.

6.13. La densité de la variable aléatoire X est $f(x)$; la variable aléatoire Y y est liée par la relation fonctionnelle $Y = X^2$. Trouver la fonction de répartition $F(x, y)$ du système (X, Y).

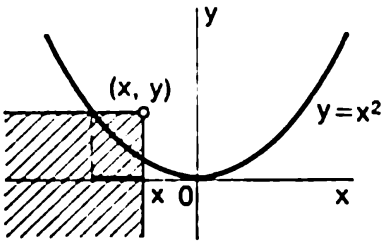


Fig. 6.13

Solution. Nous partons du fait que la valeur de Y est déterminée complètement par la valeur de X. Le point aléatoire (X, Y) peut reposer seulement sur la courbe $y = x^2$. La probabilité pour lui de tomber dans le quadrant à sommet en (x, y) est égale à la probabilité pour un point aléatoire de tomber sur la projection sur l'axe Ox du tronçon de la courbe $y = x^2$, qui se trouve dans le quadrant (fig. 6.13). En utilisant cette interprétation on a

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leqslant 0 \text{ ou } y > 0 \text{ et } x \leqslant -\sqrt{y}; \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx & \text{pour } y > 0 \text{ et } x > \sqrt{y}; \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{x} f(x)\,dx & \text{pour } y > 0 \text{ et } -\sqrt{y} < x \leqslant \sqrt{y}. \end{cases}$$

6.14. Un point aléatoire (X, Y) est réparti d'après la loi normale sur le plan de paramètres $m_x = 1$; $m_y = -1$; $\sigma_x = 1$; $\sigma_y = 2$; $r_{xy} = 0$. Trouver la probabilité pour que ce point tombe à l'intérieur du domaine D délimité par l'ellipse $(x - 1)^2 + (y + 1)^2/4 = 1$.

Solution. Le domaine D est délimité par l'ellipse de dispersion E_1 de demi-axes $a = \sigma_x = 1$; $b = \sigma_y = 2$; la probabilité de tomber dans ce domaine $p = 1 - e^{1/2} \approx 0{,}393$.

6.15. On procède au tir sur une cible ponctuelle (de petite dimension) avec un projectile dont la zone d'action destructrice est un cercle de rayon r. La dispersion du point d'impact est circulaire, de paramètres $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 2r$ (le centre de dispersion coïncide avec la cible). Combien de coups faut-il tirer pour détruire le but avec une probabilité $P = 0{,}9$?

Solution. La probabilité de la destruction du but par un seul coup $p = 1 - e^{-(0{,}5)^2/2} \approx 0{,}118$. Le nombre de coups nécessaire

$$n \geqslant \log(1 - P)/\log(1 - p) = \log 0{,}1/\log 0{,}882 \approx$$
$$\approx 18{,}4, \text{ d'où } n = 19.$$

6.16. La densité commune d'un système de trois variables aléatoires (X, Y, Z) est $f(x, y, z)$. Ecrire les expressions 1) de la densité $f(x)$ de la variable aléatoire X; 2) de la densité commune $f_{2,3}(y, z)$ des variables aléatoires (Y, Z); 3) de la densité conditionnelle $f_{2,3}(y, z \mid x)$; 4) de la densité conditionnelle $f_2(y \mid x, z)$; 5) de la fonction de répartition $F(x, y, z)$; 6) de la fonction de répartition $F_1(x)$ de la variable aléatoire X; 7) de la fonction de répartition $F_{1,2}(x, y)$ du sous-système (X, Y).

Réponse.

1) $$f_1(x) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dy\, dz;$$

2) $$f_{2,3}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dx;$$

3) $$f_{2,3}(y, z \mid x) = \frac{f(x, y, z)}{\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dy\, dz};$$

4) $$f_2(y \mid x, z) = \frac{f(x, y, z)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dy};$$

5) $$F(x, y, z) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{z} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

6) $$F_1(x) = F(x, \infty, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

7) $$F_{1,2}(x, y) = F(x, y, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

6.17. On tire un obus sur une cible aérienne ponctuelle (de petite dimension). La dispersion du point d'éclatement de l'obus obéit à la loi normale; le centre de dispersion coïncide avec le but; les écarts quadratiques moyens $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$. La cible est frappée si la distance entre elle et le point d'éclatement de l'obus ne dépasse pas $r_0 = 2\sigma$. Trouver la probabilité pour que le but soit détruit en un seul coup.

Solution. D'après la formule (6.0.37) de la probabilité de tomber dans un ellipsoïde d'égale densité, on a

$$p = \mathrm{P}\{(X, Y, Z) \in E_2\} = 2\Phi(2) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, 2e^{-2} \approx 0{,}739.$$

6.18. Un système de trois variables aléatoires (X, Y, Z) est réparti avec une densité constante à l'intérieur d'une sphère de rayon r. Trouver la probabilité pour le point aléatoire (X, Y, Z) de tomber à l'intérieur d'une sphère de rayon $r/2$ concentrique à la sphère donnée.

Réponse. $p = 1/8$.

6.19. D'une urne qui contient a boules blanches, b noires et c rouges on tire une boule. Les variables aléatoires X, Y, Z sont définies par les conditions suivantes:

$$X = \begin{cases} 1, \text{ si apparaît une boule blanche;} \\ 0, \text{ si apparaît une boule noire ou rouge;} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, \text{ si apparaît une boule noire;} \\ 0, \text{ si apparaît une boule blanche ou rouge;} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1, \text{ si apparaît une boule rouge;} \\ 0, \text{ si apparaît une boule blanche ou noire.} \end{cases}$$

(X, Y, Z sont les indicatrices des événements: {boule blanche}; {boule noire}; {boule rouge}). Construire la matrice de corrélation et la matrice de corrélation normée du système des variables aléatoires X, Y, Z.

Solution. Les covariances sont déterminées d'après le tableau des probabilités des valeurs isolées de X, Y et Z. Introduisons la notation

$$P_{x_i y_j z_k} = \mathrm{P}\{X = x_i,\ Y = y_j,\ Z = z_k\}.$$

On a

$$P_{000} = \mathrm{P}\{X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0\} = 0;$$
$$P_{100} = \mathrm{P}\{X = 1,\ Y = 0,\ Z = 0\} = a/(a+b+c);$$
$$P_{010} = \mathrm{P}\{X = 0,\ Y = 1,\ Z = 0\} = b/(a+b+c);$$
$$P_{001} = \mathrm{P}\{X = 0,\ Y = 0,\ Z = 1\} = c/(a+b+c);$$
$$P_{110} = P_{101} = P_{011} = P_{111} = 0;$$
$$m_x = \frac{a}{a+b+c}, \quad m_y = \frac{b}{a+b+c}, \quad m_z = \frac{c}{a+b+c};$$

$$K_{xy} = \sum_{i,\,j,\,k} (x_i - m_x)(y_j - m_y) P_{x_i y_j z_k} =$$
$$= \left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right)\left(0 - \frac{b}{a+b+c}\right)\frac{a}{a+b+c} +$$
$$+ \left(0 - \frac{a}{a+b+c}\right)\left(1 - \frac{b}{a+b+c}\right)\frac{b}{a+b+c} +$$
$$+ \left(0 - \frac{a}{a+b+c}\right)\left(0 - \frac{b}{a+b+c}\right)\frac{c}{a+b+c} = \frac{-ab}{(a+b+c)^2}.$$

D'une façon analogue,

$$K_{xz}=\frac{-ac}{(a+b+c)^2}\ ;\quad K_{yz}=\frac{-bc}{(a+b+c)^2}\ .$$

Calculons ensuite les variances,

$$D_x=\alpha_2[X]-m_x^2=\frac{a}{a+b+c}-\frac{a^2}{(a+b+c)^2}=\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2}\ ;$$

d'une façon analogue,

$$D_y=b(a+c)/(a+b+c)^2 \text{ et } D_z=c(a+b)/(a+b+c)^2.$$

La matrice de corrélation

$$\|K\|=\begin{Vmatrix} D_x & K_{xy} & K_{xz} \\ & D_y & K_{yz} \\ & & D_z \end{Vmatrix}.$$

Cherchons les coefficients de corrélation

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_xD_y}}=\frac{-ab}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}=-\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}$$

et $r_{xz}=-\sqrt{\dfrac{ac}{(a+b)(c+b)}}$; $r_{yz}=-\sqrt{\dfrac{bc}{(b+a)(c+a)}}$.

La matrice de corrélation normée

$$\|r\|=\begin{Vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ & 1 & r_{yz} \\ & & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.20. Soit un système de variables aléatoires X et Y. La variable aléatoire X est répartie suivant la loi exponentielle de paramètre λ: $f_1(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x>0$. La répartition de la variable aléatoire Y pour la valeur donnée de $X=x>0$ obéit également à la loi exponentielle, mais de paramètre x: $f_2(y\mid x)=xe^{-xy}$ pour $y>0$. Ecrire la densité commune $f(x, y)$ des variables X, Y ; trouver la densité $f_2(y)$ de la variable aléatoire Y ; trouver la densité conditionnelle $f_1(x\mid y)$.

Solution.

$$f(x, y)=\begin{cases} \lambda x e^{-(\lambda+y)x} & \text{pour } x>0 \text{ et } y>0\ ; \\ 0 & \text{pour } x<0 \text{ ou } y<0\ ; \end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx=\begin{cases} \dfrac{\lambda}{(\lambda+y)^2} & \text{pour } y>0\ ; \\ 0 & \text{pour } y<0. \end{cases}$$

Ensuite, pour $y > 0$

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} x(\lambda + y)^2 e^{-(\lambda+y)x} & \text{pour } x > 0; \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

6.21. On donne deux variables aléatoires indépendantes: une variable continue X de densité $f_1(x)$ et une variable discrète Y de valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Trouver la fonction de répartition du système de variables X, Y.

Réponse. $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$, où $F_1(x) = \int_0^x f_1(x)\, dx$.

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leqslant y_1; \\ p_1 & \text{pour } y_1 < y \leqslant y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum_{i=1}^{k-1} p_i & \text{pour } y_{k-1} < y \leqslant y_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1 & \text{pour } y > y_n. \end{cases}$$

6.22. La variable aléatoire X est une variable discrète à deux valeurs x_1 et x_2 ($x_2 > x_1$) dont les probabilités sont p_1 et p_2. La variable aléatoire Y est une variable continue; pour $X = x_i$ sa répartition conditionnelle suit la loi normale d'espérance mathématique x_i et d'écart quadratique moyen σ ($i = 1, 2$).

Trouver la fonction de répartition commune $F(x, y)$ des variables aléatoires X, Y. Calculer la densité $f_2(y)$ de la variable aléatoire Y.

Solution. $F(x, y) = \mathrm{P}\{X < x\}\, \mathrm{P}\{Y < y \mid X < x\}$. Soit $x \leqslant x_1$; alors $\mathrm{P}\{X < x\} = 0$ et $F(x, y) = 0$; soit $x_1 < x \leqslant x_2$; alors $\mathrm{P}\{X < x\} = p_1$ et $F(x, y) = p_1 \mathrm{P}\{Y < X = x_1\} = p_1\left[\Phi\left(\frac{y - x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5\right]$. Pour $x > x_2$, d'après la formule des probabilités totales

$$F(x, y) = p_1\left[\Phi\left(\frac{y - x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] + p_2\left[\Phi\left(\frac{y - x_2}{\sigma}\right) + 0{,}5\right].$$

Par conséquent

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant x_1; \\ p_1\left[\Phi\left(\frac{y - x_1}{\sigma}\right) = 0{,}5\right] & \text{pour } x_1 < x \leqslant x_2; \\ p_1\left[\Phi\left(\frac{y - x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] + p_2\left[\varphi\left(\frac{y - x_2}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] & \\ & \text{pour } x > x_2. \end{cases}$$

Ensuite, en posant $x = \infty$ et en dérivant par rapport à y, on obtient

$$f_2(y) = \frac{d}{dy} F(\infty, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[p_1 e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2\sigma^2}} + p_2 e^{-\frac{(y-x_2)^2}{2\sigma^2}} \right].$$

6.23*. Les étoiles de la sphère céleste sont considérées comme un champ poissonien des points. Le nombre d'étoiles qui tombent dans l'objectif du télescope est une variable aléatoire répartie d'après la loi de Poisson de paramètre λs, où s est l'aire du secteur découpé dans la surface de la sphère unitaire par le champ de vision du téles-

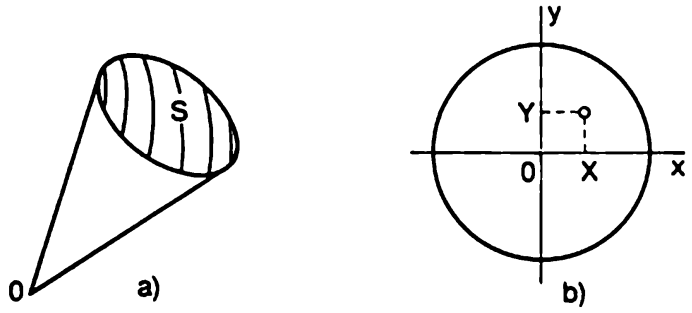


Fig. 6.23

cope (fig. 6.23, *a*). Le champ de vision du télescope est muni d'un réticule (fig. 6.23, *b*). Montrer que quelle que soit la position du télescope, les coordonnées (X, Y) de l'étoile la plus proche du réticule obéissent à la loi de répartition normale de paramètres $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 1/\sqrt{2\pi}\lambda$.

Solution. Nous avons montré dans le problème 5.19 que la distance R entre le centre du réticule et le point du champ poissonien qui lui est le plus proche obéit à la loi de Rayleigh. Mais $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, donc, la probabilité pour que le point (X, Y) tombe dans le cercle D de rayon r, c'est-à-dire que $\mathrm{P}\{X^2 + Y^2 < r^2\}$ peut s'écrire sous deux formes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{R < r\} &= \int_0^r 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr; \\ \mathrm{P}\{(X, Y) \in D\} &= \iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy, \end{aligned} \tag{6.23.1}$$

où $f(x, y)$ est la densité commune des variables X, Y. En vertu de la symétrie il faut admettre que $f(x, y)$ dépend seulement de la distance $f(x, y) = g(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En passant aux coordonnées polaires (r, φ), on obtient

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in D\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r g(r)\, dr = 2\pi \int_0^r r g(r)\, dr. \tag{6.23.2}$$

La comparaison des expressions (6.23.1) et (6.23.2) amène: $g(r) = \lambda e^{-\pi\lambda r^2}$, et donc $f(x, y) = \lambda e^{-\pi\lambda(x^2+y^2)}$, ce qu'il fallait démontrer.

6.24. Une source de particules α se trouve à l'origine O d'un système de coordonnées sphérique (r, φ, ϑ) (fig. 6.24), où $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $-\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$. Les particules sont émises uniformément dans toutes les directions. On considère une particule qui se déplace dans une direction aléatoire déterminée par les angles Φ et Θ. Ecrire la densité de répartition commune $f(\varphi, \vartheta)$ des variables aléatoires Φ et Θ.

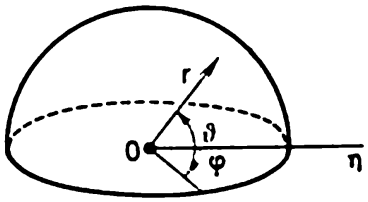


Fig. 6.24

Solution. Le déplacement « uniforme dans toutes les directions » des particules α signifie que pour le vecteur unitaire $\mathbf{e}$ issu du point O et déterminant la direction du vol de la particule, toutes les positions de son extrémité sur la sphère C de rayon unitaire possèdent la même densité de probabilité. Par conséquent, l'élément de probabilité $f(\varphi, \vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta$ doit être proportionnel à l'aire élémentaire ds sur la sphère C. Cette aire élémentaire étant égale à $dS = d\varphi\, d\vartheta \cos\vartheta$, on a

$$f(\varphi, \vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta = A \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta; \quad f(\varphi, \vartheta) = A \cos\vartheta,$$

où A est le coefficient de proportionnalité défini par la condition

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi, \vartheta)\, d\vartheta = 1,$$

on en tire $A = 1/(4\pi)$. De la sorte

$$f(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \cos\vartheta \quad \text{pour} \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \quad \text{et} \\ -\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

6.25*. Dans les conditions de l'énoncé précédent considérer le plan P parallèle au plan équatorial sur lequel est compté l'angle φ, et mené par le point O' de coordonnées sphériques $r = 1$; $\varphi = 0$; $\vartheta = \pi/2$ (fig. 6.25). Dans ce plan repose le système de coordonnées cartésien $xO'y$. Toutes les particules α qui se déplacent dans la demi-sphère supérieure tombent sur le plan P. On considère l'une de telles particules et les variables aléatoires qui lui correspondent: les coordonnées X, Y du point où la particule α tombe sur le plan P. Trouver la densité commune $f(x, y)$ de ces variables aléatoires. Ces dernières sont-elles dépendantes ou non?

Solution. Cherchons l'élément de probabilité $f(x, y)\,dx\,dy$ égal approximativement à la probabilité pour que la particule tombe sur l'aire élémentaire $dx\,dy$ adjacente au point (x, y). Cette probabilité se calcule de la même manière que dans le problème précédent. Cherchons l'aire ds du secteur de la sphère unitaire C, telle que les particules qui passent par ce secteur tombent également sur notre aire élémentaire. Ce secteur s'obtient par la projection centrale de l'aire $dx\,dy$ sur la sphère C. Pour une telle projection, l'aire est multipliée par le cosinus de l'angle ϑ entre la direction de la projection et le plan P, et de plus, elle est inversement proportionnelle au carré de la distance R du centre de projection ; l'aire élémentaire ds de la sphère C est donc :

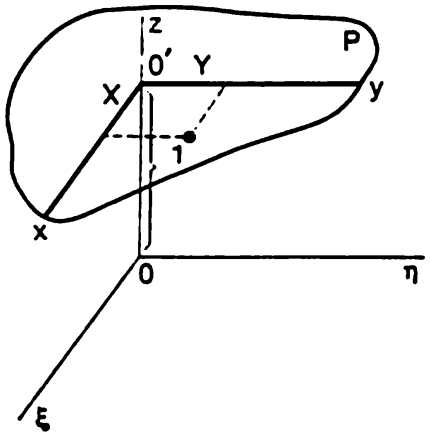


Fig. 6.25

$$ds = \frac{dx\,dy\cos\vartheta}{R^2} = \frac{dx\,dy\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} = \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Pour obtenir un élément de probabilité il faut diviser la quantité ds par la surface de toute la demi-sphère supérieure, égale à 2π. On obtient

$$f(x, y)\,dx\,dy = \frac{dx\,dy}{2\pi(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Les variables aléatoires X, Y sont dépendantes, étant donné que leur densité commune ne se décompose pas en produit de deux fonctions, dont l'une ne dépend que de x, et l'autre, que de y.

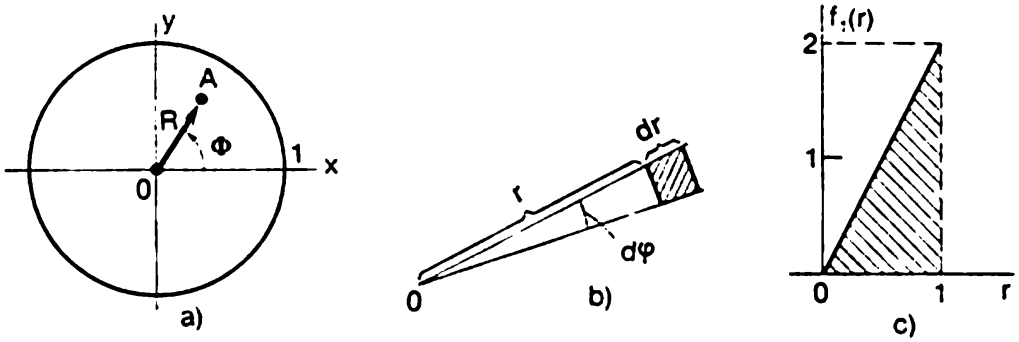


Fig. 6.26

6.26. Un point aléatoire A qui représente un objet sur l'écran circulaire de rayon 1 d'un radar (fig. 6.26, *a*) est réparti uniformément

dans les limites de ce cercle. Trouver la densité commune $f(r, \varphi)$ des coordonnées polaires (R, Φ) du point A. Les variables aléatoires R et Φ sont-elles dépendantes ou indépendantes?

Solution. Considérons dans le système de coordonnées polaires le « rectangle » élémentaire qui correspond aux accroissements infiniment petits dr, $d\varphi$ des coordonnées polaires r, φ d'un point à l'intérieur du cercle (fig. 6.26, *b*). Sa surface (aux infiniment petits d'ordre supérieur près) est égale à $rd\,rd\varphi$. En la divisant par la surface du cercle égale à π, on obtient l'élément de probabilité

$$f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi = rdr\, d\varphi/\pi,$$

d'où

$$f(r, \varphi) = r/\pi \text{ pour } 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi. \qquad (6.26.1)$$

La densité de répartition $f_1(r)$ s'obtient en intégrant (6.26.1) sur toute la plage de la variation de φ:

$$f_1(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi}\, d\varphi = 2r \text{ pour } 0 < r < 1.$$

D'une façon analogue

$$f_2(\varphi) = \int_0^1 \frac{r}{\pi}\, dr = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } 0 < \varphi < 2\pi.$$

La répartition $f_1(r)$ a la forme d'un triangle rectangle (fig. 6.26.*c*); la répartition $f_2(\varphi)$ est uniforme dans les limites du secteur $(0, 2\pi)$.

En multipliant $f_1(r)$ par $f_2(\varphi)$, on obtient la densité commune $f(r, \varphi)$ du système (R, Φ); par conséquent, les variables aléatoires R, Φ sont indépendantes. Notons que pour la même répartition uniforme d'un point dans les limites d'un cercle, ses coordonnées X, Y sont dépendantes; nous l'avons vu en résolvant le problème 6.8.

6.27. Sous les conditions de l'énoncé du problème précédent, le rayon de l'écran est égal non pas à 1, mais à a. Ecrire l'expression de la densité commune des coordonnées polaires du point A et des densités de chacune d'elles.

Solution. En divisant l'aire du « rectangle » élémentaire par celle de l'écran πa^2 et en réduisant par $drd\varphi$, on obtient

$$f(r, \varphi) = \frac{r}{\pi a^2} \quad \text{pour } 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi;$$

$$f_1(r) = \frac{2}{a^2} r \quad \text{pour } 0 < r < a;$$

$$f_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{pour } 0 < \varphi < 2\pi.$$

CHAPITRE VII

CARACTÉRISTIQUES NUMÉRIQUES DES FONCTIONS DES VARIABLES ALÉATOIRES

7.0. L'un des moyens les plus efficaces pour résoudre les problèmes probabilistes sans recourir aux lois de répartition est l'appareil des caractéristiques numériques qui permet de trouver les caractéristiques des variables aléatoires qui nous intéressent. En particulier, pour obtenir les caractéristiques numériques des fonctions il n'est pas de rigueur de connaître les lois de répartition des fonctions elles-mêmes, il suffit de connaître celles de l'argument ou des arguments.

Si X est une variable aléatoire discrète à tableau de répartition

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right| \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right),$$

alors que la variable Y est liée à X par la relation fonctionnelle $Y = \varphi(X)$, l'espérance mathématique de la variable Y est égale à

$$m_y = \mathrm{M}[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \tag{7.0.1}$$

et la variance est exprimée par l'une des deux formules:

$$D_y = \mathrm{D}[(\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - m_y]^2 p_i, \tag{7.0.2}$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_y^2. \tag{7.0.3}$$

Si (X, Y) est un système de variables aléatoires discrètes dont la répartition est déterminée par les probabilités

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{X = x_i, \quad Y = y_j\},$$

et $Z = \varphi(X, Y)$, alors l'espérance mathématique de la variable Z est égale à

$$m_z = \mathrm{M}[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}, \tag{7.0.4}$$

alors que la variance est exprimée par l'une des deux formules

$$D_y = \mathrm{D}\,[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j) - m_z]^2 p_{ij}, \tag{7.0.5}$$

$$D_y = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j)]^2 p_{ij} - m_z^2. \tag{7.0.6}$$

Si X est une variable aléatoire continue de densité $f(x)$, et $Y = \varphi(X)$, l'espérance mathématique de la variable Y s'écrit

$$m_y = \mathrm{M}\,[(\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx, \tag{7.0.7}$$

alors que la variance est exprimée par l'une des deux formules

$$D_y = \mathrm{D}\,[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x)\, dx, \tag{7.0.8}$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 f(x)\, dx - m_y^2. \tag{7.0.9}$$

Si (X, Y) est un système de variables aléatoires continues à densité commune $f(x, y)$, et $Z = \varphi(X, Y)$, l'espérance mathématique de Z est

$$m_z = \mathrm{M}\,[\varphi(X, Y)] = \int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy, \tag{7.0.10}$$

et la variance est exprimée par l'une des deux formules:

$$D_z = \mathrm{D}\,[\varphi(X, Y)] = \int\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y) - m_z]^2 f(x, y)\, dx\, dy. \tag{7.0.11}$$

$$D_z = \int\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y)]^2 f(x, y)\, dx\, dy - m_z^2. \tag{7.0.12}$$

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un système de n variables aléatoires continues de densité $f(x_1, \ldots, x_n)$, et $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$, l'espérance mathématique de la variable Y s'écrit

$$m_y = \mathrm{M}\,[\varphi(X_1, \ldots, X_n)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n, \tag{7.0.13}$$

et la variance est exprimée par l'une des deux formules:

$$D_y = \mathrm{D}\,[\varphi(X_1, \ldots, X_n)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, \ldots, x_n) - m_y]^2 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \qquad (7.0.14)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, \ldots, x_n)]^2 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n - m_y^2. \qquad (7.0.15)$$

Dans plusieurs cas pour obtenir les caractéristiques numériques des fonctions il n'est même pas nécessaire de connaître les lois de répartition des arguments, il suffit de connaître leurs caractéristiques numériques. Voici les théorèmes principaux relatifs à ces dernières.

1. Si c est une variable non aléatoire, on a

$$\mathrm{M}\,[c] = c; \quad \mathrm{D}\,[c] = 0. \qquad (7.0.16)$$

2. Si c est une variable non aléatoire, et X, une variable aléatoire, on a

$$\mathrm{M}\,[cX] = c\mathrm{M}\,[X]; \quad \mathrm{D}\,[cX] = c^2\mathrm{D}\,[X]. \qquad (7.0.17)$$

3. Théorème d'addition des espérances mathématiques. *L'espérance mathématique d'une somme des variables aléatoires est égale à la somme de leurs espérances mathématiques*:

$$\mathrm{M}\,[X + Y] = \mathrm{M}\,[X] + \mathrm{M}\,[Y], \qquad (7.0.18)$$

et, en général,

$$\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}\,[X_i]. \qquad (7.0.19)$$

4. L'espérance mathématique d'une fonction linéaire de plusieurs variables aléatoires

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

où a_i et b sont des facteurs non aléatoires, est égale à cette même fonction linéaire de leurs espérances mathématiques

$$m_y = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b, \qquad (7.0.20)$$

où $m_{x_i} = \mathrm{M}\,[X_i]$. Bref, cette règle peut s'écrire

$$\mathrm{M}\,[L(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = L(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}), \qquad (7.0.21)$$

où L est une fonction linéaire.

5. L'espérance mathématique d'un produit de deux variables aléatoires X, Y est exprimée par la formule

$$\mathrm{M}\,[XY] = \mathrm{M}\,[X]\,\mathrm{M}\,[Y] + K_{xy}, \qquad (7.0.22)$$

où K_{xy} est la covariance des variables X, Y. Cette formule peut s'écrire sous une autre forme

$$K_{xy} = \mathrm{M}\,[XY] - m_x m_y, \tag{7.0.23}$$

ou, en tenant compte que $\mathrm{M}\,[XY] = \alpha_{11}\,[X,\ Y]$,

$$K_{xy} = \alpha_{11}\,[X,\ Y] - m_x m_y. \tag{7.0.24}$$

6. Théorème de multiplication des espérances mathématiques. *L'espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires non corrélées X, Y est égale au produit de leurs espérances mathématiques*:

$$\mathrm{M}\,[XY] = \mathrm{M}\,[X]\,\mathrm{M}\,[Y]. \tag{7.0.25}$$

7. Si X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes, l'espérance mathématique de leur produit est égale au produit de leurs espérances mathématiques

$$\mathrm{M}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}\,[X_i]. \tag{7.0.26}$$

8. La variance de la somme de deux variables aléatoires s'écrit

$$\mathrm{D}\,[X + Y] = \mathrm{D}\,[X] + \mathrm{D}\,[Y] + 2K_{xy}. \tag{7.0.27}$$

9. La variance de la somme de plusieurs variables aléatoires est exprimée par la formule

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}\,[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{x_i x_j}. \tag{7.0.28}$$

où $K_{x_i x_j}$ est la covariance des variables aléatoires X_i et X_j.

10. Théorème d'addition des variances. *La variance d'une somme de deux variables aléatoires non corrélées X, Y est égale à la somme de leurs variances*:

$$\mathrm{D}\,[X + Y] = \mathrm{D}\,[X] + \mathrm{D}\,[Y], \tag{7.0.29}$$

et en général, pour les variables aléatoires non corrélées

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}\,[X_i]. \tag{7.0.30}$$

11. La *variance d'une fonction linéaire de plusieurs variables aléatoires*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

où a_i, b sont des grandeurs non aléatoires, est donnée par la formule

$$D_y = \mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{D}\,[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}. \tag{7.0.31}$$

Lorsque les variables X_1, X_2, ..., X_n sont non corrélées,

$$D_y = \mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{D}\,[X_i], \tag{7.0.32}$$

12. *Dans l'addition des vecteurs aléatoires non corrélés leurs covariances s'ajoutent*, c'est-à-dire si

$$X=X_1+X_2; \quad Y=Y_1+Y_2; \quad K_{x_1x_2}=K_{x_1y_2}=K_{y_1y_2}=K_{y_1x_2}=0,$$

il vient

$$K_{xy}=K_{x_1y_1}+K_{x_2y_2}. \tag{7.0.33}$$

Linéarisation des fonctions. La fonction $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de plusieurs arguments aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est dite *presque linéaire*, si dans toute la plage des valeurs pratiquement possibles des arguments elle peut avec une précision suffisante pour la pratique être linéarisée (remplacée d'une façon approchée par une fonction linéaire). Ceci implique

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m (X_i - m_{x_i}), \tag{7.0.34}$$

où

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m = \frac{\partial\varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n})}{\partial x_i}$$

est la dérivée partielle de la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport à l'argument x_i dans laquelle chaque argument a été remplacé par son espérance mathématique.

Le calcul approché de l'*espérance mathématique d'une fonction presque linéaire* $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se fait d'après la formule:

$$m_y \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}). \tag{7.0.35}$$

La *variance d'une fonction presque linéaire* se calcule d'après la formule approchée

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 D_{x_i} + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_m K_{x_ix_j}, \tag{7.0.36}$$

où D_{x_i} est la variance de la variable aléatoire X_i; $K_{x_ix_j}$, la covariance des variables X_i, X_j.

Lorsque les arguments aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont non corrélés

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 D_{x_i}. \tag{7.0.37}$$

Problèmes et exercices

7.1. Le tableau de répartition d'une variable aléatoire discrète X s'écrit

X:	-1	0	1	2
	0,2	0,1	0,3	0,4

Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = 2^x$.

Solution. $m_y = 2^{-1}\cdot 0{,}2 + 2^0\cdot 0{,}1 + 2^1\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}4 = 2{,}4$; $D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = (2^{-1})^2\cdot 0{,}2 + (2^0)^2\cdot 0{,}1 + (2^1)^2\cdot 0{,}3 + (2^2)^2\cdot 0{,}4 - 2{,}4^2 = 1{,}99$.

7.2. Une variable aléatoire continue X est répartie dans l'intervalle (0, 1) d'après la loi de densité $f(x) = 2x$ pour $x \in (0, 1)$ (fig. 7.2). Trouver l'espérance mathématique et la variance du carré de cette variable aléatoire $Y = X^2$.

Solution.

$$m_y = \alpha_2[X] = \int_0^1 x^2\, 2x\, dx = \frac{1}{2};$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_0^1 (x^2)^2\, 2x\, dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

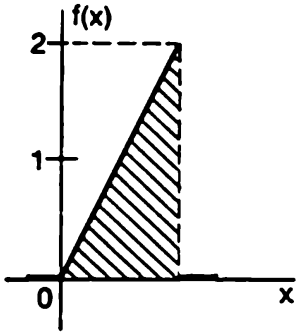


Fig. 7.2

7.3. Une variable aléatoire X est répartie d'après la loi exponentielle de densité $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$ ($\lambda > 0$). Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = e^{-X}$.

Solution.

$$m_y = \int_0^\infty e^{-x}\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda+1};$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_0^\infty e^{-2x}\lambda e^{-\lambda x}\, dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)}.$$

7.4. Une variable aléatoire X est répartie d'après la loi exponentielle de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$. Etablir dans quelles conditions existent l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = e^X$ et quelle est leur valeur.

Solution. $m_y = \int_0^\infty e^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-1)x}\, dx.$

Pour $\lambda - 1 > 0$, c'est-à-dire pour $\lambda > 1$, cette intégrale existe, elle vaut $m_y = \lambda/(\lambda - 1)$; avec $\lambda \leqslant 1$ elle est divergente.

$$\alpha_2[Y] = \int_0^\infty e^{2x}\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-2)x}\, dx.$$

Avec $\lambda > 2$ cette intégrale existe et vaut $\lambda/(\lambda - 2)$, alors que la variance $D_y = \lambda/(\lambda - 2) - [\lambda/(\lambda - 1)]^2$; avec $\lambda \leqslant 2$ l'intégrale est divergente et la variance D_y n'existe pas.

7.5. Une variable aléatoire X est répartie d'après la loi de densité $f(x) = 0{,}5 \cos x$ pour $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (fig. 7.5). Trouver l'espé-

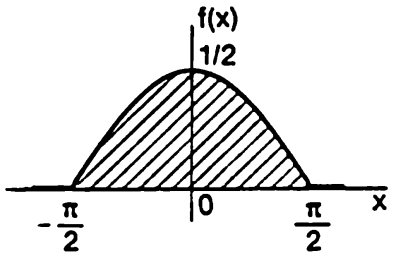


Fig. 7.5

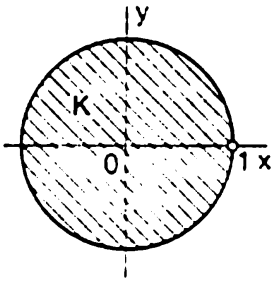


Fig. 7.7

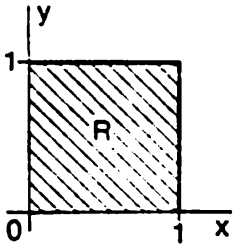


Fig. 7.8

rance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = \sin X$.

Solution. $m_y = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = 0$;

$$D_y = \alpha_2[Y] = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}.$$

7.6. Une variable aléatoire X est répartie d'après la même loi que dans l'énoncé précédent. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = |\sin X|$.

Solution. $m_y = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \cos x \, dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}$;

$$\alpha_2[Y] = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|^2 \cos x \, dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3};$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \frac{1}{12}.$$

7.7. Un point aléatoire (X, Y) est réparti uniformément à l'intérieur du cercle K de rayon $r = 1$ (fig. 7.7). Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Z = XY$.

Solution. $f(x, y) = 1/\pi$ pour $(x, y) \in K$;

$$m_z = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(K)} xy \, dx \, dy = 0;$$

$$D_z = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(K)} x^2 y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, dr = \frac{1}{24}.$$

7.8. Un point aléatoire (X, Y) est réparti uniformément à l'intérieur du carré R (fig. 7.8). Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Z = XY$.

Solution. Les variables aléatoires X, Y étant indépendantes, il vient

$$m_z = m_x m_y = (1/2)\ (1/2) = 1/4;$$
$$D_z = \alpha_2 [Z] - m_z^2 = M [(XY)^2] - m_z^2 = M [X^2]\, M [Y^2] - m_z^2;$$
$$M [X^2] = \alpha_2 [X] = 1/3;\ M [Y^2] = 1/3;\quad D_z = 7/144.$$

7.9. Soient deux variables aléatoires X et Y liées par la relation $Y = 2 - 3X$. Les caractéristiques numériques de la variable aléatoire X sont données: $m_x = -1$; $D_x = 4$. Déterminer: 1) l'espérance mathématique et la variance de la variable Y; 2) la covariance et le coefficient de corrélation des variables X, Y.

Solution. 1) $m_y = 2 - 3m_x = 5$; $D_y = (-3)^2 \cdot 4 = 36$; 2) $K_{xy} = M [XY] - m_x m_y = M [X (2 - 3X)] + 1 \cdot 5 = 2M [X] - 3M [X^2] + 5$; $M [X^2] = \alpha_2 [X] = D_x + m_x^2 = 4 + 1 = 5$, d'où

$$K_{xy} = -2 - 3 \cdot 5 + 5 = -12;$$
$$r_{xy} = -12/(\sigma_x \sigma_y) = -12/\sqrt{4 \cdot 36} \quad -1.$$

ce qui n'est que très naturel, puisque X et Y sont liées par une relation fonctionnelle linéaire à facteur négatif affecté à X.

7.10. Soit un système de variables aléatoires (X, Y, Z) à caractéristiques données: espérances mathématiques m_x, m_y, m_z et matrice de corrélation

$$\begin{Vmatrix} D_x & K_{xy} & K_{xz} \\ & D_y & K_{yz} \\ & & D_z \end{Vmatrix}.$$

Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $U = aX - bY + cZ - d$.

Réponse. $m_u = am_x - bm_y + cm_z - d$; $D_u = a^2 D_x + b^2 D_y + c^2 D_z - 2ab\, K_{xy} + 2acK_{xz} - 2bcK_{yz}$.

7.11. Soit un vecteur aléatoire n-dimensionnel $\mathrm{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dont les composantes sont n variables aléatoires X_i d'espérances mathématiques m_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, de variances D_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$ et à matrice de corrélation normée $\| r_{x_i x_j} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j > i)$. Le vecteur aléatoire X se transforme en vecteur aléatoire m-dimensionnel $\mathrm{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, les composan-

tes du vecteur Y étant obtenues à partir des composantes du vecteur X par des transformations linéaires :

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} X_i + b_x \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Trouver les caractéristiques du vecteur aléatoire Y : espérances mathématiques m_{y_k} $(k = 1, \ldots, m)$; variances D_{y_k} $(k = 1, \ldots, m)$ et éléments de la matrice de corrélation normée $\| r_{y_k y_l} \|$ $(l = 1, 2, \ldots, m ; k < l)$.

Réponse.

$$m_{y_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} m_{x_i} + b_k \qquad (k = 1, \ldots, m);$$

$$D_{y_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i<j} r_{x_i x_j} \sqrt{D_{x_i} D_{x_j}}; \quad r_{y_k y_l} = K_{y_k y_l} / \sqrt{D_{y_k} D_{y_l}},$$

où

$$K_{y_k y_l} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{il} D_{x_i} + \sum_{i<j} (a_{ik} a_l + a_{jk} a_{il}) r_{x_i x_j} \sqrt{D_{x_i} D_{x_j}}. \ .$$

7.12. Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y. La variable X est répartie d'après la loi normale $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. La répartition de la variable Y est uniforme dans l'intervalle (0, 2). Déterminer 1) M $[X + Y]$; 2) M $[XY]$; 3) M $[X^2]$; 4) M $[X - Y^2]$; 5) D $[X + Y]$; 6) D $[X - Y]$.

Solution.

1) M $[X + Y]$ = M $[X]$ + M $[Y]$ = 1 + 1 = 2 ;
2) M $[XY]$ = M $[X]$ M $[Y]$ = 1·1 = 1 ;
3) M $[X^2] = \alpha_2 [X] = D [X] + m_x^2 = 4 + 1 = 5$;
4) M $[X - Y^2]$ = M $[X]$ − M $[Y^2]$ = 1 − $\alpha_2 [Y]$ = −1/3 ;
5) D $[X + Y]$ = D $[X]$ + D $[Y]$ = 4 + 1/3 = 13/3 ;
6) D $[X - Y]$ = D $[X]$ + $(-1)^2$D $[Y]$ = 13/3 ;

7.13. Une variable aléatoire X suit la loi normale $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Etablir l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Y = 1 - 3X^2 + 4X^3$.

Solution. m_y = M $[1 - 3X^2 + 4X^3]$ = 1 − 3M $[X^2]$ + 4M $[X^3]$. Etant donné que $m_x = 0$, M $[X^2] = \sigma^2$; pour notre loi normale M $[X^3] = 0$, on en tire $m_y = 1 - 3\sigma^2$.

7.14. Les variables aléatoires X et Y sont réparties suivant les lois $f_1(x)$, $f_2(y)$, dont les graphiques des densités sont représentés

sur les figures 7.14, *a*, *b*. Calculer 1) M $[X + Y]$; 2) D $[3X - 6Y + 1]$; 3) $M[XY]$; 4) M $[2XY - 3X^2 + Y^2 - 1]$.

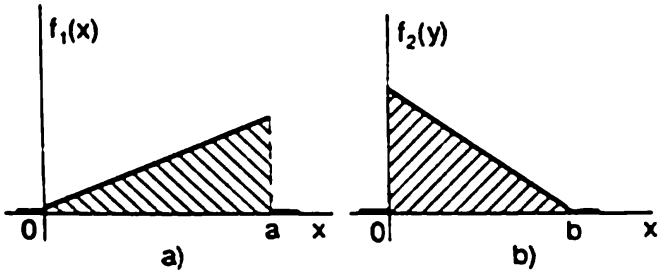


Fig. 7.14

Solution. M $[X] = 2a/3$; M $[Y] = b/3$; D $[X] = a^2/18$; D $[Y] = b^2/18$.

1) M $[X + Y] = (2a + b)/3$;

2) D $[3X - 6Y + 1] = 9D_x + 36D_y = a^2/2 + 2b^2$;

3) M $[XY] = 2ab/9$;

4) M $[2XY - 3X^2 + Y^2 - 1] = 2\text{M}[XY] - 3\alpha_2[X] + \alpha_2[Y] - 1 = 4ab/9 - 3a^2/2 + b^2/6 - 1$.

7.15. Répondre aux questions 1 à 3 de l'énoncé précédent si les variables X, Y sont dépendantes et leur coefficient de corrélation $r_{xy} = -0{,}9$.

Solution.

1) M $[X + Y] = (2a + b)/3$;

2) D $[3X - 6Y + 1] = a^2/2 + 2b^2 + (36ab/\sqrt{18 \cdot 18})\,0{,}9 = a^2/2 + 2b^2 + 1{,}8ab$;

3) M $[XY] = 2ab/9 - 0{,}9ab/18 = 31ab/180$.

7.16. Sur les côtés d'un angle rectangle xOy glisse par ses extrémités une règle AB de longueur l en adoptant une position aléatoire (fig. 7.16), toutes les valeurs de l'abscisse X de son extrémité A sur l'axe Ox dans les limites de 0 à l étant équiprobables. Trouver l'espérance mathématique de la distance R entre l'origine des coordonnées et la règle.

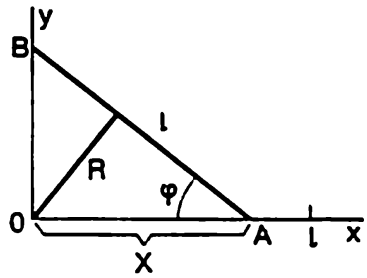


Fig. 7.16

Solution. La variable aléatoire X est répartie uniformément dans l'intervalle $(0, l)$: $f(x) = 1/l$ pour $x \in (0, l)$. La variable aléatoire R est exprimée à l'aide de X (voir fig. 7.16) : $R = X\sqrt{1 - (X/l)^2}$. Son espérance mathématique

$$m_r = \frac{1}{l}\int_0^l x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}.$$

7.17. Les variables aléatoires V, U sont liées linéairement aux variables aléatoires X, Y : $V = aX + bY + c$; $U = dX + fY + g$. On connaît les caractéristiques numériques du système des variables aléatoires X, Y : m_x, m_y, D_x, D_y, K_{xy}. Il faut déduire les caractéristiques numériques du système des variables aléatoires V, U : m_v, m_u, D_v, D_u, K_{vu}, r_{vu}.

Solution.

$$m_v = am_x + bm_y + c; \quad D_v = a^2D_x + b^2D_y + 2abK_{xy};$$
$$m_u = dm_x + fm_y + g; \quad D_u = d^2D_x + f^2D_x + 2df\,K_{xy}.$$

Puis

$$\mathring{V} = a\mathring{X} + b\mathring{Y}; \; \mathring{U} = d\mathring{X} + f\mathring{Y};$$
$$K_{vu} = M[\mathring{V}\mathring{U}] = ad\,D_x + bf\,D_y + (af + bd)\,K_{xy};$$
$$r_{vu} = K_{vu}/\sqrt{D_vD_u}.$$

7.18. Un corps est pesé sur une balance d'analyse. La valeur réelle, que nous ne connaissons pas, de sa masse est égale à a. La présence des erreurs rend aléatoire le résultat de chaque pesée réparti d'après la loi normale de paramètres a et σ. Pour réduire les erreurs le corps est pesé n fois et on retient comme valeur approchée de sa masse la moyenne arithmétique des résultats des n pesées : $Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 1) Trouver les caractéristiques de la variable aléatoire $Y(n)$: l'espérance mathématique et l'écart quadratique moyen ; 2) combien faut-il de pesées pour rendre l'erreur quadratique moyenne de la masse dix fois plus faible ?

Solution. 1) $M[Y(n)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i]$. Toutes les pesées étant réalisées dans des conditions identiques, $M[X_i] = a$ quel que soit i ; il vient donc

$$M[Y(n)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{na}{n} = a.$$

En considérant que les erreurs des pesées isolées sont indépendantes, on trouve la variance de $Y(n)$:

$$D[Y(n)] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2) Le nombre n de pesées se calcule d'après la condition

$$\sigma[Y(n)] = \sqrt{\sigma^2/n} = \sigma/\sqrt{n} = \sigma/10; \quad n = 100.$$

7.19. Un point lumineux représentatif d'un objet observé sur l'écran circulaire d'un radar peut occuper sur l'écran une position quelconque d'une façon aléatoire (la densité de probabilité est constante). Le diamètre de l'écran est D. Calculer l'espérance mathématique de la distance R entre le point lumineux et le centre de l'écran.

Solution. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, où (X, Y) est un système de variables aléatoires à répartition uniforme dans le cercle K_D de diamètre D :

$$f(x, y) = 4/(\pi D^2) \quad \text{pour } (x, y) \in K_D;$$

$$m_r = \mathrm{M}[R] = \iint\limits_{(K_D)} \sqrt{x^2+y^2}\, \frac{4}{\pi D^2}\, dx\, dy,$$

ou, en passant au système de coordonnées polaires (r, φ),

$$m_r = \frac{4}{\pi D^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{D/2} r^2\, dr = \frac{D}{3}.$$

7.20. Deux points X et Y prennent indépendamment l'un de l'autre une position aléatoire dans l'intervalle (0, 1) de l'axe des abscisses (fig. 7.20, *a*); dans cet intervalle la densité de probabilité des-

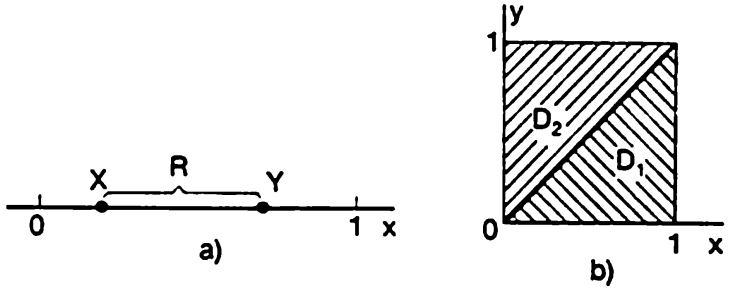


Fig. 7.20

deux variables aléatoires est constante. Calculer l'espérance mathématique de la distance R entre ces points et le carré de la distance entre eux.

Solution. On a $R = |Y - X|$; $m_r = \mathrm{M}[|Y - X|]$. Représentons le système de variables (X, Y) comme un point aléatoire sur le plan xOy (fig. 7.20, *b*), réparti avec la densité constante $f(x, y) = 1$ dans le carré de côté égal à l'unité. Dans le domaine D_1 : $X > Y$;

$|Y - X| = X - Y$. Dans le domaine D_2: $Y > X$; $|Y - X| = Y - X$.

$$m_r = \iint\limits_{(D_1)} (x-y)\,dx\,dy + \iint\limits_{(D_2)} (y-x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy + \int_0^1 dy \int_0^y (y-x)\,dx = \frac{1}{3};$$

$$\mathrm{M}[R^2] = \mathrm{M}[|Y-X|^2] = \alpha_2[Y] + \alpha_2[X] - 2m_x m_y =$$
$$= 2(D_x + m_x^2) - 2m_x^2 = 1/6.$$

7.21. Soit un carré K de côté égal à l'unité (fig. 7.21). Sur les côtés contigus du carré tombent les points X et Y d'une façon aléatoire et indépendamment l'un de l'autre; dans les limites du côté

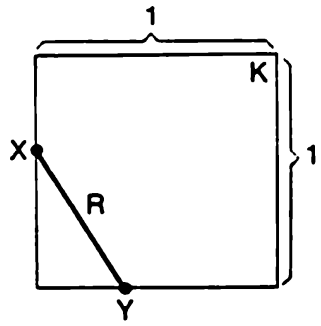


Fig. 7.21

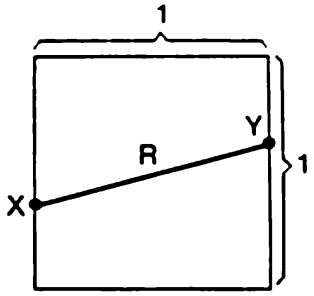


Fig. 7.22

correspondant chacun de ces points est réparti uniformément. Trouver l'espérance mathématique du carré de la distance entre eux.

Solution. $R^2 = X^2 + Y^2$; $\mathrm{M}[R^2] = \alpha_2[X] + \alpha_2[Y] = 2/3$.

7.22. L'énoncé du problème précédent est modifié de façon que les points X, Y tombent non pas sur les côtés contigus du carré, mais sur ses côtés opposés (fig. 7.22). Déduire l'espérance mathématique du carré de la distance entre les points X et Y.

Solution. $R^2 = 1 + (Y - X)^2$; $\mathrm{M}[R^2] = 1 + \alpha_2[Y] + \alpha_2[X] - 2\mathrm{M}[X]\,\mathrm{M}[Y] = 1 + 2/3 - 1/2 = 7/6$.

7.23. Les énoncés des problèmes précédents (7.21) et (7.22) sont modifiés de façon que les points X et Y prennent d'une façon aléatoire et indépendamment l'un de l'autre une position quelconque sur le périmètre du carré K, avec une densité constante. Trouver l'espérance mathématique du carré de la distance entre eux.

Solution. Retenons trois hypothèses:

H_1 = {les points X, Y sont tombés sur le même côté du carré};

H_2 = {les points X, Y sont tombés sur les côtés contigus du carré};

H_3 = {les points X, Y sont tombés sur les côtés opposés du carré}.

L'espérance mathématique de la variable R^2 se trouve d'après la formule de l'espérance mathématique totale :

$$\mathrm{M}[R^2] = \mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{M}[R^2 \mid H_1] + \mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{M}[R^2 \mid H_2] + \\ + \mathrm{P}(H_3)\,\mathrm{M}[R^2 \mid H_3],$$

où $\mathrm{M}[R^2 \mid H_1]$, $\mathrm{M}[R^2 \mid H_2]$, $\mathrm{M}[R^2 \mid H_3]$ sont les espérances mathématiques conditionnelles de la variable R^2 des hypothèses correspondantes.

A partir des problèmes 7.20, 7.21 et 7.22 résolus ci-dessus on a

$$\mathrm{M}[R^2 \mid H_1] = 1/6;\ \mathrm{M}[R^2 \mid H_2] = 2/3;\ \mathrm{M}[R^2 \mid H_3] = 7/6.$$

Calculons les probabilités des hypothèses : $\mathrm{P}(H_1) = 1/4$; $\mathrm{P}(H_2) = 1/2$; $\mathrm{P}(H_3) = 1/4$; on en tire : $\mathrm{M}[R^2] = {}^1/_4 \cdot {}^1/_6 + {}^1/_2 \cdot {}^2/_3 + {}^1/_4 \cdot {}^7/_6 = {}^2/_3$.

7.24. La densité d'une variable aléatoire X est $f(x)$. On considère sa fonction $Y = \min\{X, a\}$, où a est une grandeur non aléatoire. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y sans calculer sa loi de répartition.

Solution. D'après la formule générale (7.0.7)

$$\mathrm{M}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x, a\} f(x)\,dx.$$

Pour $x < a$ on obtient $\min\{x, a\} = x$; pour $x \geqslant a$, on a $\min\{x, a\} = a$. On en tire

$$\mathrm{M}[Y] = \int_{-\infty}^{a} x f(x)\,dx + a \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x f(x)\,dx + aP\{X > a\}. \tag{7.24.1}$$

D'une façon analogue, on trouve le moment initial d'ordre deux

$$\alpha_2[Y] = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)\,dx + a^2 \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)\,dx + a^2 P\{X > a\} \tag{7.24.2}$$

et la variance

$$\mathrm{D}[Y] = \alpha_2[Y] - (\mathrm{M}[Y])^2.$$

7.25. Même question que dans le problème précédent, mais X est une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs entières positives à probabilités données par le tableau de répartition.

X :	1	2	...	k	...	n
	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

; $Y = \min\{X, a\}$,

a est un nombre entier positif non aléatoire compris entre 1 et n $(1 < a < n)$.

Solution. $\mathrm{M}[Y] = \sum_{k=1}^{n} \min\{k, a\} p_k$; pour $k < a$ on obtient $\min\{k, a\} = k$; pour $k \geqslant a$, on obtient $\min\{k, a\} = a$. Alors,

$$\mathrm{M}[Y] = \sum_{k=1}^{a-1} k p_k + a \sum_{k=a}^{n} p_k.$$

Par calcul analogue on obtient le moment initial d'ordre deux

$$\alpha_2[Y] = \sum_{k=1}^{a=1} k^2 p_k + a^2 \sum_{k=a}^{n} p_k$$

et la variance

$$\mathrm{D}[Y] = \alpha_2[Y] - (\mathrm{M}[Y])^2.$$

7.26. On procède à une série d'épreuves indépendantes dont chacune donne lieu à l'événement A avec une probabilité p. La réalisation de l'événement A met fin aux épreuves; le nombre total de ces dernières ne doit pas dépasser N. Calculer l'espérance mathématique et la variance du nombre d'épreuves Y qu'on va effectuer.

Solution. Considérons d'abord la variable aléatoire X, nombre d'épreuves réalisées, si la limitation N de leur nombre total est levée. La répartition de la variable aléatoire X suit la loi géométrique qui débute par l'unité; son tableau de répartition s'écrit

X:	1	2	...	k	...
	p	pq	...	pq^{k-1}	...

$(q = 1 - p)$.

La variable aléatoire Y est la valeur minimale de X et de N: $Y = \min\{X, N\}$. Les résultats du problème 7.25 amènent (en posant $n = \infty$)

$$\mathrm{M}[Y] = \sum_{k=1}^{N-1} k p_k + N \sum_{k=N}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{N-1} k p q^{k-1} +$$

$$+ N \sum_{k=N}^{\infty} p q^{k-1} = p\left\{\sum_{k=1}^{N-1} k q^{k-1} + N \sum_{k=N}^{\infty} q^{k-1}\right\}.$$

Calculons la première somme

$$\sum_{k=1}^{N-1} k q^{k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{d}{dq} q^k = \frac{d}{dq} \frac{q - q^N}{1-q} = \frac{1 - N q^{N-1} + (N-1) q^N}{(1-q)^2}.$$

La deuxième somme est égale à $(q^{N-1})/(1-q)$, d'où

$$M[Y] = p\,\frac{1-Nq^{N-1}+(N-1)\,q^N+Nq^{N-1}-Nq^N}{(1-q)^2} = \frac{1-q^N}{p}.$$

7.27. Au chapitre premier nous avons examiné le problème de Buffon : une aiguille de longueur l est jetée au hasard sur un plan quadrillé par des droites parallèles reposant l'une de l'autre à la distance $L > 1$; on a établi ainsi que la probabilité pour que l'aiguille croise l'une des droites est égale à $p = 2l/(L\pi)$; le nombre d'intersections pour $l < L$ pouvant être seulement 0 ou 1, l'espérance mathématique de ce nombre est p. Quelle sera l'espérance mathématique du nombre d'intersections de l'aiguille avec les droites, si on lève la limitation $l < L$?

Solution. Divisons la longueur de l'aiguille l en n tronçons élémentaires $\Delta l = l/n < L$. La variable aléatoire X, nombre d'intersections de l'aiguille avec les droites, peut être exprimée sous la forme d'une somme : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est le nombre d'intersections avec les droites de l'i-ième tronçon élémentaire. La variable aléatoire X_i, indicatrice de l'intersection de l'i-ième tronçon avec l'une des droites, a une espérance mathématique égale à la probabilité de l'intersection

$$M[X_i] = p_i = 2\Delta l/(L\pi),$$

d'où

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{2n\,\Delta l}{L\pi} = \frac{2l}{L\pi}.$$

7.28. Sur un plan divisé par des droites parallèles du problème précédent on jette au hasard un contour quelconque (convexe ou concave, fermé ou ouvert) d'une longueur l. Déterminer l'espérance mathématique du nombre d'intersections de ce contour avec les droites.

Solution. Tout comme dans le problème précédent, $M[Y] = 2l/(L\pi)$. Pour le démontrer il faut diviser le contour en n tronçons élémentaires pratiquement rectilignes de longueur Δl ; pour chacun d'entre eux l'espérance mathématique du nombre d'intersections est $2\Delta l/(L\pi)$, et pour le contour tout entier, $2l/(L\pi)$.

7.29. Sur un plan divisé par des droites parallèles distantes l'une de l'autre de L on jette au hasard un contour convexe fermé de longueur l, dont la dimension maximale a ne dépasse pas L (fig. 7.29). Trouver la probabilité pour qu'il ne se croise pas avec l'une des droites.

Solution. Désignons par p la probabilité cherchée, par Y, le nombre d'intersections du contour avec les droites. Le contour étant convexe et fermé, et sa dimension maximale inférieure à L, il peut avoir soit deux intersections avec les droites, soit n'en avoir aucune. Le tableau de répartition de la variable aléatoire Y est de la forme

$$Y: \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 2 \\ \hline 1-p & p \\ \hline \end{array}.$$

En vertu du problème 7.28, $M[Y] = 0\cdot(1-p) + 2p = 2p = 2l/(L\pi)$, d'où $p = l/(L\pi)$.

7.30. Soit un plan quadrillé en rectangles de côtés L et M (fig. 7.30). On jette au hasard sur le plan une aiguille de longueur l ($l < L$;

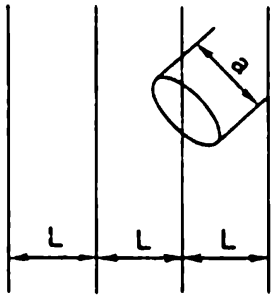


Fig. 7.29

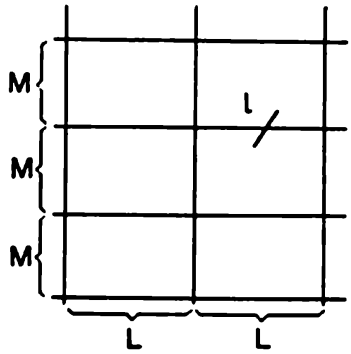


Fig. 7.30

$l < M$). a) Etablir la probabilité pour que l'aiguille croise au moins l'une des lignes. b) Trouver l'espérance mathématique du nombre d'intersections de l'aiguille avec l'une quelconque des droites, les limitations $l < L$ et $l < M$ étant levées.

Solution. a) Admettons que les droites qui délimitent les rectangles constituant deux systèmes de lignes, horizontales et verticales. Considérons les événements :

A = {l'aiguille coupe l'une des droites verticales} ;

B = {l'aiguille coupe l'une des droites horizontales}.

La position de l'aiguille par rapport aux droites verticales n'influant d'aucune façon sur sa position par rapport aux droites horizontales, les événements A et B sont indépendants ; aussi, la probabilité cherchée

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B).$$

Conformément au problème de Buffon $P(A) = 2l/(\pi L)$; $P(B) = 2l/(\pi M)$; on en tire

$$P(A + B) = 2l/(\pi L) + 2l/(\pi M) - 4l^2/(\pi^2 LM).$$

b) La variable aléatoire $X = X_1 + X_2$, où X_1 et X_2 sont les nombres d'intersections de l'aiguille avec les droites horizontales et verticales respectivement.

Tout comme dans ce qui précède, en divisant l'aiguille de longueur arbitraire l en tronçons élémentaires, on obtient

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] = 2l/(\pi L) + 2l/(\pi M).$$

7.31. Un rectangle de dimension $l_1 \times l_2$ est jeté au hasard sur un plan (fig. 7.31); toutes les valeurs de l'angle Θ sont équiprobables. Trouver l'espérance mathématique de la longueur X de sa projection sur l'axe Ox.

Solution. Représentons X comme la somme $X_1 + X_2$, où X_1 est la projection du tronçon l_1; X_2, la projection du tronçon l_2. L'espérance mathématique cherchée

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] = 2l_1/\pi + 2l_2/\pi = 2(l_1 + l_2)/\pi,$$

c'est-à-dire qu'elle est égale au périmètre du rectangle divisé par π.

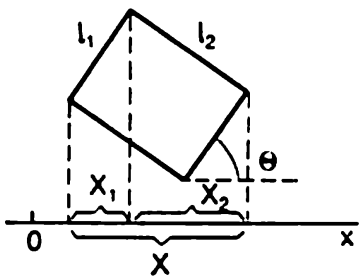


Fig. 7.31

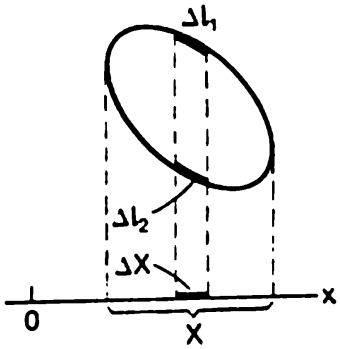


Fig. 7.32

7.32. Un contour convexe fermé de longueur l est jeté au hasard sur un plan, toutes ses orientations étant équiprobables (fig. 7.32). Etablir l'espérance mathématique de la longueur X de sa projection sur l'axe Ox.

Solution. Le contour étant convexe, chaque élément de la projection Δx s'obtient par la projection de deux et seulement deux éléments opposés du contour: Δl_1 et Δl_2 (voir fig. 7.32); donc, la longueur moyenne de la projection du contour est deux fois inférieure à la somme des longueurs moyennes des projections des tronçons élémentaires Δl par lesquels on peut diviser le contour

$$M[X] = \frac{1}{2} \sum \frac{2\Delta l}{\pi} = \frac{l}{\pi}.$$

7.33. Soit une variable aléatoire X de densité $f(x)$. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = |X|$.

Solution. L'écriture $Y = |X|$ signifie que

$$Y = \begin{cases} -X & \text{pour } X < 0; \\ X & \text{pour } X > 0. \end{cases}$$

$$m_y = \mathrm{M}\,|Y| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} x\,[f(x) + f(-x)]\,dx;$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f(x)\,dx - m_y^2 = \alpha_2[X] - m_y^2 =$$

$$= D_x + m_x^2 - m_y^2.$$

7.34. Calculer l'espérance mathématique et la variance du module de la variable aléatoire X répartie suivant la loi normale de paramètres m, σ.

Solution. D'après le problème précédent

$$m_y = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} x e^{-\frac{(x-m)}{2\sigma^2}}\,dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

En procédant à la substitution des variables $(x - m)/\sigma = t$, on obtient

$$m_y = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{m}{\sigma}} (t\sigma + m)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m}{\sigma}}^{\infty} (t\sigma + m)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2} + 2m\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right),$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de Laplace.

$$D_y = \sigma^2 + m^2 - m_y^2.$$

En particulier, pour $m = 0$:

$$m_y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \approx 0{,}80\sigma; \quad D_y = \sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2 \approx 0{,}36\sigma^2.$$

7.35*. Les densités des variables aléatoires indépendantes X et Y sont $f_1(x)$ et $f_2(y)$. Déduire l'espérance mathématique et la variance du module de leur différence $Z = |X - Y|$.

Solution. On a

$$m_z = \int\int_{-\infty}^{\infty} |x-y| f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy.$$

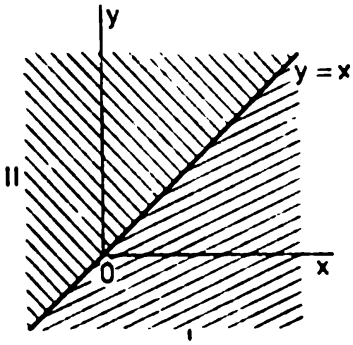


Fig. 7.35

La droite $y = x$ divise le plan xOy en deux régions I et II (fig. 7.35). Dans la région I, $x > y$; $|x - y| = x - y$. Dans la région II, $y > x$; $|x - y| = y - x$. On en tire

$$m_z = \int\int_{(I)} (x-y) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy + \int\int_{(II)} (y-x) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_2(y)\, dy \right\} dx - \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) \left\{ \int_{y}^{\infty} f_1(x)\, dx \right\} dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) \left\{ \int_{-\infty}^{y} f_1(x)\, dx \right\} dy - \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) \left\{ \int_{x}^{\infty} f_2(y)\, dy \right\} dx.$$

Introduisons les fonctions de répartition

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\, dx; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\, dy.$$

Alors,

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) F_2(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) [1 - F_1(y)]\, dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) F_1(y)\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) [1 - F_2(x)]\, dx.$$

En réunissant la première intégrale avec la quatrième et la deuxième avec la troisième, on obtient

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} [2x f_1(x) F_2(x) - x f_1(x)]\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [2y f_2(y) F_1(y) - y f_2(y)]\, dy =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)F_2(x)\,dx - m_x + 2\int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)F_1(y)\,dy - m_y.$$

X et Y étant des variables indépendantes, il vient

$$\alpha_2[Z] = \mathrm{M}[|X-Y|^2] = \mathrm{M}[(X-Y)^2] =$$
$$= \mathrm{M}[X^2] + \mathrm{M}[Y^2] - 2\mathrm{M}[X]\,\mathrm{M}[Y] =$$
$$= \alpha_2[X] + \alpha_2[Y] - 2m_xm_y = D_x + D_y + (m_x - m_y)^2.$$

On en tire $D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2$.

7.36. Les densités des variables aléatoires indépendantes X et Y sont $f_1(x)$ et $f_2(y)$. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la plus petite de ces deux variables: $Z = \min\{X, Y\}$.

Solution.

$$Z = \begin{cases} X \text{ si } X \leqslant Y; \\ Y \text{ si } X > Y. \end{cases}$$

La droite $y = x$ divise le plan xOy en deux régions (voir fig. 7.35): I, où $Z = Y$, et II, où $Z = X$ (le cas $X = Y$ n'est pas envisagé, sa probabilité étant nulle).

$$m_z = \mathrm{M}[Z] = \iint_{(\mathrm{II})} xf_1(x)f_2(y)\,dx\,dy + \iint_{(\mathrm{I})} yf_1(x)f_2(y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)[1-F_2(x)]\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)[1-F_1(y)]\,dy,$$

où F_1, F_2 sont les fonctions de répartition des variables aléatoires X et Y.

$$\alpha_2[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f_1(x)[1-F_2(x)]\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y^2f_2(y)[1-F_1(y)\,dy];$$
$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2.$$

7.37. La tension aléatoire U est répartie d'après la loi normale $f(u)$ de paramètres m_u et σ_u. La tension U est appliquée au limiteur qui la laisse égale à U, si $U \leqslant u_0$ et la rend égale à u_0, si $U > u_0$;

$$Z = \min\{U, u_0\} = \begin{cases} U & \text{pour } U \leqslant u_0; \\ u_0 & \text{pour } U > u_0. \end{cases}$$

Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Z, tension à la sortie du limiteur.

Solution. En vertu du problème 7.24, on a

$$m_z = \mathrm{M}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{u, u_0\} f(u)\, du = \int_{-\infty}^{u_0} u f(u)\, du + \int_{u_0}^{\infty} u_0 f(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{u_0} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_u} \exp\left[-\frac{(u-m_u)^2}{2\sigma_u^2}\right] du + u_0 \int_{u_0}^{\infty} f(u)\, du =$$

$$= m_u\left[\Phi\left(\frac{u_0-m_u}{\sigma_u}\right) + 0{,}5\right] - \frac{\sigma_u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_0-m_u}{\sigma_u}\right)^2\right] +$$

$$+ u_0\left[0{,}5 - \Phi\left(\frac{u_0-m_u}{\sigma_u}\right)\right] \quad u_0 - \sigma_u\left[t_0(\Phi(t_0)+0{,}5) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right]\right], \quad \text{où } t_0 = \frac{u_0-m_u}{\sigma_u};$$

$$\alpha_2'[Z] = \int_{-\infty}^{u_0} u^2 f(u)\, du + \int_{u_0}^{\infty} u_0^2 f(u)\, du = (m_u^2 + \sigma_u^2)(\Phi(t_0)+0{,}5) +$$

$$+ u_0^2[0{,}5 - \Phi(t_0)] - \frac{2\sigma_u m_u + \sigma_u^2 t_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right];$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2 = \sigma_u^2 \left\{(1+t_0^2)(\Phi(t_0)+0{,}5) + \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[t_0(\Phi(t_0)+0{,}5) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right]\right]^2\right\}.$$

Notons que pour $u_0 = m_u$, $t_0 = 0$, on a $m_z = m_u - \sigma_u(\sqrt{2\pi})^{-1}$; $D_z = \sigma_u^2(\pi - 1)(2\pi)^{-1}$.

7.38. N messages sont transmis par une voie de communication; la durée de chaque message est aléatoire, elle possède les mêmes espérance mathématique m et variance D et ne dépend pas de la durée des autres messages. Trouver l'espérance mathématique et la variance du temps global T nécessaire pour transmettre tous les N messages. Calculer $T_{\max}$, le temps maximal pratiquement possible de la transmission de tous les messages.

Solution. $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$, où T_i est la durée de l'i-ième message ($i = 1, 2, \ldots, N$). D'après le théorème d'addition des espérances mathématiques

$$\mathrm{M}[T] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}[T_i] = Nm.$$

D'après le théorème d'addition des variances

$$D[T] = D\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] = \sum_{i=1}^{N} D[T_i] = ND,$$

$$\sigma_t = \sqrt{D[T]} = \sqrt{ND}.$$

D'après la « règle des trois sigma » $T_{max} = Nm + 3\sqrt{ND}$.

7.39. Résoudre le problème précédent avec cette modification que les durées T_i des messages sont dépendantes et le coefficient de corrélation des variables aléatoires T_i et T_j est égal à r_{ij}.

Solution. L'espérance mathématique est de nouveau $M[T] = Nm$. Pour calculer la variance cherchons la covariance des variables T_i, T_j: $K_{ij} = r_{ij}\sigma^2 = r_{ij}D$. D'après la formule (7.0.28) de la variance d'une somme

$$D[T] = ND + 2\sum_{i<j} r_{ij}D = D\left(N + 2\sum_{i<j} r_{ij}\right);$$

$$T_{max} = Nm + 3\sqrt{D[T]}.$$

7.40. La répartition d'un système de variables aléatoires (X, Y) est uniforme dans le rectangle R (fig. 7.40). Déterminer: 1) $M[X + Y]$; 2) $M[X - Y]$; 3) $M[XY]$; 4) $D[X + Y]$; 5) $D[X - Y]$; 6) $M[(X - Y)^2]$; et 7) $M[2X^3 + 3Y^2 + 1]$.

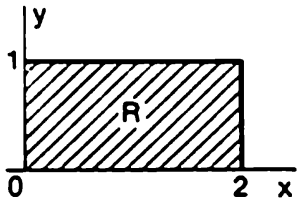


Fig. 7.40

Réponse. 1) 3/2; 2) 1/2; 3) 1/2; 4) 5/12; 5) 5/12; 6) 2/3; 7) 6.

7.41. Un appareil électronique subit en service des défaillances aléatoires; le nombre moyen de ces dernières par unité de temps de fonctionnement de l'appareil est égal à λ; le nombre de défaillances pendant le temps τ est une variable aléatoire répartie d'après la loi de Poisson de paramètre $a = \lambda\tau$. L'élimination de la défaillance apparue (réparation de l'appareil) demande un temps aléatoire T_{rep}; la répartition de ce temps suit une loi exponentielle $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ pour $t > 0$. Les durées des éliminations des défaillances sont indépendantes. Trouver: 1) la part moyenne du temps de service sans défaillance de l'appareil et la part moyenne du temps que prennent les réparations; 2) l'intervalle moyen du temps entre deux défaillances consécutives.

Solution. 1) Le temps moyen de bon fonctionnement de l'appareil (espérance mathématique du temps que l'appareil fonctionne ap-

rès la mise en marche jusqu'à la réparation) est $\bar{t}_{ser} = 1/\lambda$. Le temps moyen de réparation $\bar{t}_{rep} = 1/\mu$. La durée moyenne du service sans défaillance est

$$\alpha = \frac{\bar{t}_{ser}}{\bar{t}_{ser} + \bar{t}_{rep}} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

D'une façon analogue, la part moyenne du temps que prend la réparation de l'appareil:

$$\beta = 1 - \alpha = \lambda/(\lambda + \mu).$$

2) L'intervalle moyen $\bar{I}_t$ entre deux pannes consécutives:

$$\bar{I}_t = \bar{t}_{ser} + \bar{t}_{rep} = 1/\lambda + 1/\mu = (\lambda + \mu)/(\lambda\mu).$$

7.42. Un point aléatoire (X, Y) obéit à la loi de répartition normale à dispersion circulaire $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. La variable aléatoire R est la distance du point (X, Y) au centre de dispersion. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable R.

Solution. $$R = \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$m_r = \mathrm{M}[R] = \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2}\, \frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx\, dy.$$

Passons au système de coordonnées polaires r, φ:

$$m_r = \int_0^{\infty} r^2 \frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}25\sigma;$$

$$D_r = \mathrm{D}[R] = \alpha_2[R] - m_r^2 =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx\, dy - m_r^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} r^3 \frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \int_0^{2\pi} d\varphi - \sigma^2 \frac{\pi}{2} =$$

$$= 2\sigma^2 \int_0^{\infty} te^{-t}\, dt - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \sigma^2 \frac{4 - \pi}{2}.$$

7.43. Démontrer que si la répartition d'une variable aléatoire X est binomiale à paramètres n et p, son espérance mathématique est $M[X] = np$, et sa variance $D[X] = npq$ $(q = 1 - p)$.

Solution. X, le nombre d'apparitions de l'événement A dans n épreuves indépendantes, est mis sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est l'indicatrice de l'événement A dans l'i-ième épreuve, c'est-à-dire

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ si dans l'}i\text{-ième épreuve l'événement est réalisé;} \\ 0, \text{ si dans l'}i\text{-ième épreuve l'événement n'a pas été réalisé} \end{cases}$$

$$M[X_i] = p; \quad D[X_i] = pq;$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = np; \quad D[X] = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

7.44. Démontrer que pour n épreuves indépendantes dans lesquelles l'événement A se réalise avec des probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$, l'espérance mathématique et la variance du nombre X d'apparitions de l'événement sont égales à

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i; \quad D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \text{ où } q_i = 1 - p_i.$$

Solution. D'une façon analogue au problème précédent $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est l'indicatrice de l'événement A dans l'i-ième épreuve

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i; \quad D[X] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

$$\sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{pq/n}$$

7.45. On considère n épreuves indépendantes dans lesquelles l'événement A apparaît avec une probabilité p. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la fréquence Y de l'événement A. Etablir la marge des valeurs pratiquement possibles de la fréquence.

Solution. $Y = X/n$, où X est le nombre d'apparitions de l'événement A.

$$M[Y] = M[X]/n = \frac{1}{n} np = p; \quad D[Y] = npq/n^2 = pq/n,$$

où $q = 1 - p$, La marge des valeurs pratiquement possibles de Y est $m_y \pm 3\sigma_y = p \pm 3\sqrt{pq/n}$.

7.46. Démontrer que l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X à répartition hypergéométrique (voir 4.0.34) de paramètres a, b, n sont égales respectivement à

$$M[X]=\frac{na}{a+b}; \quad D[X]=\frac{nab}{(a+b)^2}+n(n-1)\times$$
$$\times\left[\frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]. \qquad (7.46.1)$$

Solution. Considérons le modèle physique de l'apparition d'une répartition hypergéométrique: tirage de n boules d'une urne où se trouvent a boules blanches et b noires, X est le nombre de boules blanches extraites. Représentons n tirages d'une boule comme n épreuves dont chacune peut donner lieu à l'événement A = {boule blanche}. Représentons la variable X comme la somme des X_i, variables indicatrices de l'événement A dans l'i-ième épreuve: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Les variables aléatories X_i sont dépendantes, mais le théorème de l'addition des espérances mathématiques est applicable:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} M[X_i]; \quad M[X_i]=\frac{a}{a+b}; \quad M[X]=\frac{na}{a+b}$$

La variance de la somme des variables aléatoires X_i se trouve d'après la formule (7.0.28):

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]+2\sum_{i<j} K_{x_ix_j}; \qquad (7.46.2)$$
$$D[X_i]=pq=\frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b}=\frac{ab}{(a+b)^2};$$
$$\sum_{i=1}^{n} D[X_i]=\frac{nab}{(a+b)^2}$$

Calculons

$$K_{x_ix_j}=M[X_iX_j]-M[X_i]\,M[X_j].$$

Le produit des variables indicatrices X_iX_j de l'événement A dans les i-ième et j-ième épreuves n'est égal à l'unité que si $X_i=1$, $X_j=1$, c'est-à-dire que si l'événement A se produit dans l'i-ième et la j-ième épreuves. La probabilité de ceci est égale à $\frac{a}{(a+b)}\,\frac{(a-1)}{(a+b-1)}$; c'est également la valeur de l'espérance mathématique

$$M[X_iX_j]=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

On en tire

$$K_{x_i x_j} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2. \qquad (7.46.3)$$

Le nombre de termes de la somme $\sum_{i<j} K_{x_i x_j}$ est égal à $C_n^2 = n(n-1)/2$. En portant (7.46.3) dans (7.46.2), on obtient la formule (7.46.1).

7.47. Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires; on en tire à la fois 6 boules. La variable aléatoire X est le nombre de boules noires parmi celles qui ont été tirées. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable X.

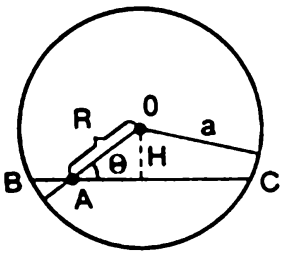


Fig. 7.49

Réponse. $M[X] = 3{,}5$; $D[X] = 35/44 \approx 0{,}795$.

7.48. Un poste radar balaye une région de l'espace où se trouvent N objets. En un cycle de balayage l'i-ième objet, indépendamment des autres, est détecté avec une probabilité p_i ($i = 1, \ldots, N$). Pendant le temps d'observation on réalise n cycles de balayage. Trouver l'espérance mathématique et la variance du nombre X d'objets détectés.

Solution. $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, où X_i est la variable indicatrice de l'événement A_i = {détection de l'i-ième objet}.

$$P(A_i) = 1 - (1-p_i)^n;$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{N} [1-(1-p_i)^n] = N - \sum_{i=1}^{N} (1-p_i)^n;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{N} [1-(1-p_i)^n](1-p_i)^n.$$

Lorsque le nombre n de cycles de balayage croît indéfiniment

$$\lim_{n\to\infty} M[X] = N; \quad \lim_{n\to\infty} D[X] = 0,$$

c'est-à-dire qu'à la limite, avec $n \to \infty$, tous les objets seront détectés.

7.49*. On prend un point arbitraire A à l'intérieur d'un cercle de rayon a (fig. 7.49) et on mène par ce point la corde BC sous un angle arbitraire Θ par rapport au rayon passant par A. Déduire la longueur moyenne de cette corde.

Solution. Le point arbitraire A est choisi dans les limites du cercle; ses coordonnées polaires R, Φ sont donc indépendantes et réparties suivant les lois

$$f_1(r)=\frac{2}{a^2}r \quad \text{pour} \quad 0<r<a; \quad f_2(\varphi)=\frac{1}{2\pi} \quad \text{pour} \quad 0<\varphi<2\pi.$$

La longueur moyenne d'une corde ne dépendant évidemment pas de l'angle φ, prenons le point A sur un rayon arbitraire (à la distance R du centre) et menons par lui la corde BC sous un angle aléatoire Θ au rayon. L'énoncé du problème entraîne que la densité de la variable aléatoire Θ est $f_3(\vartheta) = 1/2\pi$ pour $0 < \vartheta < 2\pi$. Exprimons la longueur l de la corde BC à l'aide des variables aléatoires R et Θ. A cet effet abaissons du centre du cercle une perpendiculaire sur la corde et désignons sa longueur par H. Il est clair que

$$l=2\sqrt{a^2-H^2}; \quad H=R\sin\Theta; \quad l=2\sqrt{a^2-R^2\sin^2\Theta}.$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire l s'obtient comme

$$\mathrm{M}[D]=\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\vartheta}\,\frac{2r}{a^2}\,\frac{1}{2\pi}\,dr=$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\frac{a^3(1-\cos^3\vartheta)}{3\sin^2\vartheta}\,d\vartheta=\frac{16a}{3\pi}\approx 1{,}70a.$$

7.50*. Calculer la valeur moyenne de la longueur de la corde BC (fig. 7.50) menée par le point A à l'intérieur du cercle de rayon r à la distance L de son centre, toutes les directions de cette corde étant équiprobables.

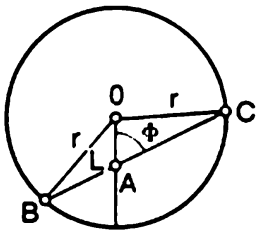


Fig. 7.50

Solution. La corde $\overline{BC}$ se calcule d'après l'expression où figurent les grandeurs L, Φ, r

$$\overline{BC}=2r\sqrt{1-\frac{L^2}{r^2}\sin^2\Phi}.$$

Si la longueur de la corde $\overline{BC}$ est considérée comme la variable aléatoire X, il vient

$$m_x=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}2r\sqrt{1-\left(\frac{L}{r}\right)^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{4r}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

où $k = L/r$. L'intégrale obtenue est une intégrale elliptique complète $E(k, \pi/2)$ de module k; ses valeurs sont fournies par les ouvrages de

référence. Par exemple, pour $k = 1/2$ l'intégrale $E(1/2, \pi/2) = 1{,}4675$ et $m_x \approx 1{,}87\ r$.

L'intégrale elliptique complète $E(k, \pi/2)$ variant de $\pi/2$ (pour $k = 0$) à 1 (pour $k = 1$), la longueur moyenne de la corde prend les valeurs de $2r$ (pour $k = 0$, c'est-à-dire pour le point A au centre du cercle) à $4r/\pi$ (pour $L = r$, c'est-à-dire pour les points A sur la circonférence).

7.51*. Une installation technique se compose de n ensembles. Chaque ensemble peut tomber en panne indépendamment des autres. Le temps de service sans aléas de l'i-ième ensemble est réparti suivant la loi exponentielle de paramètre λ_i:

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (t > 0).$$

Chaque ensemble défectueux est remplacé immédiatement par un nouveau pour être mis en réparation. La réparation de l'i-ième ensemble dure un temps aléatoire réparti d'après une loi exponentielle de paramètre μ_i: $\varphi_i(t) = \mu_i e^{-\mu_i t}$ $(t > 0)$. L'installation fonctionne pendant un temps τ.

Déterminer: 1) l'espérance mathématique et la variance du nombre d'ensembles qu'il faut remplacer; 2) l'espérance mathématique du temps global T qu'absorbe la réparation des ensembles en panne.

Solution. 1) Désignons par X_i le nombre d'ensembles d'i-ième type tombés en panne en un temps τ. Cette variable aléatoire est répartie d'après la loi de Poisson, son espérance mathématique est $m_{x_i} = \lambda_i \tau$ et sa variance, $D_{x_i} = \lambda_i \tau$. Désignons par X le nombre total d'ensembles tombés en panne en un temps τ. On a

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad m_x = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i} = \tau \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Les variables X_i étant indépendantes, il vient

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} = \tau \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

2) Désignons par T_i le temps total absorbé par la réparation de tous les ensembles d'i-ième type tombés en panne en un temps τ. C'est la somme des temps que demande la réparation de chaque ensemble. Le nombre de ces ensembles étant X_i, il vient

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \ldots + T_i^{(X_i)} = \sum_{k=1}^{X_i} T_i^{(k)},$$

où $T_i^{(k)}$ est une variable aléatoire dont la répartition obéit à la loi exponentielle de paramètre μ_i; les variables $T_i^{(1)}$, $T_i^{(2)}$, ... sont indépendantes.

Caculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire T_i d'après l'intégrale de l'espérance mathématique totale; à cet effet supposons que la variable aléatoire X_i ait pris une valeur définie m. Sous cette condition l'espérance mathématique de la variable T_i est

$$M[T_i|m] = \sum_{i=1}^{m} M[T_i^{(k)}] = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\mu_i} = \frac{m}{\mu_i}.$$

En multipliant cette espérance mathématique conditionnelle par la probabilité P_m pour que la variable aléatoire X_i prenne la valeur m, et en sommant tous ces produits, on obtient l'espérance mathématique totale (inconditionnelle) de la variable T_i

$$M[T_i] = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \frac{m}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{\infty} mP_m = \frac{1}{\mu_i} M[X_i] = \frac{\lambda_i \tau}{\mu_i}.$$

En appliquant ensuite le théorème de l'addition des espérances mathématiques, on obtient

$$M[T] = \tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Notons que ce même résultat peut s'obtenir par des raisonnements suivants qui ne sont pas parfaitement rigoureux. Le nombre total de pannes des ensembles du i-ième type en un temps τ est égal à $\lambda_i\tau$; le temps moyen de réparation d'un tel ensemble est égal à $1/\mu_i$; le temps moyen absorbé par la réparation de tous les ensembles du i-ième type tombés en panne en un temps τ est égal à $\lambda_i\tau/\mu_i$; le temps moyen absorbé par la réparation des ensembles de tous les types est égal à $\tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

7.52*. L'énoncé du problème 7.51 est modifié de façon que chaque ensemble tombé en panne est mis en réparation, alors que pendant ce temps l'installation technique ne fonctionne pas; lorsque l'installation ne travaille pas les ensembles, certes, ne peuvent pas tomber en panne. Trouver 1) l'espérance mathématique du nombre d'arrêts de l'installation en un temps τ; 2) l'espérance mathématique de la part du temps τ qui correspond au temps mort et qui est aussi la durée moyenne de la réparation.

Solution. 1) Désignons par X le nombre d'arrêts en un temps τ et cherchons son espérance mathématique m_x. Pour résoudre le problème recourons à des raisonnements pas très rigoureux, mais pour autant corrects.

Considérons le processus de travail de l'installation non limité dans le temps sous la forme de succession des « cycles » (fig. 7.52), dont chacun se compose d'une période de fonctionnement du système (marqué par un trait fort) et d'une période de réparation. La durée de chaque cycle présente la somme de deux variables aléatoires T_{tr},

Fig. 7.52

temps de travail de l'installation, et T_{rep}, temps absorbé par la réparation. La durée moyenne du travail de l'installation $m_{t_{tr}}$ se calcule comme le temps moyen entre deux pannes consécutives dans un flux de pannes à densité $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; ce temps vaut

$$m_{t_{tr}} = 1/\lambda = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Cherchons le temps moyen de réparation $m_{t_{rep}}$. Calculons-le d'après la formule de l'espérance mathématique totale sous les hypothèses $H_i = \{$la réparation porte sur l'ensemble du i-ième type$\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

La probabilité de chaque hypothèse est proportionnelle au paramètre λ_i:

$$P(H_i) = \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_i/\lambda.$$

Sous cette hypothèse l'espérance mathématique conditionnelle du temps de réparation est égale à $1/\mu_i$; on en tire

$$m_{t_{rep}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda\mu_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Le temps moyen d'un cycle

$$m_{t_c} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

Maintenant imaginons une suite des arrêts de l'installation comme une suite des points aléatoires sur l'axe Ot séparés par des intervalles égaux en moyenne à m_{t_c}. Le nombre moyen d'arrêts en un

temps τ est égal au nombre moyen de tels points sur le segment d'une longueur τ:

$$m_x = \tau / m_{t_c} = \lambda\tau \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

2) Pendant chaque cycle l'installation enregistre un temps mort (subit la réparation) en moyenne pendant un temps $m_{t_{rep}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$; donc, le temps mort moyen

$$m_x m_{t_c} = \frac{\lambda\tau}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

7.53. Une variable aléatoire X obéit à la loi de répartition normale à caractéristiques m_x et σ_x. Les variables aléatoires Y et Z sont liées à X par les relations $Y = X^2$; $Z = X^3$. Trouver les covariances K_{xy}, K_{xz}, K_{yz}.

Solution. Pour simplifier les calculs passons aux variables centrées et profitons du fait que pour une variable normale centrée $\mathring{X} = X - m_x$ tous les moments centrés d'ordres impairs sont nuls, alors que $\mathrm{M}[\mathring{X}^2] = \sigma_x^2$; $\mathrm{M}[\mathring{X}^4] = 3\sigma_x^4$ (voir problème 5.26). Etant donné que

$$\mathring{Y} = (\mathring{X} + m_x)^2 - \mathrm{M}[X^2] = \mathring{X}^2 + 2\mathring{X}m_x + m_x^2 - D_x - m_x^2 = \\ = \mathring{X}^2 + 2\mathring{X}m_x - \sigma_x^2,$$

il vient

$$K_{xy} = \mathrm{M}[\mathring{X}\mathring{Y}] = \mathrm{M}[\mathring{X}(\mathring{X}^2 + 2\mathring{X}m_x - \sigma_x^2)] = 2\sigma_x^2 m_x.$$

Puis

$$\mathring{Z} = (\mathring{X} + m_x)^3 - \mathrm{M}[X^3] = \mathring{X}^3 + 3\mathring{X}^2 m_x + 3\mathring{X}m_x^2 + m_x^3 - (3m_x\sigma_x^2 + m_x^3) = \\ = X^3 + 3\mathring{X}^2 m_x + 3\mathring{X}m_x^2 - 3m_x\sigma_x^2,$$

donc

$$K_{xz} = \mathrm{M}[\mathring{X}\mathring{Z}] = \mathrm{M}[\mathring{X}^4] + 3m_x\mathrm{M}[\mathring{X}^3] + 3m_x^2\mathrm{M}[\mathring{X}^2] - \\ - 3m_x\sigma_x^2\mathrm{M}[\mathring{X}] = 3\sigma_x^4 + 3m_x^2\sigma_x^2.$$

Enfin

$$K_{yz} = \mathrm{M}[(\mathring{X}^2 + 2\mathring{X}m_x - \sigma_x^2)(\mathring{X}^3 + 3\mathring{X}^2 m_x + 3\mathring{X}m_x^2 - 3m_x\sigma_x^2)] = \\ = 5m_x\mathrm{M}[\mathring{X}^4] + 6m_x(m_x^2 - \sigma_x^2)\mathrm{M}[\mathring{X}^2] + 3m_x\sigma_x^4 = 12m_x\sigma_x^4 + 6m_x^3\sigma_x^2.$$

7.54. Un corps de masse a g est pesé quatre fois sur une balance d'analyse pour obtenir les résultats X_1, X_2, X_3, X_4. Leur moyenne arithmétique $Y = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ est retenue pour la valeur mesurée de la masse. Les résultats des pesées sont indépendants. La balance est entachée d'une erreur systématique $m_x = +0{,}001$ g. L'écart quadratique moyen de chaque pesée $\sigma_x = 0{,}002$ g. Trouver les caractéristiques: espérance mathématique et écart quadratique moyen de la variable aléatoire Y.

Réponse. $m_y = a + 0{,}001$ g; $\sigma_y = \sigma_x/2 = 0{,}001$ g.

7.55. On réalise quatre mesures indépendantes de la même variable X. Chaque mesure est caractérisée par la même espérance mathématique m_x et le même écart quadratique moyen σ_x. Les résultats des mesures sont X_1, X_2, X_3, X_4. On considère les différences entre les mesures voisines: $Y_1 = X_2 - X_1$; $Y_2 = X_3 - X_2$; $Y_3 = X_4 - X_3$. Trouver les caractéristiques de ce système de variables aléatoires: espérances mathématiques m_{y_1}, m_{y_2}, m_{y_3}; écarts quadratiques moyens σ_{y_1}, σ_{y_2}, σ_{y_3}; matrice de corrélation normée $\|r_{ij}\|$.

Solution. $m_{y_1} = m_{y_2} = m_{y_3} = 0$; $\sigma^2_{y_1} = \sigma^2_{y_2} = \sigma^2_{y_3} = 2\sigma^2_x$; $\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \sigma_x\sqrt{2}$.

En vertu de l'indépendance des variables $\mathring{X}_1$, $\mathring{X}_2$, $\mathring{X}_3$, $\mathring{X}_4$

$$K_{y_1y_2} = \mathrm{M}\,[(\mathring{X}_2 - \mathring{X}_1)(\mathring{X}_3 - \mathring{X}_2)] = -\mathrm{M}\,[\mathring{X}_2^2] = -\sigma_x^2;$$

$$K_{y_2y_3} = \mathrm{M}\,[(\mathring{X}_3 - \mathring{X}_2)(\mathring{X}_4 - \mathring{X}_3)] = -\mathrm{M}\,[\mathring{X}_3^2] = -\sigma_x^2;$$

$$K_{y_1y_3} = \mathrm{M}\,[(\mathring{X}_2 - \mathring{X}_1)(\mathring{X}_4 - \mathring{X}_3)] = 0;$$

$$r_{y_1y_2} = r_{y_2y_3} = \frac{-\sigma_x^2}{2\sigma_x^2} = -\frac{1}{2}; \quad r_{y_1y_3} = 0;$$

$$\|r_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ & 1 & -1/2 \\ & & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.56. Soit un réservoir cubique rempli de combustible; une brèche apparaît au hasard avec la même probabilité en un point quelconque de l'une quelconque des six parois. La présence de la brèche fait qu'au-dessus d'elle tout le combustible s'écoule du réservoir. Lorsque ce dernier n'était pas endommagé il était rempli à 3/4 de son volume. Calculer la quantité moyenne de combustible qui reste dans le réservoir après l'apparition de la brèche.

Solution. Pour simplifier égalons l'arête du réservoir à l'unité. Désignons par X la hauteur de la brèche et par Y, le volume du combustible restant. L'aire de la base étant égale à l'unité, on a

$$Y = \begin{cases} X & \text{pour } X < 0{,}75; \\ 0{,}75 & \text{pour } 0{,}75 < X < 1. \end{cases}$$

Si la brèche se trouve au-dessus de 0,75 du fond ($X > 0{,}75$), le combustible ne s'écoule pas et le réservoir le garde en quantité intacte : $Y = 0{,}75$; la probabilité de ce fait est égale à la part de l'aire de la surface du réservoir au-dessus du niveau 0,75 :

$$P\{Y = 0{,}75\} = P\{X > 0{,}75\} = 1/6 + (4/6)\cdot 0{,}25 = 1/3.$$

Si la brèche apparaît dans le fond du réservoir ($X = 0$), tout le combustible s'écoule ; la probabilité de ce fait est égale à la part de la surface qui revient au fond du réservoir :

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 1/6.$$

Si la brèche est percée dans l'une des parois latérales à la distance $X < 0{,}75$ du fond, le combustible reste dans le réservoir en quantité $Y = X$. La densité de probabilité dans l'intervalle (0 ; 0,75) est constante et égale à $(1 - 1/3 - 1/6)/0{,}75 = 2/3$. La quantité moyenne du combustible restant

$$m_y = 0{,}75\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{6} + \int_0^{0{,}75} x\cdot\frac{2}{3}\,dx = 0{,}44.$$

7.57. Dans l'intervalle (0 ; 1) on a localisé le point a (fig. 7.57). Le point aléatoire X est réparti dans le même intervalle.

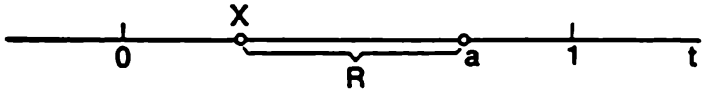


Fig. 7.57

Trouver le coefficient de corrélation entre la variable aléatoire X et la distance R du point a au point X (la distance R est considérée toujours comme positive). Déterminer avec quelle valeur de a les variables X et R sont non corrélées.

Solution. Calculons K_{xr} d'après la formule $K_{xr} = M[XR] - m_x m_r$.

$$M[XR] = M[X|a - X|] = \int_0^1 x\,|a - x|\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\,|a - x|\,dx =$$

$$= \int_0^a x(a - x)\,dx - \int_a^1 x(a - x)\,dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3};$$

$$m_x = \frac{1}{2}; \quad m_r = \int_0^1 |a - x|\,dx =$$

$$= \int_0^a (a - x)\,dx - \int_0^1 (a - x)\,dx = a^2 - a + \frac{1}{2}.$$

On en tire

$$K_{xr}=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}.$$

On trouve

$$D_x=\frac{1}{12};\quad \sigma_x=\frac{1}{2\sqrt{3}};\quad D_r=\alpha_2[R]-m_r^2;$$

$$\alpha_2[R]=\int_0^1(a-x)^2\,dx=a^2-a+\frac{1}{3};$$

$$D_r=2a^3-a^4-a^2+\frac{1}{12};\quad \sigma_r=\sqrt{D_r}.$$

D'où

$$r_{xr}=\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}\right)\Big/\left(\sqrt{2a^3-a^4-a^2+\frac{1}{12}}\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

L'équation $a^3/3-a^2/2+1/12=0$ ne possède qu'une racine dans l'intervalle $(0;\ 1)$: $a=1/2$. C'est pourquoi les variables X, R deviennent non corrélées seulement avec $a=1/2$.

7.58. Une voiture peut se déplacer sur la route à une vitesse arbitraire v $(0\leqslant v\leqslant v_{max})$. Plus la voiture va vite, plus la probabilité qu'elle soit arrêtée par un agent de circulation est grande. Chaque arrêt dure en moyenne un temps t_0. Sur le chemin de parcours les agents sont placés au hasard ; de plus, leur nombre par unité de longueur du parcours est aléatoire et sa répartition obéit à la loi de Poisson de paramètre λ. La relation entre la probabilité d'arrêt et la vitesse de la voiture est linéaire : $p(v)=kv$ $(0\leqslant v\leqslant v_{max})$, où $k=1/v_{max}$. Calculer la vitesse rationnelle v_r de la voiture à laquelle le chemin s sera couvert en moyenne en un temps minimal.

Solution. Le temps moyen nécessaire pour couvrir le chemin s :

$$t=s/v+\lambda sp(v)\,t_0=s/v+\lambda skvt_0.$$

Si le minimum de cette fonction repose à l'intérieur de l'intervalle $(0,\ v_{max})$, on peut le trouver d'après l'équation

$$\frac{\partial t}{\partial v}=-\frac{s}{v^2}+\lambda skt_0=0,$$

d'où

$$v=v_r=\sqrt{1/(\lambda kt_0)}=\sqrt{v_{max}/(\lambda t_0)}.$$

Cette formule est vraie pour $v_r\leqslant v_{max}$, c'est-à-dire pour $v_{max}>1/(\lambda t_0)$. Ainsi, pour $v_{max}=100$ km/h, $\lambda=1/20$ km^{-1} et $t_0=20$ mn

$$v_r=\sqrt{100\Big/\left(\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3}\right)}\approx 77{,}5\ \text{km/h}.$$

Si $v_{max} < 1/(\lambda t_0)$, le minimum de la fonction $t = s/v + \lambda sp(v)\, t_0$ repose hors de l'intervalle $(0, v_{max})$ et la vitesse la plus avantageuse $v_r = v_{max}$. Par exemple, si pour les données mentionnées le temps d'arrêt est réduit à 10 mn, $v_r = v_{max} = 100$ km/h.

7.59. On procède à plusieurs épreuves indépendantes dans chacune desquelles l'événement A se produit avec une probabilité p. Les épreuves sont poursuivies tant que l'événement A apparaît k fois, après quoi elles cessent. La variable aléatoire X est le nombre d'épreuves qu'il faut réaliser. Trouver son espérance mathématique, sa variance et son écart quadratique moyen.

Solution. Mettons la variable aléatoire X sous la forme d'une somme

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i,$$

où X_1 est le nombre d'épreuves jusqu'à la première apparition de l'événement A ; X_2, le nombre d'épreuves entre sa première et sa deuxième apparition ; ... ; X_k, le nombre d'épreuves de la $(k-1)$-ième à la k-ième apparition.

Chaque variable aléatoire X_i possède une répartition géométrique qui débute par l'unité [voir (4.0.32)] et ses caractéristiques sont

$$\mathrm{M}[X_i] = 1/p; \quad \mathrm{D}[X_i] = q/p^2 \quad (q = 1 - p).$$

En appliquant les théorèmes d'addition des espérances mathématiques et des variances, on obtient

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}[X_i] = kp; \quad \mathrm{D}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{D}[X_i] = kq/p^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{D}[X]} = \sqrt{kq}/p.$$

7.60. Le montage d'une installation à fiabilité accrue se fait avec k pièces homogènes de haute qualité. Avant d'être présentée au montage, chaque pièce subit des essais de toute sorte et indépendamment des autres s'avère de haute qualité avec une probabilité p. Une fois que k pièces de haute qualité sont sélectionnées, les essais de nouvelles pièces cessent. La réserve des pièces est pratiquement illimitée. Trouver l'espérance mathématique m_x et la variance D_x de la variable aléatoire X (nombre de pièces mises à l'essai). Calculer X_{max}, le nombre de pièces maximal pratiquement possible qui subissent les essais.

Réponse. D'après la solution du problème précédent

$$m_x = kp; \quad D_x = kq/p^2; \quad \sigma_x = \sqrt{kq}/p \text{ et } X_{max} = kp + 3\sqrt{kq}/p.$$

7.61. Soit un tableau de planning d'après lequel l'instant Y du début d'un travail est le temps maximal de la fin de deux travaux préparatoires X_1, X_2 (instants où ces travaux prennent fin). Les variables aléatoires X_1, X_2 sont indépendantes et leurs densités sont $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y, ainsi que la marge de ses valeurs pratiquement possibles.

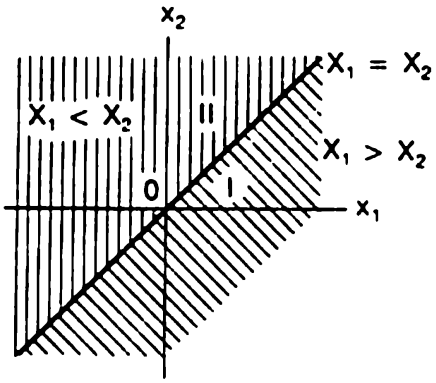


Fig. 7.61

Solution. $Y = \max\{X_1, X_2\} = \begin{cases} X_1 \text{ pour } X_1 > X_2; \\ X_2 \text{ pour } X_1 < X_2. \end{cases}$

Le domaine I, où $X_1 > X_2$, et le domaine II, où $X_1 < X_2$ sont représentés sur la figure 7.61

$$m_y = \mathrm{M}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) \left\{ \int_{-\infty}^{x_1} f_2(x_2)\, dx_2 \right\} dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) \left\{ \int_{-\infty}^{x_2} f_1(x_1)\, dx_1 \right\} dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) F_2(x_1)\, dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) F_1(x_2)\, dx_2,$$

où $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont les fonctions de répartition des variables aléatoires X_1 et X_2 respectivement.

$$\mathrm{M}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_1(x_1) F_2(x_1)\, dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f_2(x_2) F_1(x_2)\, dx_2;$$

$$\mathrm{D}[Y] = \mathrm{M}[Y^2] - m_y^2; \quad \sigma_y = \sqrt{\mathrm{D}[Y]}.$$

La marge des valeurs pratiquement possibles de Y est $m_y \pm 3\sigma_y$.

7.62. Dans l'énoncé du problème précédent pour amorcer le travail (instant Y) il faut que soient terminés les travaux précédents (travaux préparatoires). Les instants de leur achèvement $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendants et leurs densités sont $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Répondre aux mêmes questions.

Solution. $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = X_i$ pour $X_i > X_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n, i \neq j)$;

$$m_y = \mathrm{M}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) \left\{ \int_{-\infty}^{x_1} (n-1) \int_{-\infty}^{x_1} f_2(x_2) f_3(x_3) \ldots \right.$$

$$\left. \ldots f_n(x_n)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \right\} dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) \left\{ \int_{-\infty}^{x_2} (n-1) \int_{-\infty}^{x_2} f_1(x_1) f_3(x_3) \ldots \right.$$

$$\left. \ldots f_n(x_n)\, dx_1\, dx_3 \ldots dx_n \right\} dx_2 + \ldots$$

$$\ldots + \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_n(x_n) \left\{ \int_{-\infty}^{x_n} (n-1) \int_{-\infty}^{x_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots \right.$$

$$\left. \ldots f_{n-1}(x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \right\} dx_n.$$

Dans notre cas l'intégrale $(n-1)$-uple se décompose en produit des $n-1$ intégrales simples; donc

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j}} F_j(x_i)\, dx_i,$$

où $F_j(x_i)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ pour un argument égal à x_i. D'une façon analogue on trouve

$$\mathrm{M}[Y^2] = \sum_{i=1}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f_i(x_i) \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j}} F_j(x_i)\, dx_i; \quad \mathrm{D}[Y] = \mathrm{M}[Y^2] - m_y^2.$$

Si les variables aléatoires X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ sont réparties de la même façon avec la densité $f(x)$ et la fonction de répartition $F(x)$, alors

$$m_y = n \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) [F(x)]^{n-1}\, dx.$$

D'une façon analogue on calcule $\mathrm{M}[Y^2]$ et $\mathrm{D}[Y]$:

$$\mathrm{M}[Y^2] = n \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) [F(x)]^{n-1}\, dx \text{ et } \mathrm{D}[Y] = \mathrm{M}[Y^2] - m_y^2.$$

7.63. Un appareil de type d'un voltmètre de crête enregistre la tension maximale des deux tensions U_1, U_2. Les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes et ont la même densité $f(u)$. Trouver l'espérance mathématique des lectures du voltmètre, c'est-à-dire la variable aléatoire $U = \max\{U_1, U_2\}$, si $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ $(u > 0)$ est une loi de répartition exponentielle de paramètre λ.

Solution. Conformément à la solution du problème précédent

$$M[U] = 2\int_{-\infty}^{\infty} uf(u)F(u)\,du = 2\int_0^{\infty} \lambda u e^{-\lambda u}(1 - e^{-\lambda u})\,du =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \lambda u e^{-\lambda u}\,du - 2\lambda\int_0^{\infty} u e^{-2\lambda u}\,du = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

Ceci rend clair que $M[U]$ est 1,5 fois plus grand que l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires U_1, U_2.

7.64. *Espérance mathématique et variance de la somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires.* La variable aléatoire Z est une somme $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, où les variables aléatoires X_i sont indépendantes et possèdent la même répartition d'espérance mathématique m_x et de variance D_x; le nombre de termes Y est une variable aléatoire à valeurs entières qui ne dépend pas des termes X_i et possède l'espérance mathématique m_y et la variance D_y. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Z.

Solution. Soit la variable aléatoire discrète Y à tableau de répartition

Y:	1	2	...	k	...
	p_1	p_2	...	p_k	...

Faisons l'hypothèse $\{Y = k\}$. Avec cette hypothèse

$$M[Z|Y = k] = \sum_{i=1}^{k} M[X_i] = km_x.$$

D'après la formule de l'espérance mathématique totale

$$M[Z] = \sum_k kp_k m_x = m_x \sum_k kp_k = m_x M[Y] = m_x m_y.$$

D'une façon analogue, le moment conditionnel initial d'ordre deux de la variable Z

$$M[Z^2|Y=k]=M\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2\right]=M\left[\sum_{i=1}^{k} X_i^2+2\sum_{i<j} X_iX_j\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} \alpha_2[X]+2\sum_{i<j} m_xm_x=k\alpha_2[X]+k(k-1)m_x^2=$$

$$=k[D_x+m_x^2]+k(k-1)m_x^2=kD_x+k^2m_x^2.$$

D'après la formule de l'espérance mathématique totale

$$\alpha_2[Z]=D_x\sum_k kp_k+m_x^2\sum_k k^2p_k=D_xm_y+m_x^2\alpha_2[Y]=$$

$$=D_xm_y+m_x^2(D_y+m_y^2)=D_xm_y+m_x^2D_y+m_x^2m_y^2;$$

$$D[Z]=\alpha_2[Z]-m_x^2m_y^2=D_xm_y+m_x^2D_y.$$

Ainsi,

$$m_z=m_xm_y;\quad D_z=D_xm_y+m_xD_y.$$

Si la répartition de la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre a, il vient

$$m_z=am_x;\quad D_z=a(D_x+m_x^2).$$

7.65. On transmet par une voie de communication un message rédigé en code binaire, composé de n symboles « 0 » ou « 1 »; les deux valeurs sont équiprobables et sont reçues indépendamment. Trouver l'espérance mathématique et la variance du nombre X des changements du symbole dans le message, ainsi que le nombre de changements maximal pratiquement possible X_{max} (pour $n>0$).

Solution. Considérons $n-1$ passages du symbole précédant au symbole successif comme autant d'épreuves indépendantes, et introduisons pour chacune de ces dernières la variable X_i, indicatrice du changement du symbole, égale à l'unité, si le symbole a changé, et à zéro, s'il reste le même.

$$X=\sum_{i=1}^{n-1} X_i;\quad M[X]=\sum_{i=1}^{n-1} M[X_i]=\sum_{i=1}^{n-1} p=(n-1)p,$$

où p est la probabilité pour que dans l'intervalle donné (l'i-ième) ait lieu le changement des symboles; d'une façon analogue

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n-1} D[X_i]=(n-1)p(1-p).$$

Dans notre cas il est clair que $p=1/2$ et $M[X]=(n-1)/2$; $D[X]=(n-1)/4$. D'après la règle des trois sigma $X_{max}=(n-1)/2+3\sqrt{n-1/2}$.

7.66. Un groupe de quatre postes radar scrute une région de l'espace où se trouvent trois objets S_1, S_2 et S_3. L'observation est poursuivie pendant un certain temps τ. Pendant ce temps chaque poste découvre indépendamment des autres chacun des objets avec une probabilité p_i qui dépend du numéro de l'objet, et transmet ses coordonnées au poste de commande central. Calculer l'espérance mathématique du nombre d'objets X dont les coordonnées sont enregistrées au poste central.

Solution. Désignons par X_i la variable indicatrice de l'événement A_i = {détection de l'i-ième objet}:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ si l'}i\text{-ième objet est localisé;} \\ 0, \text{ si l'}i\text{-ième objet n'est pas localisé } (i=1,\ 2,\ 3). \end{cases}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X_i est égale à $\mathrm{M}[X_i] = \mathrm{P}\{\text{l'}i\text{-ième objet est localisé}\} = 1 - (1 - p_i)^4$.

Etant donné que $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$, il vient

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{3} [1 - (1 - p_i)^4] = 3 - \sum_{i=1}^{3} (1 - p_i)^4.$$

7.67. L'énoncé du problème précédent est modifié de façon que les probabilités de la localisation de l'objet par les postes sont différentes: le j-ième poste découvre l'i-ième objet avec une probabilité p_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$).

Réponse.

$$\mathrm{M}[X] = 3 - \sum_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{4} (1 - p_{ij}).$$

7.68. Un poste radar balaye une région de l'espace où se trouvent quatre objets. La probabilité de détecter un objet isolé en fonction du temps d'observation est exprimée par la fonction $p(t)$ et ne dépend pas de la découverte des autres objets. Trouver 1) l'espérance mathématique du temps T_1 pendant lequel est localisé au moins un objet; 2) l'espérance mathématique du temps T_4 nécessaire pour découvrir les quatre objets.

Solution. 1) La probabilité pour que pendant le temps t aucun objet ne soit détecté est égale à $[1 - p(t)]^4$; la probabilité pour que pendant ce temps soit localisé au moins un objet est égale à $1 - [1 - p(t)]^4$. Ceci n'est rien d'autre que la fonction de répartition $F_1(t)$ de la variable aléatoire T_1. Comme nous l'avons démontré dans le problème 5.28, pour la variable aléatoire non négative T_1

$$\mathrm{M}[T_1] = \int_0^\infty [1 - F_1(t)]\, dt = \int_0^\infty \{1 - [p(t)]^4\}\, dt.$$

2) Cherchons la probabilité pour que tous les quatre objets soient localisés en un temps t; elle vaut $[p(t)]^4$; c'est la fonction de répartition $F_4(t)$ de la variable aléatoire T_4. Son espérance mathématique

$$M[T_4] = \int_0^\infty [1 - F_4(t)]\,dt = \int_0^\infty \{1 - [p(t)]^4\}\,dt.$$

Par exemple, si la probabilité $p(t)$ est donnée par la formule $p(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, on a

$$M[T_1] = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\alpha t})]^4\,dt = \int_0^\infty e^{-4\alpha t}\,dt = \frac{1}{4\alpha};$$

$$M[T_4] = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\alpha t})^4]\,dt = \frac{25}{12\alpha}.$$

Dans cet exemple le temps moyen de repérage de tous les quatre objets est cent fois plus grand que celui nécessaire pour localiser au moins un objet.

7.69. On réalise n épreuves dépendantes dans lesquelles l'événement A peut ou ne peut pas apparaître. La variable aléatoire X est le nombre d'apparitions de cet événement A dans la série des épreuves. Trouver l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Solution. Représentons X comme la somme de n variables aléatoires X_i ($i = 1, \ldots, n$) où X_i est la variable indicatrice de l'événement A dans l'i-ième épreuve:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'événement } A \text{ apparaît dans l'}i\text{-ième épreuve;} \\ 0, & \text{si l'événement } A \text{ n'apparaît pas dans l'}i\text{-ième épreuve.} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad M[X] = \sum_{i=1}^n M[X_i];$$

$M[X_i] = p_i$, où p_i est la probabilité de l'apparition de l'événement A dans l'i-ième épreuve. Ainsi,

$$M[X] = \sum_{i=1}^n p_i. \tag{7.69.1}$$

En particulier, si $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, alors

$$M[X] = np. \tag{7.69.2}$$

Insistons spécialement que *pour appliquer les formules* (7.69.1) *et* (7.69.2) *il n'est pas du tout de rigueur que les épreuves soient indépendantes.*

7.70. Admettre dans l'énoncé du problème précédent que les épreuves sont indépendantes et déduire la variance de la variable aléatoire X.

Solution. D'après le théorème d'addition des variances

$$D[X] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i].$$

La variance de la variable indicatrice de l'événement A dans l'i-ième épreuve {voir formule (4.0.19)} est égale à $p_i(1-p_i)$; donc

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i). \tag{7.70.1}$$

Dans le cas particulier où $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$,

$$D[X] = np(1-p). \tag{7.70.2}$$

Insistons spécialement que *les formules* (7.70.1) *et* (7.70.2) *sont applicables seulement aux épreuves indépendantes.*

7.71. On procède à n épreuves indépendantes qui peuvent ou ne peuvent pas donner lieu à l'événement A. La variable aléatoire X est le nombre d'apparition de l'événement. Trouver sa variance.

Solution. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est la variable indicatrice de l'événement A dans l'i-ième épreuve. D'après la formule générale (7.0.28), la variance de la somme des variables aléatoires

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j}^{n} K_{x_i x_j},$$

où $K_{x_i x_j}$ est la covariance des variables aléatoires X_i et X_j:

$$K_{x_i x_j} = M[X_i X_j] - M[X_i]\,M[X_j].$$

La variable $X_i X_j$ ne se transforme en unité que si $X_i = 1$ et $X_j = 1$ (c'est-à-dire si dans l'i-ième et la j-ième épreuves l'événement A est apparu). $M[X_i X_j] = p_{ij}$, où p_{ij} est la probabilité pour que dans l'i-ième et la j-ième épreuves apparaît l'événement A. $K_{x_i x_j} = p_{ij} - p_i p_j$; on en tire

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) + 2\sum_{i<j} (p_{ij} - p_i p_j). \tag{7.71}$$

De la sorte, pour obtenir la variance du nombre d'apparitions de l'événement dans n épreuves dépendantes, il ne suffit pas de connaître la probabilité p_i de l'apparition de l'événement dans chacune des expériences; il faut encore connaître la probabilité p_{ij} pour que l'événement apparaît dans chaque couple d'épreuves.

En particulier, lorsque $p_i = p_2, \ldots, = p_n = p$, p_{ij} ne dépend pas de i et de j, elle est égale à P, et la formule (7.71) devient

$$D[X] = np(1-p) + n(n-1)(P-p^2),$$

où $P = p_{ij}$ est la probabilité de l'apparition de l'événement dans un couple d'épreuves quelconque.

7.72. Une urne contient a boules blanches et b noires. On tire de l'urne au hasard k boules. La variable aléatoire X est le nombre de boules blanches parmi les boules tirées. Sans recourir à la loi de répartition de la variable aléatoire X (loi hypergéométrique, voir chapitre IV) déduire ses caractéristiques numériques; espérance mathématique et variance.

Solution. $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$, où

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'}i\text{-ième boule tirée est blanche;} \\ 0, & \text{si elle est noire.} \end{cases}$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{k} M[X_i] = kp,$$

où p est la probabilité pour que la boule tirée soit blanche

$$p = a/(a+b); \quad M[X] = ka/(a+b).$$

La variance de la variable aléatoire X s'obtient comme celle du nombre d'apparitions de l'événement dans k épreuves dépendantes [voir problème 7.71]:

$$D[X] = kp(1-p) + k(k-1)(P-p^2). \qquad (7.72)$$

Calculons P, la probabilité pour que deux boules quelconques tirées (l'i-ième et la j-ième) soient blanches: $P = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}$.

En portant cette expression et $p = \frac{a}{a+b}$ dans (7.72) on obtient

$$D[X] = \frac{kab}{(a+b)^2} + k(k-1)\left(\frac{a}{a+b}\frac{a-b}{a+b-1} - \frac{a^2}{(a+b)^2}\right).$$

7.73*. Un train composé de m wagons arrive à une gare de triage; m_1 de ces wagons sont adressés à A_1, m_2, à A_2, ..., m_k, à A_k $\left(\sum_{l=1}^{k} m_l = m\right)$. Dans le train les wagons sont répartis au hasard sans rapport à leurs adresses. Si deux wagons voisins sont adressés au même destinataire, il ne faut pas les dételer, si leurs adresses sont différentes, on procède au dételage. Trouver l'espérance mathématique et la variance du nombre de dételages qu'il faut effectuer et éva-

luer en appliquant la règle de trois sigma la marge des dételages pratiquement possibles.

Solution. Considérons $m - 1$ attelages des wagons comme $m - 1$ positions éventuelles dans chacune desquelles peut se produire un « dételage » ou « non-dételage ». Désignons par X la variable aléatoire « nombre de dételages » et par Y, « nombre de non-dételages »; $Y = m - 1 - X$. Il est plus simple de manipuler avec la variable aléatoire Y. Mettons-la sous la forme d'une somme: $Y = \sum_{i=1}^{m-1} Y_i$, où

$$Y_i = \begin{cases} 1, \text{ si en } i\text{-ième position le dételage n'a pas lieu ;} \\ 0, \text{ s'il est réalisé} \end{cases}$$

(variable indicatrice de non-dételage en i-ième position).

D'après le théorème d'addition des espérances mathématiques $\mathrm{M}[Y] = \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{M}[Y_i]$; $\mathrm{M}[Y_i] = q_i$, où q_i est la probabilité de l'absence de dételage en i-ième position. Toutes les positions sont équivalentes $q_1 = q_2 = \ldots = q_{m-1} = q$. La probabilité q pour qu'en i-ième position il n'y ait pas de dételage est égale à la probabilité pour que deux wagons entre lesquels se trouve la position, aient le même destinataire. En additionnant les probabilités pour que ces wagons soient dirigés à la 1-re, 2-ième . . ., k-ième adresse, on trouve

$$q = \sum_{l=1}^{k} \frac{m_l(m_l-1)}{m(m-1)} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{l=1}^{k} m_l(m_l-1);$$

$$\mathrm{M}[Y] = \frac{m-1}{m(m-1)} \sum_{l=1}^{k} m_l(m_l-1) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{k} m_l(m_l-1).$$

On en tire

$$\mathrm{M}[X] = m - 1 - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{k} m_l(m_l-1).$$

Les variables X et Y différant d'une constante, $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}[Y]$. La variance de la variable aléatoire Y se calcule d'après la formule (7.0.28) de la variance d'une somme:

$$\mathrm{D}[Y] = \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{D}[Y_i] + 2 \sum_{i<j} K_{y_i y_j}.$$

La covariance des variables aléatoires Y_i, Y_j est donnée par la formule:

$$K_{y_i y_j} = \mathrm{M}[Y_i Y_j] - \mathrm{M}[Y_i]\,\mathrm{M}[Y_j] = \mathrm{M}[Y_i Y_j] - q^2.$$

Le produit Y_iY_j est nul si au moins en une position il y a dételage, et égal à l'unité, si aux deux positions le dételage ne se produit pas; on en tire

$$K_{y_iy_j} = \mathrm{P}\{Y_i = 1,\ Y_j = 1\} - q^2.$$

Cherchons la probabilité pour qu'il n'y ait pas de dételage aux deux positions (i-ième et j-ième). Cette probabilité diffère suivant le cas que les positions soient voisines ($j - i = 1$) ou non ($j - i > 1$). Désignons cette probabilité pour les positions voisines par q_{v}, et pour les positions non voisines par q_{nv}. La probabilité pour que le dételage ne se produit pas aux deux positions voisines est égale à la probabilité pour que l'i-ième, le $(i + 1)$-ième et $(i + 2)$-ième wagons soient adressés au même destinataire:

$$q_{\mathrm{v}} = \sum_{l=1}^{k} \frac{m_l(m_l-1)(m_l-2)}{m(m-1)(m-2)} = \frac{1}{m(m-1)(m-2)} \sum_{l=1}^{k} m_l(m_l-1)(m_l-2).$$

Pour deux positions voisines $\mathrm{M}[Y_iY_j] = q_{\mathrm{v}}$; $K_{y_iy_j} = q_{\mathrm{v}} - q^2$. La probabilité pour qu'aux deux positions non voisines ($j - i > 1$) il n'y ait pas de dételage est égale à la probabilité pour que chaque couple de wagons entre lesquels se trouve la position donnée soit dirigé vers le même destinataire. Ceci peut se réaliser en deux variantes: soit tous les quatre wagons sont adressés au même destinataire (au l-ième), soit le premier couple est adressé au l-ième, et le deuxième, au r-ième destinataire. La probabilité de la première variante est égale à $\frac{m_l(m_l-1)(m_l-2)(m_l-3)}{m(m-1)(m-2)(m-3)}$; de la deuxième, à $\frac{m_l(m_l-1)m_r(m_r-1)}{m(m-1)(m-2)(m-3)}$. La probabilité totale pour qu'il n'y ait pas de dételage aux deux positions non voisines est égale à

$$q_{\mathrm{nv}} = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \sum_{l=1}^{k} \Big[m_l(m_l-1)(m_l-2)(m_l-3) + \\ + \sum_{r \neq l} m_l(m_l-1)m_r(m_r-1) \Big].$$

La covariance $K_{y_iy_j}$ de deux positions non voisines vaut $q_{\mathrm{nv}} - q^2$. Compte tenu du nombre de couples de positions voisines $(m - 2)$ et non voisines $(C_{m-1}^2 - m + 2)$, on obtient

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}[Y] = (m-1)q(1-q) + 2(m-2)(q_{\mathrm{v}} - q^2) + \\ + [(m-1)(m-2) - 2(m-2)](q_{\mathrm{nv}} - q^2); \quad \sigma_x = \sigma_y = \\ = \sqrt{\mathrm{D}[Y]}.$$

La marge des valeurs pratiquement possibles de X est $M[X] = \pm 3\sigma_x$.

Note. Tout le calcul a un sens pour $m > 3$. Si dans les formules de q_v et q_{nv} certains facteurs sont négatifs, on pose que les termes correspondants sont nuls.

7.74*. On procède à une série d'épreuves dans chacune desquelles un certain événement A (« succès ») peut ou ne peut pas apparaître. La probabilité pour que dans les premières m épreuves l'événement A apparaisse au moins une fois est donnée par la fonction non décroissante $R(m)$ (fig. 7.74) *). Trouver le nombre moyen d'épreuves réalisées jusqu'à l'obtention du succès.

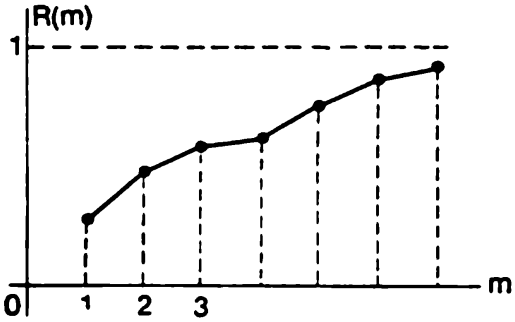


Fig. 7.74

Solution. Supposons que les épreuves ne cessent pas avec l'obtention du succès. Chacune d'elles (sauf la première) peut être « nécessaire », si le succès n'est pas encore atteint, et « superflue », s'il est déjà atteint. Associons à chaque (i-ième) épreuve une variable aléatoire X_i égale à l'unité, si l'épreuve a été nécessaire, et à zéro, si l'épreuve a été superflue.

Considérons la variable aléatoire Z, nombre d'épreuves à réaliser pour obtenir le succès ; elle est égale à la somme de toutes les variables aléatoires X_i dont la première X_1 est toujours égale à l'unité (la première épreuve est toujours nécessaire)

$$Z = X_1 + \sum_{i=2}^{\infty} X_i.$$

Le tableau de répartition de la variable aléatoire X_i ($i > 1$) est de la forme

	0	1
X_i :	$R(i-1)$	$1-R(i-1)$

(si le succès a été enregistré aux $i-1$ épreuves précédentes, l'i-ième épreuve est superflue ; s'il ne l'a pas été, elle est nécessaire). L'espérance mathématique de la variable aléatoire X_i est égale à

$$M[X_i] = 0 \cdot R(i-1) + 1 \cdot [1 - R(i-1)] = 1 - R(i-1).$$

*) La fonction $R(m)$ n'est donnée que pour des m entiers, mais à titre d'illustration sur la figure 7.74 les points sont reliés par des segments de droite.

Il est clair qu'on peut écrire de la même façon $M[X_1] = M[1] = 1 - R(0)$ $(R(0) = 0)$; on en tire

$$M[Z] = \sum_{i=1}^{\infty} [1 - R(i-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - R(k)].$$

7.75*. Même énoncé que celui du problème précédent; trouver la variance du nombre d'épreuves suffisant pour enregistrer le succès.

Solution. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ étant dépendantes, on ne peut pas simplement additionner leurs variances. Cherchons le moment initial d'ordre deux de la variable Z

$$M[Z^2] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right)^2\right] = M\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2\right] + 2M\left[\sum_{j>i} X_i X_j\right];$$

$$M[X_i^2] = 1^2 \cdot [1 - R(i-1)] = 1 - R(i-1).$$

La variable $X_i X_j$ prend la valeur 1 si X_i et X_j valent l'unité, c'est-à-dire que les deux épreuves (l'i-ième et la j-ième) sont nécessaires. Pour que les deux épreuves (l'i-ième et la j-ième) le soient il suffit que le soit l'épreuve postérieure (la j-ième):

$$M[X_i X_j] = P\{X_i = 1,\ X_j = 1\} = \begin{Bmatrix} 1 - R(j-1) & \text{pour } j > i \\ 0 & \text{pour } j \leqslant i \end{Bmatrix};$$

il s'ensuit

$$M[Z^2] = \sum_{i=1} [1 - R(i-1)] + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j>i+1} [1 - R(j-1)].$$

La dernière somme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j>i+1}^{\infty} [1 - R(j-1)] = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)[1 - R(j-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k[1 - R(k)].$$

D'où

$$D[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - R(k)] + 2 \sum_{k=0}^{\infty} k[1 - R(k)] - \left\{\sum_{k=0}^{\infty} [1 - R(k)]\right\}^2.$$

7.76. La probabilité de localiser un objet par un radar croît avec le nombre n de cycles de balayage d'après une loi exponentielle:

$$P(n) = 1 - \alpha^n \quad (0 < \alpha < 1). \tag{7.76}$$

Trouver l'espérance mathématique du nombre de cycles X assurant la localisation de l'objet.

Solution. En posant $\alpha = 1 - p$ récrivons la formule (7.76) sous la forme

$$P(n) = 1 - (1 - p)^n;$$

nous en tirons que les cycles sont indépendants et la probabilité de détecter un objet à chaque cycle est égale à $p = 1 - \alpha$. Dans ces conditions, la variable X obéit à la loi de répartition géométrique qui commence par l'unité, alors que son espérance mathématique

$$M[X] = 1/p = 1/(1 - \alpha).$$

Ce même résultat peut s'obtenir en utilisant la solution du problème 7.74

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - P(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}.$$

7.77. Un poste radar explore une région de l'espace où se trouvent n objets. En un cycle de balayage le poste découvre chaque objet, indépendamment des autres objets et des autres cycles, avec une probabilité p. Combien de cycles faut-il pour que : 1) la probabilité de la découverte de tous les objets devienne non inférieure à P, 2) le nombre moyen d'objets localisés devienne non inférieur au nombre donné $m < n$?

Solution. Désignons par $G_n(k)$ la probabilité de détecter tous les n objets en k cycles; $G_n(k) = [G(k)]^n$, où $G(k)$ est la probabilité de la découverte d'un objet ne serait-ce qu'une fois pendant les k cycles. $G(k) = 1 - (1 - p)^k$, d'où $G_n(k) = [1 - (1 - p)^k]^n$. Posons $G_n(k) \geqslant P$; $[1 - (1 - p)^k]^n \geqslant P$; $(1 - p)^k \leqslant 1 - \sqrt[n]{P}$; $k \log(1 - p) \leqslant \log(1 - \sqrt[n]{P})$. Puisque $\log(1 - p) < 0$, la division par ce logarithme change le signe de l'inégalité

$$k \geqslant \log(1 - \sqrt[n]{P})/\log(1 - p).$$

2) D'après le théorème d'addition des espérances mathématiques le nombre moyen d'objets $M[X]$ localisés en k cycles est égal à $n[1 - (1 - p)^k]$. En posant $n[1 - (1 - p)^k] \geqslant m$ et en résolvant l'inégalité par rapport à l'exposant k, on obtient

$$k \geqslant \log\left(1 - \frac{m}{n}\right) \Big/ \log(1 - p).$$

7.78*. On procède dans des conditions différentes à n épreuves indépendantes; la probabilité de l'apparition de l'événement A dans la première, la deuxième, etc., épreuves est égale à $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nous nous intéressons à l'espérance mathématique et à la variance de la variable aléatoire X, nombre total des apparitions de l'événement A. Pour simplifier les calculs les probabilités p_i sont

moyennées et remplacées par une seule probabilité constante

$$\bar{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Le calcul des M [X] et D [X] sera-t-il correct?

Solution. Le calcul de M [X] sera correct

$$\mathrm{M}[X]=n\bar{p}=\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i=\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Pour ce qui est de la variance, elle sera exagérée. Pour le démontrer, comparons sa valeur approchée

$$\tilde{D}_x=n\bar{p}\bar{q},\ \text{où}\ \bar{q}=1-\bar{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

à sa valeur exacte

$$D_x=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i,\ \text{où}\ q_i=1-p_i.$$

Transformons la somme de deux façons

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i-\bar{p})(q_i-\bar{q})=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i-\sum_{i=1}^{n} p_i\bar{q}-\sum_{i=1}^{n}\bar{p}q_i+n\bar{p}\bar{q}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i-n\bar{p}\bar{q},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i-\bar{p})(q_i-\bar{q})=\sum_{i=1}^{n}(p_i-\bar{p})(1-p_i-1+\bar{p})=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}(p_i-\bar{p})^2\leqslant 0.$$

On en tire

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i-n\bar{p}\bar{q}=D_x-\tilde{D}_x\leqslant 0;\quad \tilde{D}_x\geqslant D_x,$$

ce qu'il fallait démontrer. Notons que l'égalité dans $\tilde{D}_x\geqslant D_x$ s'obtient seulement avec $p_1=p_2,\ldots,=p_n=\bar{p}$.

7.79*. Démontrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, positives et ont la même répartition, alors

$$\mathrm{M}\Big[\sum_{i=1}^{k} X_i\Big/\sum_{i=1}^{n} X_j\Big]=\frac{k}{n}.$$

Solution. Toutes les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant positives, le dénominateur n'est jamais nul. D'après le théorème d'addition des espérances mathématiques

$$\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right].$$

La répartition de toutes les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant la même, on a

$$\mathrm{M}\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \mathrm{M}\left[X_m \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right]$$

pour des i et m quelconques. Introduisons la notation α pour leur valeur commune

$$\mathrm{M}\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En même temps il est clair que la somme de toutes les variables de la forme $X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j$ est égale à l'unité ; par conséquent, son espérance mathématique vaut également l'unité

$$\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = 1.$$

En remplaçant l'expression sous le signe de l'espérance mathématique par α, on obtient $\sum_{j=1}^{n} \alpha = n\alpha = 1$, d'où $\alpha = 1/n$. Donc

$$\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

ce qu'il fallait démontrer.

7.80. Soient n utilisateurs de l'énergie dont les besoins par unité de temps sont des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de même répartition arbitraire. On considère la variable aléatoire $Z_i = X_i / \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, part de l'i-ième utilisateur dans la consommation globale de l'énergie. Démontrer que pour un i quelconque l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z_i est égale à $1/n$.

Solution. On conçoit que l'espérance mathématique de la variable Z_i existe, sa valeur étant comprise entre zéro et l'unité. Les lois de répartition de toutes les variables aléatoires Z_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont

les mêmes (en vertu de la symétrie totale du problème) et leurs espérances mathématiques sont égales entre elles: $M[Z_1] = M[Z_2] = \ldots = M[Z_n]$. La somme de toutes les variables aléatoires Z_i étant égale à l'unité, la somme de leurs espérances mathématiques vaut également l'unité

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[Z_i] = 1, \text{ c'est-à-dire } nM[Z_i] = 1;$$

$$M[Z_i] = 1/n \quad (i = 1, \ldots, n).$$

7.81. Pour construire un triangle équilatéral de côté $a = 3$ cm on procède de la façon suivante: d'un point arbitraire O on mène un segment de longueur a; sur ce segment on construit l'angle égal à 60 °, puis sur le côté de cet angle on porte encore un segment de longueur a et on relie le point obtenu au point O (fig. 7.81). Les segments de longueur a sont portés à l'aide d'une règle à valeur de division de 1 mm; l'erreur maximale possible dans ces conditions est égale à 0,5 mm. L'angle est porté à l'aide d'un rapporteur à erreur maximale de 1 °. Appliquer la méthode de linéarisation pour trouver l'espérance mathématique et l'écart quadratique moyen du troisième côté X.

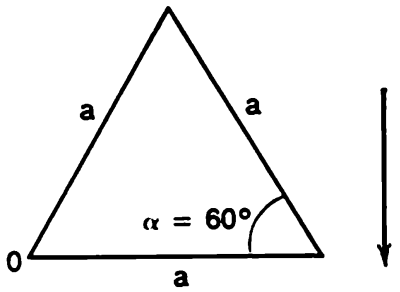


Fig. 7.81

Solution. Désignons la longueur réelle du premier côté par X_1, du deuxième, par X_2, la valeur réelle de l'angle, par Θ. Ces variables aléatoires peuvent être considérées comme indépendantes. On a

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2\cos\Theta}.$$

En appliquant la méthode de linéarisation, on trouve

$$m_x = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 - 2m_{x_1}m_{x_2}\cos m_\theta},$$

où $m_{x_1} = m_{x_2} = 30$ mm; $\cos m_\theta = 0{,}5$; d'où $m_x = \sqrt{900 + 900 - 900} = 30$ mm. Ensuite

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)_m = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x_1 - 2x_2\cos\theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta}}\right)_m = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)_m = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x_2 - 2x_1\cos\theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta}}\right)_m = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_m = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x_1x_2\sin\theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta}}\right)_m = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ mm}.$$

Calculons

$$D_x \approx \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)_m^2 D_{x_1} + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)_m^2 D_{x_2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)_m^2 D_\vartheta.$$

Les variances des arguments ne sont pas données, on ne dispose que de données sur les écarts pratiquement possibles de leurs espérances mathématiques: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0{,}5$ mm; $\Delta\vartheta = 1\,° = 0{,}01745$ rd. En posant approximativement

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \Delta x_1/3 = 0{,}167 \text{ mm}, \quad D_{x_1} = D_{x_2} = 0{,}0278 \text{ mm}^2,$$
$$\sigma_\vartheta = \Delta\vartheta/3 = 0{,}00582 \text{ rd}, \quad D_\vartheta = 3{,}39\cdot 10^{-5} \text{ rd},$$

on obtient $D_x = 0{,}25\cdot 0{,}0278\cdot 2 + 675\cdot 3{,}39\cdot 10^{-5} \approx 0{,}0368$ mm^2, $\sigma_x \approx 0{,}192$ mm.

7.82. La distance D d'un certain point O à l'objet R est déterminée de la façon suivante: on mesure l'angle α sous lequel l'objet est

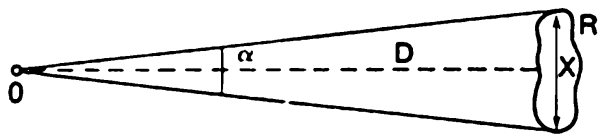


Fig. 7.82

vu du point O (fig. 7.82); ensuite, en connaissant la dimension linéaire de l'objet X et en admettant que l'angle α est petit, on calcule la distance d'après la formule approchée

$$D = X/[2 \sin(\alpha/2)] \approx X/\alpha.$$

La dimension linéaire de l'objet X vue à partir du point O peut varier en fonction de son pivotement aléatoire dans les limites de 8 à 12 m; l'angle α est déterminé à 0,1 millième de radian près. La distance D est grande par rapport à la dimension de l'objet X. Trouver l'écart quadratique moyen approché σ_D de l'erreur dans la détermination de la distance D, si la valeur mesurée de l'angle α est égale à un millième de radian.

Solution. En appliquant la méthode de linéarisation, on a

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)_m^2 \sigma_\alpha^2.$$

Admettons que la dimension linéaire X soit répartie uniformément dans l'intervalle (8 ; 12) : $\sigma_x = (12-8)/(2\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$ m, $\sigma_m^2 = 4/3$ m^2; $m_x = 10$ m. Ensuite $\sigma_\alpha \approx \frac{1}{3}\,0{,}0001$; $\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{9}\,10^{-8}$; $m_\alpha = 0{,}001$, d'où

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(-\frac{x}{\alpha^2}\right)_m^2 \sigma_\alpha^2 = \frac{13}{9}\,10^6 \text{ m}^2;$$

$$\sigma_D = \frac{\sqrt{13}}{3}\cdot 10^3 = 1{,}20\cdot 10^3 \text{ m}.$$

7.83. Soient deux fonctions presque linéaires de n arguments aléatoires $Y = \varphi_y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; $Z = \varphi_z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On donne les caractéristiques du système m_{x_i}, D_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et la matrice de corrélation $\| K_{ij} \|$. Trouver la covariance approchée K_{yz}.

Solution. En linéarisant les fonctions φ_y et φ_z, on obtient

$$Y \approx \varphi_y(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i;$$

$$Z \approx \varphi_z(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i,$$

d'où l'on tire

$$\mathring{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i; \quad \mathring{Z} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right) \mathring{X}_i;$$

$$K_{yz} = \mathrm{M}[\mathring{Y}\mathring{Z}] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m D_{x_i} + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j}\right)_m K_{ij}.$$

La dernière somme compte $n(n-1)$ termes; à chaque K_{ij} correspondent deux termes de la somme

$$\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j}\right)_m K_{ij}$$

et

$$\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_j}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m K_{ij}.$$

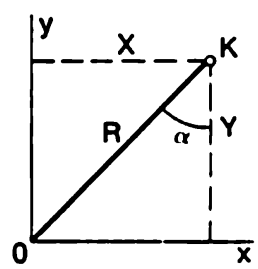


Fig. 7.84

7.84. Pour déterminer la distance R entre le point K et l'origine des coordonnées on peut appliquer deux méthodes: 1) établir les distances X et Y aux axes de coordonnées, puis calculer R d'après la formule $R_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$; 2) mesurer seulement la distance Y à l'axe des abscisses et l'angle α (fig. 7.84), puis calculer R d'après la formule $R_2 = Y/\cos\alpha$. Nous nous intéressons à la méthode qui réduit au minimum l'erreur, si les distances X et Y et l'angle α sont déterminés avec des erreurs indépendantes l'une de l'autre, les écarts quadratiques moyens σ_x et σ_y des erreurs de X et Y étant

égaux entre eux $\sigma_x = \sigma_y$, et l'écart quadratique moyen de l'erreur de l'angle étant égal à σ_α.

Faire le calcul numérique de l'écart quadratique moyen des erreurs : $\sigma_x = \sigma_y = 1$ m ; $\sigma_\alpha = 1° = 0{,}0174$ rd, pour les valeurs moyennes des paramètres : $m_x = 100$ m ; $m_y = 60$ m ; $m_\alpha = \text{arc tg}\,(m_x/m_y) \approx 59° \approx 1{,}03$ rd.

Solution. 1) $\dfrac{\partial R_1}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial R_1}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$$D[R_1] = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)_m \sigma_x^2 + \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)_m \sigma_y^2 = \sigma_y^2 ; \sigma_1 = \sqrt{D[R_1]} = \sigma_y.$$

2) $\dfrac{\partial R_2}{\partial y} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\dfrac{\partial R_2}{\partial \alpha} = \dfrac{y \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$;

$$D[R_2] = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)_m \sigma_y^2 + \left(\frac{y^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)_m \sigma_\alpha^2 > \sigma_y^2 ; \ \sigma_2 = \sqrt{D[R_2]} > \sigma_1.$$

De la sorte, pour $\alpha > 0$ on observe la condition $\sigma_2 > \sigma_1$.

Pour les données numériques du problème, on a

$$\sigma_1 = \sigma_y = 1 \text{ m} ; \ \sigma_2 =$$
$$= \left(\left[1 + \left(\frac{100}{60}\right)^2\right]\left[1^2 + 60^2 \left(\frac{100}{60}\right)^2 0{,}0174^2\right]\right)^2 = 3{,}9 \text{ m}.$$

7.85. Les espérances mathématiques du système de trois variables aléatoires X, Y, Z sont $m_x = 10$; $m_y = 5$; $m_z = 3$; les écarts quadratiques moyens $\sigma_x = 0{,}1$; $\sigma_y = 0{,}06$; $\sigma_z = 0{,}08$, et la matrice de corrélation normée

$$\|r\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}7 & -0{,}3 \\ & 1 & 0{,}6 \\ & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Utiliser la méthode de la linéarisation pour calculer l'espérance mathématique et l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire $U = (3X^2 + 1)/(Y^2 + 2Z^2)$.

Solution. $m_u = (3 \cdot 100 + 1)/(25 + 2 \cdot 9) = 301/43 = 7$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6x}{y^2+2z^2} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{(3x^2+1)\,2y}{(y^2+2z^2)^2} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{(3x^2+1)\,4z}{(y^2+2z^2)^2} ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m = \frac{6 \cdot 10}{43} = 1{,}4 ;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m = -\frac{301 \cdot 10}{(43)^2} = -1{,}63 ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_m = -\frac{301 \cdot 12}{(43)^2} = -1{,}95 ;$$

$$D[U] = 1{,}4^2 \cdot 0{,}1^2 + 1{,}63^2 \cdot 0{,}06^2 + 1{,}95^2 \cdot 0{,}08^2 +$$
$$+ 2\,[-1{,}4 \cdot 1{,}63 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}06 + 1{,}4 \cdot 1{,}95 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}08 +$$
$$+ 1{,}63 \cdot 1{,}95 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}08] \approx 0{,}066 ; \quad \sigma_u \approx 0{,}26.$$

7.86. On met en parallèle deux résistances prises au hasard R_1 et R_2. La valeur nominale de chaque résistance est la même et égale à $m_{r_1} = m_{r_2} = 900\ \Omega$. Les résistances sont fabriquées avec une erreur maximale de R, égale à 1 % de la valeur nominale. Déterminer par la méthode de linéarisation la valeur nominale d'une telle connexion et son écart quadratique moyen.

Solution. $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \varphi(R_1, R_2)$; $m_r = \varphi(m_{r_1}, m_{r_2}) = 450\ \Omega$;

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2} = \frac{1}{3}\,\frac{900}{100} = 3\ \Omega;\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\right)_m = \left[\frac{r_2^2}{(r_1+r_2)^2}\right]_m = \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_2}\right)_m = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\right)_m = \frac{1}{4};$$

$$D[R] = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_i}\right)_m^2 \sigma_{r_i}^2 = \frac{9}{8}\ \Omega^2;\quad \sigma_r \approx 1{,}06\ \Omega.$$

Dans ces conditions, l'erreur maximale est de 3,2 Ω, ce qui fait 0,7 % (et non pas 1 % comme on l'a prévu d'abord) de la valeur nominale.

7.87. La fréquence de résonance d'un circuit oscillant f_r se calcule d'après l'expression $f_r = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, où L est l'inductance du circuit; C, sa capacité. Calculer la moyenne approchée de la fréquence de résonance du circuit et son écart quadratique moyen, si $m_L = 50\ \mu\text{H}$; $m_C = 200$ pF; $\sigma_L = 0{,}5\ \mu\text{H}$; $\sigma_C = 1{,}5$ pF.

Solution. $m_{f_r} = 1/(2\pi\sqrt{m_L m_C}) = 1{,}59$ MHz.

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial L}\right)_m = \frac{-1}{2\pi m_C^{1/2} m_L^{3/2} 2} = m_{f_r}\,\frac{-1}{2m_L};$$

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial C}\right)_m = \frac{-1}{2\pi m_L^{1/2} m_C^{3/2} 2} = m_{f_r}\,\frac{1}{2m_C};$$

$$D_{f_r} = \left(\frac{\partial f_r}{\partial L}\right)_m^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial f_r}{\partial C}\right)_m^2 \sigma_C^2 =$$

$$= \frac{m_{f_r}^2}{4}\left(\frac{\sigma_L^2}{m_L^2} + \frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\right) = m_{f_r}^2\left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 10^{-4};$$

$$\sigma_{f_r} = m_{f_r}\,\frac{5}{8}\cdot 10^{-2} = 1{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{MHz},$$

ce qui fait 0,62 % de la fréquence nominale.

CHAPITRE VIII

LOIS DE RÉPARTITION DES FONCTIONS DES VARIABLES ALÉATOIRES. THÉORÈMES LIMITES DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

8.0. Si X est une variable aléatoire continue de densité $f(x)$, alors que la variable aléatoire Y lui est liée par une relation fonctionnelle

$$Y = \varphi(X),$$

où φ est une fonction dérivable, monotone sur tout l'intervalle des valeurs possibles de l'argument X, la densité de Y est exprimée par la formule

$$g(y) = f(\psi(y))\,[\psi'(y)], \tag{8.0.1}$$

où ψ est la fonction inverse de φ.

Si φ est une fonction non monotone, la fonction inverse est non univoque et la densité de la variable aléatoire Y est déterminée comme la somme d'autant de termes de la forme (8.0.1) que la fonction inverse compte de valeurs (pour y donné)

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\,[\psi_i'(y)], \tag{8.0.2}$$

où $\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_k(y)$ sont les valeurs de la fonction inverse pour y donné.

Pour la fonction de plusieurs variables aléatoires il est plus commode de calculer non pas la densité de répartition, mais la fonction de répartition. En particulier, pour la fonction de deux arguments $Z = \varphi(X, Y)$, la fonction de répartition

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{8.0.3}$$

où $f(x, y)$ est la densité commune des variables X, Y; $D(z)$, le domaine du plan xOy tel que pour lui $\varphi(x, y) < z$.

La densité $g(z)$ est déterminée par dérivation de $G(z)$: $g(z) = G'(z)$.

La densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires $Z = X + Y$ est exprimée par l'une quelconque des formules:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx; \qquad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy, \tag{8.0.4}$$

où $f(x, y)$ est la densité de répartition commune des variables X, Y.

En particulier, lorsque les variables aléatoires X, Y sont indépendantes, $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ et

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx \tag{8.0.5}$$

ou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)\, dy. \tag{8.0.6}$$

Dans ce cas la loi de répartition de la somme $g(z)$ s'appelle *composition des lois de répartition* (ou convolution) des termes $f_1(x)$, $f_2(y)$.

Si des variables aléatoires réparties d'après la loi normale subissent une transformation linéaire quelconque, on obtient de nouveau des variables aléatoires à répartition normale. En particulier, si une variable aléatoire X obéit à la loi normale de paramètres m_x, σ_x, la variable aléatoire $Y = aX + b$ (où a et b sont non aléatoires) est répartie suivant la loi normale de paramètres $m_y = am_x + b$; $\sigma_y = |a| \sigma_x$.

La composition de deux lois normales $f_1(x)$, de paramètres m_x, σ_x, et $f_2(y)$, de paramètres m_y, σ_y, amène encore une loi normale de paramètres

$$m_z = m_x + m_y; \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \tag{8.0.7}$$

Lors de l'addition de deux variables aléatoires X, Y à répartition normale, de paramètres m_x, σ_x, m_y, σ_y et à coefficient de corrélation r_{xy}, on obtient une variable aléatoire Z *répartie* également *suivant la loi normale* de paramètres

$$m_z = m_x + m_y; \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}. \tag{8.0.8}$$

La fonction linéaire de plusieurs variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ réparties normalement

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

où a_i, b sont des coefficients non aléatoires, possède également une loi de répartition normale de paramètres

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b; \quad \sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{x_i}^2}, \tag{8.0.9}$$

où m_{x_i}, σ_{x_i} sont les paramètres de la variable aléatoire X_i ($i = 1, \ldots, n$).

Si les arguments $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont corrélés, la loi de répartition de la fonction linéaire reste normale, mais de paramètres

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b; \quad \sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j r_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}, \tag{8.0.10}$$

où $r_{x_i x_j}$ est le coefficient de corrélation des variables X_i, X_j ($i = 1, \ldots, n$; $j \neq i$).

On appelle *composition de deux lois normales dans le plan* la répartition du vecteur aléatoire (X, Y) de composantes $X = X_1 + X_2$; $Y = Y_1 + Y_2$, où (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) sont des vecteurs aléatoires non corrélés entre eux ($r_{x_1x_2} = r_{x_1y_2} = r_{y_1x_2} = r_{y_1y_2} = 0$).

La composition de deux lois normales dans le plan conduit également à la loi normale de paramètres

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2}; \quad m_y = m_{y_1} + m_{y_2};$$
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}, \tag{8.0.11}$$

d'où

$$K_{xy} = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2},$$
$$r_{xy} = (r_{x_1y_1}\sigma_{x_1}\sigma_{y_1} + r_{x_2y_2}\sigma_{x_2}\sigma_{y_2})/(\sigma_x\sigma_y). \tag{8.0.12}$$

En projetant un point aléatoire (X, Y) réparti sur le plan suivant la loi normale sur l'axe Oz passant par le centre de dispersion et composant un angle α avec l'axe Ox, on obtient le point aléatoire Z réparti d'après la loi normale de paramètres

$$m_z = m_x \cos\alpha + m_y \sin\alpha;$$
$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha + r_{xy}\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha}. \tag{8.0.13}$$

Les théorèmes limites de la théorie des probabilités forment deux groupes : 1) la loi des grands nombres et 2) le théorème central limite. La loi des grands nombres présente plusieurs formes dont chacune établit dans le cas d'un grand nombre d'observations, telle ou telle *stabilité des moyennes.*

1. *Théorème de Bernoulli* (loi faible des grands nombres). Lorsque le nombre n d'épreuves indépendantes, dans chacune desquelles l'événement A apparaît avec la probabilité p, augmente indéfiniment, la fréquence P_n^* de l'événement A converge en probabilité vers la probabilité p de cet événement

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|P_n^* - p| < \varepsilon\} = 1, \tag{8.0.14}$$

où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut.

2. *Théorème de Poisson.* Avec l'augmentation indéfinie du nombre n d'épreuves indépendantes où l'événement A apparaît avec des probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la fréquence P_n^* de l'événement A converge en probabilité vers la probabilité moyenne de l'événement

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|P_n^* - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8.0.15}$$

3. *Théorème de Tchébychev* (*loi des grands nombres*). Lorsque le nombre n d'épreuves indépendantes, dans chacune desquelles la variable aléatoire X prend une certaine valeur X_i avec une espérance mathématique m_x, augmente indéfiniment, la moyenne arithmétique de ces valeurs converge en probabilité vers l'espérance mathématique de la variable aléatoire X:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8.0.16}$$

4. *Théorème de Markov* (*loi des grands nombres pour le cas où les conditions de l'épreuve sont différentes*). Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires

indépendantes d'espérances mathématiques $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$ et de variances $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}$, toutes les variances étant bornées supérieurement par le même nombre L : $D_{x_i} < L$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), alors, avec la croissance illimitée de n la moyenne arithmétique des valeurs observées des variables aléatoires converge en probabilité vers la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (8.0.17)$$

Pour évaluer la rapidité avec laquelle diverses moyennes convergent vers les grandeurs constantes, on peut utiliser l'*inégalité de Tchébychev*:

$$\mathrm{P}\{|X - m_x| \geqslant \alpha\} \leqslant D_x/\alpha^2, \qquad (8.0.18)$$

où $\alpha > 0$; m_x, D_x sont l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Théorème central limite. Nous mentionnerons trois de ses formes diverses.

1. *Théorème de Laplace.* Si un événement A apparaît avec une probabilité p dans chacune des n épreuves indépendantes, alors pour $n \to \infty$ la loi de répartition de la variable aléatoire X, nombre d'apparitions de l'événement, *s'approche indéfiniment de la loi normale* de paramètres $m = np$; $\sigma = \sqrt{npq}$ ($q = 1 - p$). Ceci permet de calculer la probabilité pour que la variable X tombe dans un intervalle (α, β) quelconque; pour un n suffisamment grand

$$\mathrm{P}\{X \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (8.0.19)$$

Au lieu de la formule (8.0.19) on emploie souvent l'expression de la probabilité de tomber dans l'intervalle non pas de la variable aléatoire X elle-même, mais de la variable normée

$$Z = (X - m_x)/\sigma_x = (X - np)/\sqrt{npq}; \quad m_z = 0, \quad \sigma_z = 1.$$

Pour un n assez grand

$$\mathrm{P}\{Z \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \qquad (8.0.20)$$

2. *Théorème central limite des termes de même loi de répartition.* Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires de même loi de répartition à espérance mathématique m_x et à écart quadratique moyen σ_x, pour un n assez grand, leur somme $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *tend vers la loi normale de paramètres*

$$m_y = nm_x, \quad \sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x. \qquad (8.0.21)$$

3. *Théorème de Liapounov.* Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes à espérances mathématiques $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$ et à variances $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}$, la restriction

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}\right)^{3/2}\right] = 0, \qquad (8.0.22)$$

où $b_i = \mathrm{M}[|X_i|^3]$, étant observée, avec un n assez grand la répartition de la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *tend vers la loi normale de paramètres*

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}; \quad \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}}. \tag{8.0.23}$$

Le sens de la restriction (8.0.22) est que les variables aléatoires doivent être comparables d'après l'ordre de leur influence sur la dispersion de la somme.

Problèmes et exercices

8.1. La densité d'une variable aléatoire continue X est $f(x)$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable aléatoire $Y = aX + b$, où a et b ne sont pas aléatoires.

Solution. La fonction $\varphi(x) = ax + b$ étant monotone, on applique la formule (8.0.1). La fonction inverse $\psi(y)$ se calcule en résolvant l'équation $y = ax + b$ par rapport à x; on obtient $\psi(y) = (y - b)/a$. D'après le calcul $\psi'(y) = 1/a$; $|\psi'(y)| = 1/|a|$;

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right). \tag{8.1}$$

8.2. Une variable aléatoire X est répartie uniformément dans l'intervalle $(-\pi/2; \pi/2)$. Trouver la loi de répartition de la variable aléatoire $Y = \sin X$.

Solution. Dans l'intervalle $(-\pi/2; \pi/2)$ la fonction $y = \sin x$ est monotone; donc, la densité de répartition de la variable Y peut s'obtenir d'après la formule (8.0.1): $g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)|$. Il est commode de disposer la solution du problème sous la forme de deux colonnes en écrivant à gauche les notations des fonctions adoptées dans le cas général, et à droite, les fonctions concrètes qui correspondent à l'exemple considéré:

$f(x)$	$1/\pi$ pour $x \in (-\pi/2; \pi/2)$
$y = \varphi(x)$	$y = \sin x$
$x = \psi(y)$	$x = \arcsin y$
$\psi'(y)$	$1/\sqrt{1-y^2}$
$g(y) = f(\psi(y))\,\psi'(y)$	$g(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$ pour $y \in (-1, 1)$.

L'intervalle $(-1; 1)$ où reposent les valeurs de la variable aléatoire Y est déterminé par le domaine des valeurs de la fonction $y = \sin x$ pour $x \in (-\pi/2; \pi/2)$*).

*) Dans ce qui suit, en résolvant des problèmes analogues, nous écrirons partout comme ici l'expression de la densité seulement pour l'intervalle où elle diffère de zéro, en admettant que hors de cet intervalle elle est nulle.

8.3. Une variable aléatoire X est répartie uniformément dans l'intervalle $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable aléatoire $Y = \cos X$.

Solution. Dans l'intervalle $(-\pi/2;\ \pi/2)$ la fonction $y = \cos x$ n'est pas monotone. Composons la solution d'une façon analogue à la précédente à cette différence près que dans notre cas pour tout y la fonction inverse a deux valeurs [voir (8.0.2)]. Ecrivons la solution en deux colonnes:

$f(x)$	$1/\pi$ pour $x \in (-\pi/2;\ \pi/2)$
$y = \varphi(x)$	$y = \cos x$
$x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$	$x_1 = -\arccos y$ $x_2 = \arccos y$
$\lvert\psi_1'(y)\rvert,\ \lvert\varphi_2'(y)\rvert$	$1/\sqrt{1-y^2}$
$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\,\lvert\psi_i'(y)\rvert$	$g(y) = 2/(\pi\sqrt{1-y^2})$ pour $y \in (0,\ 1)$

8.4. Une variable aléatoire X est répartie uniformément dans l'intervalle $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Trouver la densité de répartition de la variable aléatoire $y = \lvert\sin x\rvert$.

Réponse. $g(y) = 2/(\pi\sqrt{1-y^2})$ pour $y \in (0,\ 1)$.

8.5. Une variable aléatoire X a une densité de répartition $f(x)$. Trouver la densité de répartition de la variable aléatoire $Y = \lvert 1 - X\rvert$.

Solution. La fonction $y = \lvert 1 - x\rvert$ n'est pas monotone. La solution se compose de la même façon que dans le problème 8.3.

$f(x)$	$f(x)$
$y = \varphi(x)$	$y = \lvert 1-x\rvert$
$x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$	$x_1 = 1-y$ $x_2 = 1+y$
$\lvert\psi_1'(y)\rvert,\ \lvert\psi_2'(y)\rvert$	1
$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\,\lvert\psi_i'(y)\rvert$	$g(y) = f(1-y) + f(1+y)$ pour $y > 0$.

8.6. Une variable aléatoire continue X a la densité $f_x(x)$. On considère la variable $Y = -X$. Trouver sa densité $f_y(y)$.

Réponse. $f_y(y) = f_x(-y)$.

8.7. Une variable aléatoire continue X obéit à la loi de répartition uniforme dans l'intervalle (α, β) $(\beta > \alpha)$. Trouver la répartition de la variable $Y = -X$.

Réponse. Sa répartition est uniforme dans l'intervalle $(-\beta, -\alpha)$.

8.8. La densité d'une variable aléatoire continue X est $f_x(x)$. Trouver la densité $f_y(y)$ de son module $Y = |X|$.

Réponse. $f_y(y) = f_x(-y) + f_x(y)$ pour $y > 0$.

8.9. Une variable aléatoire X a une répartition normale de paramètres m_x, σ_x. Ecrire la densité de probabilité de son module $Y = |X|$. Quelle sera, notamment, cette loi de répartition avec $m_x = 0$?

Réponse. $$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(y+m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\right\} \text{ pour } y > 0.$$

Si $m_x = 0$, alors

$$f_y(y) = \frac{2}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right) \text{ pour } y > 0.$$

8.10. Une roue fixée au centre O (fig. 8.10) est entraînée en rotation qui s'amortit sous l'effet de frottement. Il en résulte que le point A fixé à la jante de la roue s'arrête à une certaine hauteur H (positive ou négative) par rapport à la ligne horizontale I-I passant par le centre; la hauteur H dépend de l'angle aléatoire Θ enregistré lorsque la rotation a cessé. Trouver: 1) la loi de répartition de la hauteur H; 2) la loi de répartition de la distance D du point A à la droite I-I en considérant cette distance toujours positive.

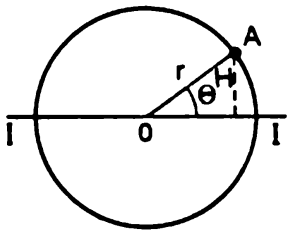


Fig. 8.10

Solution. $H = r\sin\Theta$, où l'angle Θ est une variable aléatoire répartie uniformément dans l'intervalle $(0; 2\pi)$. Il est clair que la solution du problème ne change pas si on considère la variable aléatoire Θ répartie uniformément dans l'intervalle $(-\pi/2; \pi/2)$; alors H devient une fonction monotone de Θ.

La densité de probabilité de la variable H s'écrit

$$g(h) = \left(\pi r\sqrt{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2}\right)^{-1} \text{ pour } -r < h < r.$$

La densité de probabilité de la variable $D = |H|$ est

$$g_1(d) = 2\left(\pi r\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}\right)^{-1} \text{ pour } 0 < d < r.$$

8.11. La répartition de la variable aléatoire X obéit à la loi de Rayleigh de densité $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ pour $x > 0$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable $Y = e^{-X^2}$.

Solution. Dans l'intervalle des valeurs possibles de l'argument la fonction $y = e^{-X^2}$ est monotone. En appliquant la règle générale, on obtient

$f(x)$	$\frac{x}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\ (x>0)$
$y=\varphi(x)$	$y=e^{-x^2}$
$x=\psi(y)$	$x=\sqrt{-\ln y}$
$\lvert\psi'(y)\rvert$	$(2y\sqrt{-\ln y})^{-1}$
$g(y)=f(\psi(y))\lvert\psi'(y)\rvert$	$g(y)=\frac{1}{2\sigma^2 y}\exp\left\{\frac{\ln y}{2\sigma^2}\right\}=\frac{1}{2\sigma^2}\,y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}}$ pour $0<y<1$

Les courbes de $g(y)$ pour σ différents sont données par la figure 8.11.

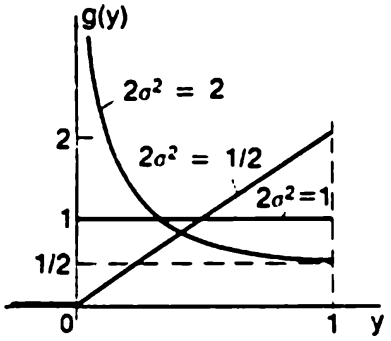


Fig. 8.11

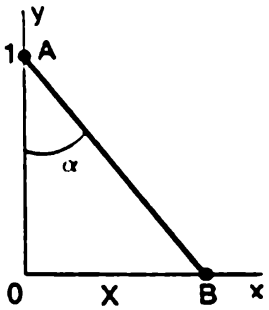


Fig. 8.13

8.12. La répartition d'une variable aléatoire X suit la loi de Cauchy de densité $f(x) = [\pi(1+x^2)]^{-1}$ $(-\infty < x < \infty)$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable inverse $Y = 1/X$.

Solution. En tenant compte que malgré l'allure discontinue de la fonction $y = 1/x$, la fonction inverse $x = 1/y$ est univoque et en résolvant le problème d'après les règles prévues pour une fonction monotone, on obtient

$$g(y)=\frac{1}{\pi\left[1+\frac{1}{y}\right]^2}\,\frac{1}{y^2}\ \text{ou}\ g(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}\ (-\infty<y<\infty),$$

c'est-à-dire que *la répartition de la variable inverse à la variable répartie d'après la loi de Cauchy obéit également à la loi de Cauchy.*

8.13. Par le point A de l'axe Oy à la distance 1 de l'origine des coordonnées on mène une droite AB sous un angle α à l'axe Oy (fig. 8.13). Toutes les valeurs de l'angle α de $-\pi/2$ à $\pi/2$ sont équiprobables. Trouver la densité de répartition $g(x)$ de l'abscisse X du point B qui est le point d'intersection de la droite avec l'axe d'abscisses.

Solution. $X = \operatorname{tg}\alpha$; dans l'intervalle $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ cette fonction est monotone. On a $g(x) = [\pi(1+x^2)]^{-1}$ $(-\infty < x < \infty)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire X est répartie d'après la loi de Cauchy.

8.14. Une variable aléatoire discrète a pour tableau de répartition

X:	-2	-1	0	1	2
	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Construire les tableaux de répartition des variables aléatoires $Y = X^2 + 1$; $Z = |X|$.

Solution. En calculant pour chaque X la valeur correspondante des variables Y et Z et en les disposant dans l'ordre croissant, on obtient les tableaux de répartition

Y:	1	2	5
	0,3	0,5	0,2

, Z:

	0	1	2
	0,3	0,5	0,2

.

8.15. On mène par le point A de coordonnées $(0; 1)$ une droite AB sous un angle aléatoire Θ à l'axe de coordonnées (fig. 8.15). La loi de répartition de l'angle Θ est de la forme $f(\Theta) = 0{,}5\cos\vartheta$ pour $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Trouver la loi de répartition de la distance L de la droite AB à l'origine des coordonnées.

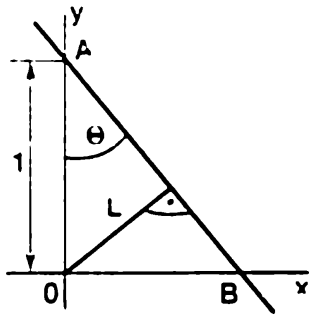


Fig. 8.15

Solution. On a $L = |\sin\Theta|$. Dans l'intervalle $(-\pi/2; \pi/2)$ la fonction $l = |\sin\vartheta|$ est non monotone. En appliquant le schéma usuel pour une fonction non monotone, on obtient

$$g(l) = \frac{1}{\sqrt{1-l^2}}\cos(\arcsin l)$$

ou, compte tenu que $\cos(\arcsin l) = \sqrt{1-l^2}$, $g(l) = 1$ pour $l \in (0; 1)$, c'est-à-dire que la distance L est répartie uniformément dans l'intervalle $(0; 1)$.

8.16. Un rayon du cercle R est une variable aléatoire répartie suivant la loi de Rayleigh

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} \text{ pour } r > 0.$$

Trouver la loi de répartition de l'aire S du cercle.

Solution. Dans l'intervalle des valeurs possibles de R $(0;\ \infty)$ la fonction $S = \pi R^2$ est monotone; donc

$$g(s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{s}{2\pi\sigma^2}\right\} \text{ pour } s > 0,$$

c'est-à-dire que la loi de répartition de l'aire du cercle obéit à une loi exponentielle de paramètre $1/(2\pi\sigma^2)$.

8.17. Une variable aléatoire X a pour fonction de répartition $F(x)$; la variable aléatoire Y lui est liée par une relation fonctionnelle $Y = 2 - 3X$. Trouver la fonction de répartition $\tilde{F}(y)$ de la variable Y.

Solution.

$$\tilde{F}(y) = \mathrm{P}\{Y < y\} = \mathrm{P}\{2 - 3X < y\} = \mathrm{P}\left\{X > \frac{2-y}{3}\right\} =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left\{X \leqslant \frac{2-y}{3}\right\} = 1 - F\left(\frac{2-y}{3}\right) - \mathrm{P}\left\{X = \frac{2-y}{3}\right\}.$$

Si la variable aléatoire X est continue, la probabilité pour qu'elle prenne une valeur isolée quelconque est nulle et

$$\tilde{F}(y) = 1 - F\left(\frac{2-y}{3}\right).$$

Si la variable X est mixte ou discrète, $\mathrm{P}\left\{X = \frac{2-y}{3}\right\}$ peut différer de zéro et être égale au saut de la fonction $F(x)$ au point $(2 - y)/3$; ainsi, dans le cas général

$$\tilde{F}(y) = 1 - F\left(\frac{2-y}{3}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left[F\left(\frac{2-y}{3} + \Delta x\right) - F\left(\frac{2-y}{3}\right)\right].$$

8.18. Soit une variable aléatoire continue X à fonction de répartition $F(x)$ (fig. 8.18). Trouver et construire la fonction de répartition $G(y)$ de la variable aléatoire $Y = |X|$.

Solution. Pour $X > 0$ on obtient $Y = X$; pour $X < 0$, on obtient $Y = -X$.

$$G(y) = \mathrm{P}\{Y < y\} = \mathrm{P}\{|X| < y\}.$$

Avec $y < 0$ on obtient $G(y) = 0$; avec $y > 0$ on obtient $G(y) = \mathrm{P}\{-y < X < y\} = F(y) - F(-y)$. La fonction $G(y)$ est visualisée par la ligne interrompue de la figure 8.18 [plus loin elle se confond avec $F(x)$].

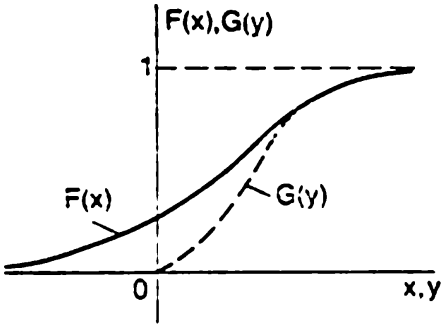


Fig. 8.18

8.19. Une variable aléatoire mixte X prend deux valeurs avec des probabilités différentes de zéro: une valeur négative $(-x_1)$,

avec une probabilité p_1, et une valeur positive (x_2), avec une probabilité p_2. Dans l'intervalle entre $-x_1$ et x_2 la fonction de répartition $F(x)$ est continue (fig. 8.19, *a*) ; $x_1 < x_2$. Trouver et construire la fonction de répartition $G(y)$ de la variable aléatoire $Y = |X|$.

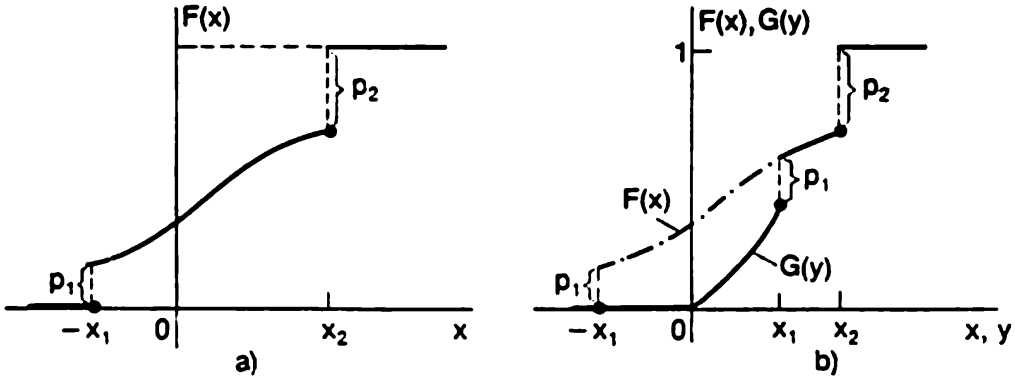


Fig. 8.19

Solution. Pour $y \leqslant 0$ on obtient $G(y) = 0$ (fig. 8.19, *b*) ; pour $y > 0$, on obtient $G(y) = \mathrm{P}\{-y < X < y\} = F(y) - F(-y)$. Pour construire $G(y)$ il faut retrancher de chaque valeur de $F(y)$ la valeur au point $-y$ spéculaire par rapport à l'axe de coordonnées (voir fig. 8.19, *b*, où $F(x)$ est visualisée par une ligne interrompue, et $G(y)$, par un trait continu). La fonction $G(y)$ présente deux sauts aux points x_1 et x_2 égaux respectivement à p_1 et p_2.

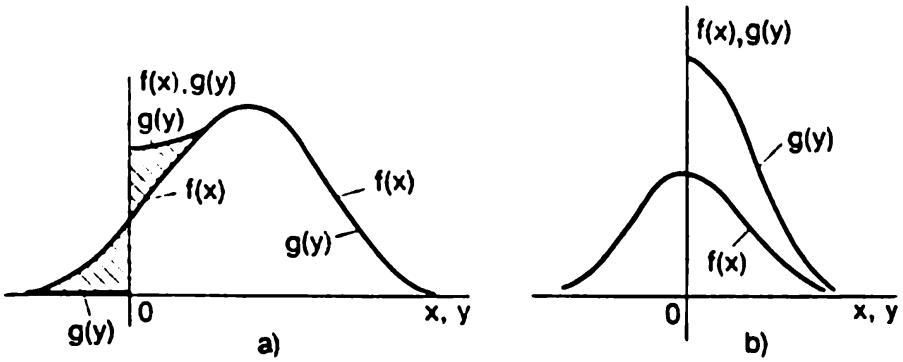


Fig. 8.20

8.20. Une variable aléatoire X possède une répartition normale de paramètres m et σ (fig. 8.20, *a*). Trouver et construire la densité de répartition $g(y)$ de son module $Y = |X|$.

Solution. Pour construire la densité de la variable aléatoire Y il faut à chaque ordonnée de la courbe de répartition $f(x)$ ajouter l'ordonnée qui correspond à la valeur de la densité au point $-x$

(voir fig. 8.20, *a*). Avec $m = 0$, la nouvelle densité est deux fois plus grande que la densité $f(x)$ (fig. 8.20, *b*).

8.21. Une variable aléatoire X possède une répartition normale de paramètres $m = 0$; σ. Trouver et construire la densité $g(y)$ de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Solution.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}; \quad Y = \varphi(X) = X^2.$$

La fonction inverse de $y = x^2$ a deux valeurs: $x_1 = -\sqrt{y}$ et $x_2 = +\sqrt{y}$. D'après la formule (8.0.2)

$$g(y) = f(\sqrt{-y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\} + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\}\right] = \frac{1}{\sqrt{y}}\exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\} \text{ pour } y > 0.$$

Pour $y = 0$, la densité $g(y)$ possède une discontinuité de seconde espèce (passe à l'infini, voir fig. 8.21).

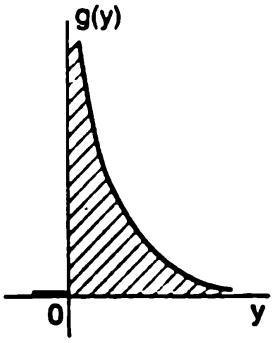


Fig. 8.21

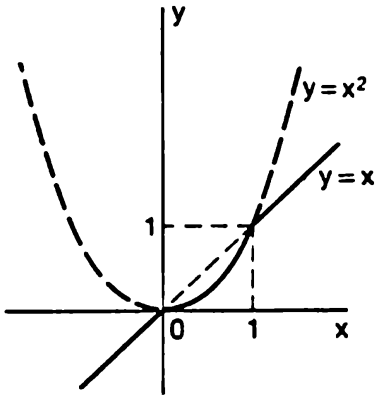


Fig. 8.23

8.22. Soit une variable aléatoire continue X de densité $f(x)$. Trouver la loi de répartition de la variable aléatoire

$$Y = \operatorname{sign} X = \begin{cases} +1 & \text{pour } X > 0; \\ 0 & \text{pour } X = 0; \\ -1 & \text{pour } X < 0 \end{cases}$$

et ses caractéristiques numériques m_y et D_y.

Solution. La variable aléatoire discrète Y possède seulement deux valeurs : -1 et $+1$ (la probabilité pour que $Y = 0$ est nulle).

$$P\{Y = -1\} = P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = F(0);$$

$$P\{Y = +1\} = P\{X > 0\} = 1 - F(0);$$

$$m_y = -1 \cdot F(0) + 1 \cdot [1 - F(0)] = 1 - 2F(0);$$

$$\alpha_2[Y] = 1 \cdot F(0) + 1 \cdot [1 - F(0)] = 1;$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = 4F(0)[1 - F(0)],$$

où $F(x)$ est une fonction de répartition.

8.23. Soit une variable aléatoire continue X de densité $f(x)$. Trouver la loi de répartition de la variable aléatoire $Y = \min \times \{X, X^2\}$, c'est-à-dire de la variable égale à X, si $X < X^2$, et à X^2, si $X^2 < X$.

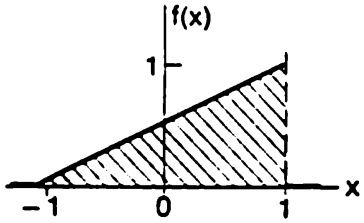


Fig. 8.24

Solution. La fonction $y = f(x)$ est monotone (elle est visualisée par le trait continu de la figure 8.23) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \in (0, 1); \\ x & \text{pour } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

L'intervalle $(0; 1)$ de l'axe Ox étant reporté sur l'intervalle $(0; 1)$ de l'axe Oy, d'après la règle générale

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y}) & \text{pour } y \in (0, 1), \\ f(y) & \text{pour } y \notin (0, 1). \end{cases}$$

8.24. Une variable aléatoire X a la densité $f(x)$ donnée par le graphique (fig. 8.24). La variable aléatoire Y est liée à X par la relation $Y = 1 - X^2$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable Y.

Solution. La densité $f(x)$ est donnée par la fonction $f(x) = 0{,}5(x + 1)$ pour $x \in (-1, +1)$. La fonction $y = 1 - x^2$ dans cet intervalle est non monotone ; la fonction inverse possède deux valeurs $x_1 = -\sqrt{1 - y}$; $x_2 = +\sqrt{1 - y}$. On en tire

$$g(y) = (4\sqrt{1-y})^{-1}[(1 - \sqrt{1-y}) + (1 + \sqrt{1-y})]$$

ou

$$g(y) = (2\sqrt{1-y})^{-1} \text{ pour } 0 < y < 1.$$

8.25. Une variable aléatoire X a pour densité $f(x)$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable aléatoire inverse $Y = 1/X$.

Solution. La fonction $y = 1/x$, bien que non monotone dans le sens courant du mot (avec $x = 0$ elle croît en saut de $-\infty$ à $+\infty$), sa fonction inverse est univoque; donc, le problème peut se résoudre de la façon par laquelle on la résout pour les fonctions monotones:

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2},$$

pour les valeurs de y qui peuvent être inverses à l'ensemble donné des valeurs possibles de x.

8.26. *Loi de répartition normale logarithmique.* Le logarithme naturel (népérien) d'une certaine variable aléatoire X est réparti suivant la loi normale de centre de dispersion m et d'écart quadratique moyen σ. Trouver la densité de répartition de la variable X.

Solution. Désignons par U la variable à répartition normale. On a

$$U = \ln X; \quad X = e^U; \quad f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

La fonction e^u est monotone

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{pour } x > 0.$$

Cette répartition de la variable X s'appelle loi *log-normale.*

8.27. Le spot S figuratif de l'objet sur l'écran circulaire d'un radar, peut prendre sur l'écran une position arbitraire (fig. 8.27), la densité de répartition des coordonnées (X, Y) du spot dans les limites de l'écran étant constante. Le rayon de l'écran est r_0. Trouver la densité de répartition de la distance R du spot au centre de l'écran.

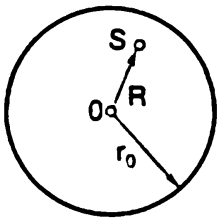


Fig. 8.27

Solution. Cherchons la fonction de répartition $G(r) = \mathrm{P}\{R < r\} = \mathrm{P}\{(X, Y) \in K_r\}$, où K_r est le cercle de rayon r de centre en O. Etant donné que dans les limites de l'écran la densité de répartition est constante, la probabilité de tomber dans le cercle est égale à sa surface relative:

$$G(r) = (\pi r^2)/(\pi r_0^2) = (r/r_0)^2,$$

d'où

$$g(r) = G'(r) = 2r/r_0^2 \quad \text{pour } 0 < r < r_0.$$

8.28. La variable aléatoire X est répartie uniformément dans l'intervalle $(0; 1)$. La variable aléatoire Y est liée à X par la relation fonctionnelle à croissance monotone $Y = \varphi(X)$. Trouver la fonction de répartition $G(y)$ et la densité $g(y)$ de la variable aléatoire Y.

Solution. On a $f(x) = 1$ pour $x \in (0; 1)$. Désignons par $\psi(y)$ la fonction inverse de la fonction $y = \varphi(x)$. Etant donné que $\varphi(x)$ est monotone croissante, $g(y) = f(\psi(y))\psi'(y) = \psi'(y)$, d'où $G(y) = \psi(y)$, c'est-à-dire que la fonction de répartition cherchée est inverse de la fonction φ (dans le domaine des valeurs possibles de la variable Y).

8.29. Quelle transformation fonctionnelle doit subir une variable aléatoire X répartie uniformément dans l'intervalle $(0; 1)$ pour obtenir la variable aléatoire Y à loi de répartition exponentielle $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ $(y > 0)$?

Solution. En vertu de la résolution du problème précédent nous devons poser $Y = G^{-1}(x)$, où G^{-1} est la fonction inverse de la fonction de répartition imposée $G(y)$ de la variable aléatoire Y. On a

$$G(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda y}\, dy = 1 - e^{-\lambda y} \quad (y > 0).$$

En posant $1 - e^{-\lambda y} = x$ et en résolvant cette expression par rapport à y, on obtient la fonction inverse $y = (\lambda)^{-1} \ln(1 - x)$; on en tire la relation cherchée:

$$Y = -(\lambda)^{-1} \ln(1 - X) \quad (0 < X < 1).$$

8.30. La répartition d'une variable aléatoire X obéit à la loi exponentielle $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. Par quelle transformation fonctionnelle peut-on la convertir en une variable aléatoire Y répartie d'après la loi de Cauchy: $f_2(y) = [\pi(1 + y^2)]^{-1}$.

Solution.

$$F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0); \quad F_2(y) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right].$$

En posant $\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right] = u$ et en résolvant cette fonction par rapport à y, on trouve la fonction inverse $F_2^{-1}(u)$:

$$y = F_2^{-1}(u) = \operatorname{tg}(\pi u - \pi/2) = -\operatorname{cotg} \pi u.$$

D'après la solution du problème précédent, on obtient

$$Y = F_2^{-1}(F_1(X)) = -\operatorname{cotg} \pi(1 - e^{-\lambda X}) = \operatorname{cotg} \pi e^{-\lambda X} \quad (X > 0).$$

8.31. Deux personnes se sont entendues de se retrouver en un endroit défini dans l'intervalle de temps entre 12 et 13 heures. Chacune arrive au rendez-vous en un instant quelconque de l'intervalle im-

posé indépendamment de l'autre et avec une densité de probabilité constante. Celui qui vient le premier attend l'autre. Trouver la répartition des probabilités du temps d'attente et la probabilité pour que l'attente ne dure pas moins d'une demi-heure.

Solution. Désignons les instants d'arrivée des deux personnes par T_1 et T_2; retenons pour l'origine du temps 12 h. Chacune des variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 est alors répartie avec une densité constante dans l'intervalle (0; 1). La variable aléatoire T est le temps d'attente: $T = | T_1 - T_2 |$.

Cherchons la fonction de répartition $G(t)$ de cette variable. Dégageons sur le plan t_1Ot_2 le domaine $D(t)$, où $| t_1 - t_2 | < t$ (domaine hachuré de la figure 8.31). Dans le cas considéré, la fonction de répartition $G(t)$ est égale à l'aire de ce domaine: $G(t) = 1 - (1 - t)^2 = t(2 - t)$, d'où $g(t) = 2(1 - t)$ avec $0 < t < 1$.

$$P\{T > 1/2\} = 1 - G(1/2) = 0{,}25.$$

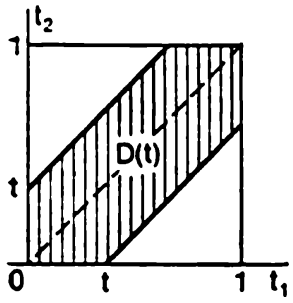
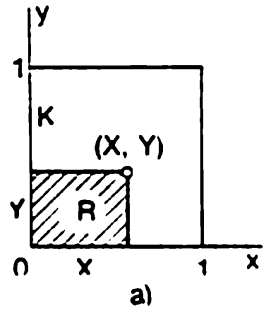


Fig. 8.31



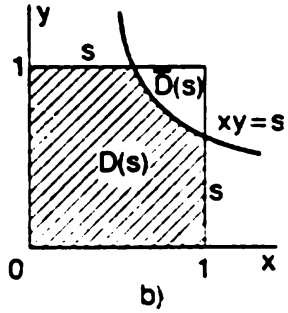


Fig. 8.32

8.32. Un point aléatoire (X, Y) est réparti uniformément dans le carré K de côté 1 (fig. 8.32, *a*). Trouver la loi de répartition de l'aire S du rectangle R de côtés X, Y.

Solution. Isolons sur le plan xOy la région $D(s)$ telle que dans ses limites $xy < s$ (fig. 8.32, *b*). Dans notre cas la fonction de répartition est égale à l'aire de la région $D(s)$

$$G(s) = 1 - \iint\limits_{D(s)} dx\,dy = 1 - \int_s^1 dx \int_{s/x}^1 dy = s(1 - \ln s).$$

On en tire $g(s) = G'(s) = -\ln s$ pour $0 < s < 1$.

8.33. Une variable aléatoire X suit la loi de répartition normale de paramètres $m = 0$, σ. Trouver la loi de répartition de la variable inverse $Y = 1/X$.

Solution. $y = \varphi(x) = 1/x$; la fonction inverse est univoque: $x = 1/y$. En vertu de la règle générale

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2y^2\sigma^2}\right\} \frac{1}{y^2} \text{ ou } g(y) = \frac{1}{\sigma y^2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2y^2\sigma^2}\right\}.$$

Avec $y = 0$ la densité $g(y)$ présente une discontinuité de seconde espèce (voir figure 8.33).

Il est curieux de noter que la variable aléatoire Y ne possède pas d'espérance mathématique: l'intégrale correspondante est divergente.

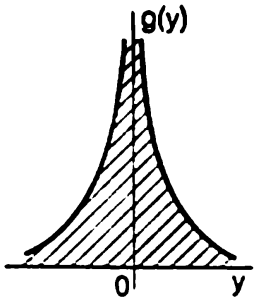


Fig. 8.33

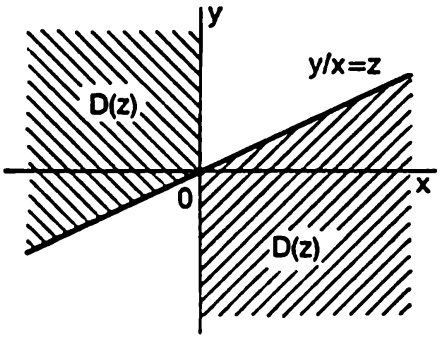


Fig. 8.34

8.34. Un système de variables aléatoires (X, Y) possède une densité commune $f(x, y)$. Trouver la densité $g(z)$ de leur rapport $Z = Y/X$.

Solution. Donnons-nous une certaine valeur de z et construisons sur le plan xOy le domaine $D(z)$, où $\frac{y}{x} < z$ (domaine hachuré sur la figure 8.34). La fonction de répartition

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{zx}^{\infty} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{zx} f(x, y)\,dy.$$

En dérivant par rapport à z, on a

$$g(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} xf(x, zx)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} xf(x, zx)\,dx.$$

Si les variables aléatoires X, Y sont indépendantes, il vient

$$g(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} xf_1(x) f_2(zx)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} xf_1(x) f_2(zx)\,dx.$$

8.35. Trouver la loi de répartition du rapport $Z = Y/X$ de deux variables aléatoires indépendantes X, Y à loi de répartition normale de caractéristiques $m_x = m_y = 0$; σ_x, σ_y.

Solution. Examinons d'abord le cas particulier $\sigma_x = \sigma_y = 1$. En vertu du problème précédent

$$y(z) = -\int_{-\infty}^{0} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2x^2)} dx + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2x^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} x\, dx = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \text{ (loi de Cauchy).}$$

Dans le cas général, le rapport $Z = X/Y$ peut s'écrire $Z = (Y_1\sigma_y)/(X_1\sigma_x)$, où les variables $X_1 = X/\sigma_x$ et $Y_1 = Y/\sigma_y$ ont déjà des répartitions normales à variance égale à l'unité; donc

$$g(z) = \frac{1}{\pi\,[1+(\sigma_x z)^2\sigma_y^{-2}]} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

En particulier, si $\sigma_x = \sigma_y$,

$$g(z) = [\pi(1+z^2)]^{-1}.$$

8.36. Un point aléatoire (X, Y) est réparti uniformément dans le cercle K de rayon 1. Trouver la loi de répartition de la variable aléatoire $Z = Y/X$.

Solution. Dans le cas considéré, $G(z)$ est l'aire relative du domaine $D(z)$ (fig. 8.36).

$$G(z) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où $g(z) = G'(z) = [\pi(1+z^2)]^{-1}$ (loi de Cauchy).

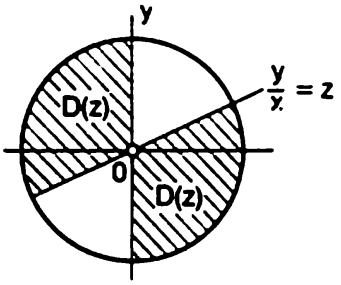


Fig. 8.36

8.37. *Loi d'Erlang d'ordre deux.* Etablir la composition de deux lois exponentielles de paramètre λ, c'est-à-dire trouver la loi de répartition de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de densités

$$f_1(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1}\ (x_1 > 0); \quad f_2(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_2}\ (x_2 > 0).$$

Solution. D'après la formule générale (8.0.5) de la composition des lois de répartition, on a

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(z - x_1)\, dx_1.$$

Les fonctions f_1 et f_2 étant nulles pour les valeurs négatives des arguments, l'intégrale se met sous la forme

$$g(z) = \int_0^z f_1(x_1) f_2(z - x_1)\, dx_1 = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(z - x_1)}\, dx_1 =$$

$$= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad (z > 0). \quad (8.37)$$

La loi de densité (8.37) s'appelle *loi d'Erlang d'ordre deux*. Voici les conditions de son apparition. Soit sur l'axe Ot un flux d'événements simple de densité λ et dans ce flux n'est conservé que chaque 2-ième point (événement), alors que les points intermédiaires sont rejetés. L'intervalle entre les événements voisins d'un flux raréfié de cette façon constitue la loi d'Erlang d'ordre deux.

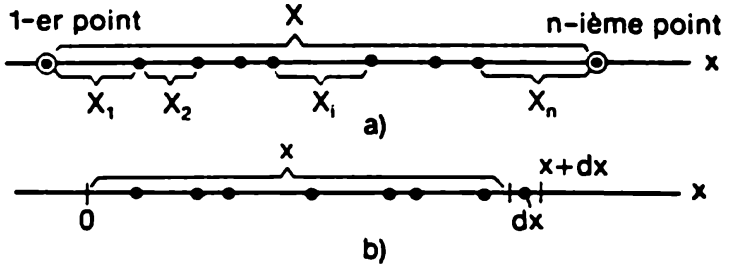


Fig. 8.38

8.38. *Loi d'Erlang d'ordre n.* Etablir la composition de n lois exponentielles de paramètre λ, c'est-à-dire la loi de répartition de la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à répartition exponentielle de paramètre λ.

Solution. On pourrait résoudre ce problème en cherchant consécutivement la composition de deux (voir problème 8.37), de trois, etc., lois, mais il est plus simple de le résoudre à partir d'un flux d'événements simple, en conservant dans ce dernier chaque n-ième point et en rejetant les points intermédiaires (fig. 8.38, *a*). $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est une variable aléatoire à répartition exponentielle. Cherchons la densité $f_n(x)$ de la variable aléatoire X ; calculons d'abord l'élément de probabilité $f_n(x)\, dx$. Ceci est la probabilité pour que la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle élémentaire $(x, x + dx)$. A cet effet il faut que dans l'intervalle x (fig. 8.38, *b*) tombent exactement $n - 1$ événements, et dans l'intervalle dx, un seul événement ; la probabilité de ce fait est égale à $f_n(x)\, dx = P_{n-1} \lambda dx$, où P_{n-1} est la probabilité pour que dans l'intervalle x tombent $n - 1$ événements. Mais le nombre d'événements d'un flux

simple qui tombent dans l'intervalle x est réparti d'après la loi de Poisson de paramètre $a = \lambda x$, d'où

$$f_n(x)\,dx = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda x}\,dx;$$

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} \quad (x > 0). \tag{8.38.1}$$

La loi de répartition de densité (8.38.1) s'appelle *loi d'Erlang d'ordre n.*

On pourrait calculer la fonction de répartition $G_n(x)$ de la loi d'Erlang d'ordre n en intégrant (8.38.1) de 0 à x, mais il est plus simple de déduire son expression en appliquant toujours le flux simple :

$$G_n(x) = \mathrm{P}\{X < x\} = 1 - \mathrm{P}\{X > x\}.$$

Pour réaliser l'événement $\{X > x\}$ il faut que dans l'intervalle x tombent pas plus de $n-1$ événements, c'est-à-dire 0, 1, 2, ..., $n-1$ événements ; on en tire

$$G_n(x) = 1 - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^m}{m!}e^{-\lambda x} \quad (x > 0). \tag{8.38.2}$$

L'expression (8.38.2) peut être ramenée à la fonction tabulée $R(m, a)$ (voir annexe 2) :

$$G_n(x) = 1 - R(n-1, \lambda x).$$

8.39. *Loi d'Erlang généralisée.* Etablir la composition de deux lois exponentielles de paramètres différents

$$f_1(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \quad (x_1 > 0); \quad f_2(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \quad (x_2 > 0).$$

Solution. Désignons par $X = X_1 + X_2$, où X_1, X_2 sont répartis d'après les lois $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$.

En vertu de la formule générale de la composition des lois de répartition

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\,f_2(x - x_1)\,dx_1.$$

Mais dans notre cas les deux lois ne sont différentes de zéro que pour une valeur positive de l'argument ; donc $f_1(x_1) = 0$ avec $x_1 < 0$ et $f_2(x - x_1) = 0$ avec $x_1 > x$. Pour $x > 0$

$$g(x) = \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2(x-x_1)}\,dx_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} - 1\right] =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2\left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (x > 0)$$

(loi d'Erlang d'ordre deux généralisée). Avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, en levant l'indétermination, on obtient la loi d'Erlang d'ordre deux

$$g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Note. On peut démontrer par induction mathématique que la loi de répartition de la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ vérifiant les lois de répartition exponentielles de différents paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, c'est-à-dire la loi d'Erlang d'ordre n généralisée, a pour densité

$$g_n(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod\limits_{k \neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)} \quad (x > 0).$$

(L'écriture $\prod\limits_{k \neq j}^{n}$ signifie qu'on prend le produit de tous les binômes de la forme $\lambda_j - \lambda_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, c'est-à-dire sauf $\lambda_j - \lambda_j$). Dans le cas particulier où $\lambda_i = i\lambda$,

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} C_n^j \lambda_j e^{-\lambda_j x}.$$

La fonction de répartition de la loi d'Erlang d'ordre n généralisée est de la forme

$$G_n(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - e^{-\lambda_j x}}{\lambda_j \prod\limits_{k \neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)} \quad (x > 0).$$

Si $\lambda_i = i\lambda$, il vient

$$G_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} C_n^j [1 - e^{-j\lambda x}] \quad (x > 0).$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ on obtient la loi d'Erlang d'ordre n

$$g_n(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} = \lambda P(n-1, \lambda x) \quad (x > 0);$$

$$G_n(x) = \int_0^x \lambda P(n-1, \lambda x)\, dx = 1 - \int_x^\infty \lambda P(n-1, \lambda x)\, dx =$$
$$= 1 - R(n-1, \lambda x) \quad (x > 0),$$

où

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \quad R(m, a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad \text{(Annexes 1, 2)}$$

8.40. *Loi de répartition de la plus grande des deux variables aléatoires.* Soient deux variables aléatoires X, Y à densité commune $f(x, y)$. Trouver la fonction de répartition $G(z)$ et la densité de probabilité $g(z)$ de la plus grande des deux variables $Z = \max\{X, Y\}$.

Solution. Cherchons la fonction de répartition de la variable aléatoire Z: $G(z) = \mathrm{P}\{Z < z\}$. Pour que la plus grande des variables X, Y soit inférieure à z, il faut que le soit chacune d'elles

$$G(z) = \mathrm{P}\{X < z,\ Y < z\} = F(z, z),$$

où

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

De la sorte,

$$G(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Pour trouver la densité $g(z)$ dérivons $G(z)$ par rapport à la variable z figurant dans les limites de l'intégrale double. Nous la dérivons comme une fonction complexe de deux variables z_1 et z_2, dont chacune dépend de z ($z_1 = z$; $z_2 = z$).

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left\{\int_{-\infty}^{z_1}\left[\int_{-\infty}^{z_2} f(x, y)\, dy\right] dx\right\} = \frac{\partial G(z)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dz} +$$

$$+ \frac{\partial G(z)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dz} = \int_{-\infty}^{z} f(z, y)\, dy + \int_{-\infty}^{z} f(x, z)\, dz.$$

Dans le cas particulier où les variables X, Y sont indépendantes, $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, et on a

$$g(z) = f_1(z) \int_{-\infty}^{z} f_2(y)\, dy + f_2(z) \int_{-\infty}^{z} f_1(x)\, dx,$$

ou sous une forme plus compacte

$$g(z) = f_1(z) F_2(z) + f_2(z) F_1(z).$$

Si les variables aléatoires sont indépendantes et ont la même répartition, alors $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ et $g(z) = 2f(z) F(z)$.

8.41. *Loi de répartition de la plus petite des deux variables aléatoires.* Un système de deux variables aléatoires a une densité commune $f(x, y)$. Trouver la fonction de répartition $G(u)$ et la densité de probabilité $g(u)$ de la plus petite des variables: $U = \min\{X, Y\}$.

Solution. Cherchons le complément à l'unité de la fonction de répartition

$$1 - G(u) = \mathrm{P}(U > u) = \mathrm{P}\{X > u, Y > u\}.$$

Ceci est la probabilité pour que le point aléatoire (X, Y) tombe dans le domaine $D(u)$ hachuré sur la figure 8.41. Il est clair que $1 - G(u) = 1 - F(u, \infty) - F(\infty, u) + F(u, u)$, d'où $G(u) = F(u, \infty) + F(\infty, u) - F(u, u) = F_1(u) + F_2(u) - F(u, u)$. En dérivant par rapport à u, on a (voir problème 8.40)

$$g(u) = f_1(u) + f_2(u) - \int_{-\infty}^{u} f(u, y)\,dy - \int_{-\infty}^{u} f(x, u)\,dx.$$

Dans le cas où les variables X et Y sont indépendantes

$$g(u) = f_1(u)\,[1 - F_2(u)] + f_2(u)\,[1 - F_1(u)].$$

Si les variables X et Y sont indépendantes et ont la même répartition, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ et $g(u) = 2f(u)\,[1 - F(u)]$.

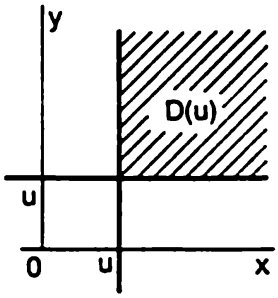


Fig. 8.41

8.42. *Loi de répartition de la plus grande et de la plus petite de plusieurs variables aléatoires.* Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, réparties suivant les lois de densités $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Trouver la densité de probabilité de celle d'entre elles qui est maximale $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ et de celle qui est minimale $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, c'est-à-dire de celles des variables aléatoires qui à la suite de l'épreuve prennent les valeurs maximale et minimale.

Solution. Désignons par $G_z(z)$ la fonction de répartition de la variable Z. On a

$$G_z(z) = \mathrm{P}\{Z < z\} = \prod_{i=1}^{n} F_i(z),$$

où

$$F_i(z) = \int_{-\infty}^{z} f_i(x_i)\,dx_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient par dérivation la somme des produits des dérivées des fonctions de répartition isolées $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)$ par les produits de toutes les autres fonctions, sauf celle qui a été dérivée. Le résultat peut s'écrire

$$g_z(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z)}{F_j(z)} \prod_{i=1}^{n} F_i(z).$$

D'une façon analogue, en désignant par $G_u(u)$ la fonction de répartition de la variable U, on obtient

$$G_u(u) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(u)].$$

On trouve par dérivation

$$g_u(u) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f_j(u)}{1 - F_j(u)} \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(u)].$$

8.43. Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ réparties avec la même densité $f(x)$. Trouver la loi de répartition de celle d'entre elles qui est maximale $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ et de celle qui est minimale $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Solution. En vertu de la solution du problème précédent

$$G_z(z) = (F(z))^n; \quad g_z(z) = n(F(z))^{n-1} f(z);$$

$$G_u(u) = 1 - [1 - F(u)]^n; \quad g_u(u) = n[1 - F(u)]^{n-1} f(u).$$

8.44. On tire trois coups indépendants sur le plan xOy; le centre de dispersion coïncide avec l'origine des coordonnées, la dispersion est normale circulaire, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Des trois points atteints on choisit celui qui est le plus proche du centre de dispersion. Trouver la densité de probabilité $g(r)$ de la distance R du point frappé le plus proche du centre.

Solution. Soit $R = \min\{R_1, R_2, R_3\}$. D'après la solution du problème précédent $g(r) = 3[1 - F(r)]^2 f(r)$, où $F(r)$, $f(r)$ sont la fonction de répartition et la densité de probabilité de la distance R du point d'impact d'un coup quelconque au centre de dispersion:

$$F(r) = 1 - \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}; \quad f(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (r > 0).$$

On en tire

$$g(r) = \frac{3r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{3r^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (r > 0),$$

c'est-à-dire que la densité de probabilité de la distance du plus proche des trois points au centre de dispersion est de la même forme que pour chacun d'entre eux, mais sous la condition que le paramètre σ est diminué de $\sqrt{3}$ fois, sa valeur étant $\sigma' = \sigma/\sqrt{3}$.

8.45. Trouver la loi de répartition $g_u(u)$ de la plus petite des deux variables aléatoires T_1, T_2 réparties d'après les lois exponentielles

$$f_1(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \quad (t_1 > 0); \quad f_2(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} \quad (t_2 > 0).$$

Solution. En partant de la solution du problème 8.42

$$g_u(u) = f_1(u)[1 - F_2(u)] + f_2(u)[1 - F_1(u)] =$$
$$= \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} e^{-\lambda_2 u} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} e^{-\lambda_1 u} = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)u},$$

c'est-à-dire que la loi de répartition de la plus petite de deux variables aléatoires indépendantes réparties suivant des lois exponentielles est encore une loi exponentielle dont le paramètre est égal à la somme des paramètres des lois initiales.

Cette conclusion peut s'obtenir d'une façon bien plus simple en recourant à la notion de flux d'événements. Soit sur l'axe Ot_1 un flux d'événements simple de densité λ_1, sur l'axe Ot_2, un flux simple de densité λ_2. Ramenons ces deux flux à un seul sur l'axe Ot ou comme on dit, réalisons la « superposition » de ces flux. On établit sans peine que le résultat de la superposition de deux flux simples sera également un flux simple (les propriétés de stationnarité, d'ordinarité et d'absence de postaction se conservent). La densité du flux réuni est égale à $\lambda_1 + \lambda_2$. La loi de répartition de la distance du point donné à l'événement le plus proche du flux est une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

On conçoit que ceci est aussi vrai pour la loi de répartition de la plus petite d'un nombre n quelconque de variables aléatoires indépendantes à lois de répartition exponentielles de paramètres λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$; ce sera une loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

8.46. Dans l'énoncé du problème précédent trouver la loi de répartition $g_z(z)$ de la plus grande des variables $T_1 T_2$.

Solution.

$$g_z(z) = f_1(z) F_2(z) + f_2(z) F_1(z) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z}[1 - e^{-\lambda_2 z}] +$$
$$+ \lambda_2 e^{-\lambda_2 z}[1 - e^{-\lambda_1 z}] = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z} \quad (z > 0).$$

Cette loi n'est pas exponentielle. Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$g_z(z) = 2\lambda e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda z}) \quad (z > 0).$$

8.47*. On soumet à n épreuves indépendantes la variable aléatoire X de densité $f(x)$; les valeurs observées se rangent dans l'ordre croissant ; on obtient une série de variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots$ $\ldots, Z_k, \ldots, Z_n$. On considère la k-ième variable Z_k d'entre elles. Trouver la fonction de répartition $G_k(z)$ et sa densité $g_k(z)$.

Solution. $G_k(z) = \mathrm{P}\{Z_k < z\}$. Pour que la k-ième (dans l'ordre de croissance) des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_n$ soit inférieure à z il faut qu'au moins k d'entre elles le soient :

$$G_k(z) = \sum_{m=k}^{n} P_m,$$

où P_m est la probabilité pour qu'exactement m des valeurs de la variable X observées dans les n épreuves soient inférieures à z. D'après le théorème des épreuves répétées

$$P_m = C_n^m [F(z)]^m [1 - F(z)]^{n-m}.$$

On en tire

$$G_k(z) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m [F(z)]^m [1 - F(z)]^{n-m},$$

où $F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx$.

La densité $g_k(z)$ peut s'obtenir en dérivant cette expression et compte tenu que

$$C_n^m m = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} = nC_{n-1}^{m-1}, \quad C_n^m (n-m) = nC_{n-1}^m \quad (m < n).$$

Après des transformations bien simples, on obtient

$$g_k(z) = nC_{n-1}^{k-1} f(z) [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k}.$$

Toutefois, il est beaucoup plus facile d'obtenir $g_k(z)$ directement, en raisonnant de la façon suivante. L'élément de probabilité $g_k(z)\,dz$ est la probabilité approchée pour la variable aléatoire Z_k (la k-ième valeur dans l'ordre de croissance de la variable aléatoire X) de tomber dans l'intervalle $(z, z + dz)$. Ceci peut se produire si les événements suivants coïncident:

1) une des valeurs de la variable aléatoire X tombe dans l'intervalle $(z, z + dz)$;

2) $(k - 1)$ autres valeurs quelconques s'avèrent inférieures à z;

3) $(n - k)$ valeurs restantes sont supérieures à z [nous négligeons la probabilité pour que plus d'une valeur tombe dans l'intervalle élémentaire $(z, z + dz)$].

La probabilité de chacune de ces combinaisons d'événements est $f(z)\,dz\,[F(z)]^{k-1}[1 - F(z)]^{n-k}$. Le nombre de combinaisons est égal au produit du nombre n de procédés par lesquels on peut choisir une valeur des n, pour la placer dans l'intervalle $(z, z + dz)$, par le nombre C_{n-1}^{k-1} de procédés par lesquels parmi les $n - 1$ valeurs restantes on peut choisir $k - 1$ valeurs, pour les placer à gauche de z. Par conséquent

$$g_k(z)\,dz = nC_{n-1}^{k-1} f(z) [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k}\,dz,$$

d'où

$$g_k(z) = nC_{n-1}^{k-1} f(z) [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k}.$$

8.48. Quatre régulateurs (thermo-couples) sont montés dans un four électrique pour indiquer la température chacun avec une certaine erreur répartie d'après la loi normale à espérance mathématique nulle et à écart quadratique moyen σ_t. Lorsque le four est chauffé à l'instant où deux des quatre thermo-couples montrent une température non inférieure à la valeur critique τ_0, le chauffage

est débranché automatiquement. Trouver la densité de probabilité de la température Z qui détermine le débranchement du chauffage.

Solution. La température Z qui détermine le débranchement du four est la deuxième dans l'ordre de décroissance (c'est-à-dire troisième dans l'ordre croissant) des quatre valeurs de la variable aléatoire T répartie d'après la loi normale de centre de dispersion τ_0 et d'écart quadratique moyen σ_t :

$$f(t)=\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma_t^2}\right\}.$$

La fonction de répartition correspondante est

$$F(t)=\Phi\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_t}\right)+0{,}5.$$

En utilisant les résultats du problème précédent pour $n=4$, $k=3$ on obtient

$$g_3(t)=$$
$$=\frac{12}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma_t^2}\right\}\left[\Phi\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_t}\right)+0{,}5^2\right]^2\left[0{,}5-\Phi\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_t}\right)\right].$$

8.49. Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dont les fonctions de répartition ont la forme d'une relation exponentielle

$$F_i(x_i)=\begin{cases}0 & \text{pour } x_i\leqslant 0;\\ x_i^{k_i} & \text{pour } 0<x_i\leqslant 1 \quad (i=1,2,\ldots,n);\\ 1 & \text{pour } x_i>1.\end{cases}$$

où k_i est un nombre entier positif. On observe les valeurs de chaque variable aléatoire pour en choisir Z, qui est la plus grande. Trouver la fonction de répartition $G(z)$ de cette variable aléatoire.

Solution. Conformément à la solution du problème 8.42

$$G(z)=\prod_{i=1}^{i}F_i(z)=\prod_{i=1}^{n}z^{k_i}\quad\text{pour}\quad 0<z\leqslant 1,$$

ou, si l'on introduit la notation $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$,

$$G(z)=\begin{cases}0 & \text{pour } z\leqslant 0;\\ z^k & \text{pour } 0<z\leqslant 1;\\ 1 & \text{pour } z>1,\end{cases}$$

c'est-à-dire que le maximum de plusieurs variables aléatoires réparties d'après une loi exponentielle dans l'intervalle (0; 1) suit également une loi de répartition exponentielle à exposant égal à la somme des exposants des lois isolées.

8.50. Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et réparties d'après les lois de Poisson de paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Montrer que leur somme $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est également répartie d'après la loi de Poisson de paramètre $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Solution. Démontrons d'abord que la somme de deux variables aléatoires X_1 et X_2 est répartie suivant la loi de Poisson; à cet effet calculons la probabilité pour que $X_1 + X_2 = m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

$$P\{X_1 + X_2 = m\} = \sum_{k=0}^{m} P\{X_1 = k\} P\{X_2 = m - k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{a_1^k}{k!} e^{-a_1} \frac{a_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-a_2}.$$

Compte tenu que $C_m^k = \frac{m!}{(k!)(m-k)!}$, mettons cette expression sous la forme

$$\frac{e^{-(a_1+a_2)}}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k a_1^k a_2^{m-k} = \frac{(a_1+a_2)^m}{m!} e^{-(a_1+a_2)},$$

or, ceci est une répartition de Poisson de paramètre $a_1 + a_2$.

Ainsi, nous avons démontré que la somme de deux variables aléatoires indépendantes réparties d'après la loi de Poisson suit également une loi de répartition de Poisson. L'extension de ce résultat sur un nombre quelconque de termes se fait par induction.

8.51. Un système de variables aléatoires (X, Y) est réparti d'après la loi normale de caractéristiques m_x, m_y, σ_x, σ_y et z_{xy}. Les variables aléatoires (U, V) sont liées à (X, Y) par les relations $U = aX + bY + c$; $V = kX + lY + m$. Trouver la loi de répartition du système de variables aléatoires (U, V).

Réponse. Le système (U, V) obéit à la loi de répartition normale de caractéristiques :

$$m_u = am_x + bm_y + c; \quad m_v = km_x + lm_y + m;$$

$$\sigma_u = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_x\sigma_y r_{xy}};$$

$$\sigma_v = \sqrt{k^2\sigma_x^2 + l^2\sigma_y^2 + 2kl\sigma_x\sigma_y r_{xy}};$$

$$z_{uv} = \frac{ak\sigma_x^2 + bl\sigma_y^2 + (bk + al)\sigma_x\sigma_y r_{xy}}{\sigma_u\sigma_v}.$$

8.52. Etablir la composition de deux lois de répartition binomiales de paramètres (n, p) et (k, p).

Solution. Soit X le nombre d'apparitions de l'événement A dans n épreuves indépendantes dans chacune desquelles il se produit avec une probabilité p; X possède une répartition binomiale de paramètres (n, p). D'une façon analogue, Y est le nombre d'apparitions de l'événement A dans k épreuves indépendantes réalisées dans les mêmes conditions; sa loi de répartition est binomiale de paramètres (k, p). $Z = X + Y$ est le nombre d'apparitions de l'événement A dans la série de $n + k$ épreuves avec la probabilité p pour l'événement A d'apparaître dans chaque épreuve; la variable z possède également une répartition binomiale de paramètres $(n + k, p)$.

Notons que si dans des séries différentes les probabilités p sont distinctes, la composition de deux lois binomiales amène une loi qui ne l'est déjà plus.

8.53. En utilisant l'inégalité de Tchébychev majorer la probabilité pour que la variable aléatoire X à espérance mathématique m et écart quadratique moyen σ s'écarte de m à moins de 3σ.

Solution. L'inégalité de Tchébychev (8.0.18) implique

$$P\{|X-m| \geqslant 3\sigma\} \leqslant \frac{D\,|X|}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9};$$

$$P\{|X-m| < 3\sigma\} \geqslant \frac{8}{9}.$$

Ainsi, *toute variable aléatoire s'écarte de son espérance mathématique à moins de* 3σ *avec une probabilité non inférieure* à 8/9 *).

8.54. On réalise un grand nombre n d'épreuves indépendantes dans chacune desquelles la variable aléatoire X est répartie uniformément dans l'intervalle (1; 2). On considère la moyenne arithmétique des valeurs observées de la variable aléatoire $X: Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Sur la base de la loi des grands nombres établir de quel nombre a s'approche (converge en probabilité) la variable Y avec $n \to \infty$. Evaluer l'erreur maximale pratiquement possible de l'égalité $Y \approx a$.

Solution.

$$a = M[Y[= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i[= \frac{1}{n}\cdot n\cdot 1{,}5 = 1{,}5;$$

$$D[Y] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{n}{n^2}\frac{1}{12} = \frac{1}{12n}; \quad \sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \frac{1}{2\sqrt{3n}}.$$

*) C'est le cas extrême, le plus défavorable. Dans la pratique, pour les variables aléatoires qui se présentent dans les cas courants cette probabilité est bien plus proche de l'unité; par exemple, pour la loi normale elle est égale à 0,997; pour la loi de répartition uniforme, à l'unité; pour la répartition exponentielle, à 0,982.

La valeur maximale pratiquement possible de l'erreur est $3\sigma_y$.

8.55. On considère la suite de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$ à répartition uniforme dans les intervalles $(0;1)$, $(0;2)$, $\ldots$ $\ldots$, $(0;n)$ respectivement. Comment se comporte leur moyenne arithmétique $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ avec la croissance de n?

Solution. Pour n donné

$$M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{4}.$$

Pour $n \to \infty$ cette variable croît indéfiniment, la stabilité de la moyenne n'est pas observée.

8.56. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont réparties uniformément dans les intervalles $(-1;1)$, $(-2;2)$, $\ldots$, $(-n, n)$. Avec l'augmentation de n la moyenne arithmétique $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ des variables aléatoires X_i converge-t-elle en probabilité vers zéro?

Solution. $M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = 0$, mais la variable Y ne converge pas en probabilité vers zéro, les conditions du théorème de Markov étant violées; les variances des variables aléatoires X_i ne sont pas bornées par le même nombre L, mais avec l'augmentation de n croissent indéfiniment.

8.57. Un ordinateur élabore des nombres binaires aléatoires de façon que, en chaque position, les nombres 0 et 1 apparaissent avec la même probabilité et indépendamment des autres positions. La suite des chiffres forme des groupes constitués de mêmes chiffres, par exemple 000 111 0 1 00 1111 00 11 0000 1 0 . . . On calcule le nombre de chiffres de chaque groupe pour le diviser par le nombre de groupes. Comment se comporte cette moyenne avec l'augmentation illimitée du nombre de groupes n?

Solution. La variable aléatoire X_i, nombre de chiffres dans l'i-ième groupe, possède une répartition géométrique qui commence par l'unité (voir chapitre 4). $M[X_i] = 1/p = 2$; $D[X_i] = q/p^2 = 0{,}5/0{,}5^2 = 2$.

Si $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, il vient

$$M[Y_n] = \frac{1}{n}\,n2 = 2; \quad D[Y_n] = \frac{1}{n^2}\,n2 = \frac{2}{n}; \quad \sigma_{y_n} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

En vertu de la loi des grands nombres la variable Y_n avec $n \to \infty$ converge en probabilité vers $M[Y_n] = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - 2| < \varepsilon\} = 1$. L'erreur de l'égalité approchée $Y_n \approx 2$ (d'après la règle des trois sigma) ne dépasse pas $3\sqrt{2/n}$.

8.58. L'atelier d'une usine produit des billes de roulements. Par équipe on fabrique $n = 10\,000$ billes. La probabilité pour qu'une bille soit défectueuse est égale à 0,05. Pour des billes isolées les causes des défauts sont indépendantes. Les billes sont soumises au contrôle dès la fabrication, les billes défectueuses étant rebutées et versées dans une trémie, alors que les bonnes sont dirigées vers l'atelier de montage. Calculer pour quelle quantité de billes faut-il prévoir une trémie pour qu'après l'équipe elle ne soit pas débordée avec une probabilité 0,99.

Solution. La répartition du nombre X de billes rebutées obéit à la loi binomiale; n étant grand, en vertu du théorème limite de Laplace on peut admettre que la répartition est à peu près normale, de caractéristiques $m_x = np = 10\,000 \cdot 0{,}05 = 500$; $D_x = npq = 500 \cdot 0{,}95 = 475$; $\sigma_x \approx 21{,}8$.

Cherchons une valeur de l telle que $P\{X < l\} = 0{,}99$ ou

$$\Phi\left(\frac{l - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = \Phi\left(\frac{l - 500}{21{,}8}\right) + 0{,}5 = 0{,}99.$$

D'après les tableaux de la fonction $\Phi(x)$ calculons $(l - 500)/21{,}8 \approx 2{,}33$, d'où $l \approx 551$, c'est-à-dire qu'après une équipe la trémie prévue à peu près pour 550 billes ne sera pas débordée avec une probabilité 0,99.

8.59. Une queue devant une caisse se compose de 60 personnes. La paye de chacune d'elles est aléatoire. Sa valeur moyenne $m_x = 50$ roubles. L'écart quadratique moyen de la paye $\sigma_x = 20$ roubles. Les payes touchées par chaque salarié sont indépendantes. 1) Combien d'argent doit avoir la caisse à sa disposition pour assurer une probabilité de 0,95 de la paye de tous les 60 salariés; 2) quel est le reste, garanti avec la même probabilité 0,95, de l'argent après la rémunération de tous les salariés, si au début du payement il y avait dans la caisse 3500 roubles?

Solution. 1) La paye globale $Y = \sum\limits_{i=1}^{60} X_i$, où X_i est la paye au i-ième salarié. En vertu du théorème central limite pour les termes uniformément répartis, Y obéit à la loi de répartition à peu près normale de paramètres $m_y = 3000$ roubles, $\sigma_y = \sqrt{60} \cdot 20 \approx 154{,}8$ roubles. La réserve d'argent nécessaire l se calcule de la condition $\Phi[(l - m_y)/\sigma_y] + 0{,}5 = 0{,}95$. D'après les tables de la fonction de Laplace (annexe 5) $(l - m_y)\sigma_y \approx 1{,}65$; $l = m_y + 1{,}65\sigma_y \approx 3256$ roubles.

2) Le reste garanti b de l'argent s'obtient avec une probabilité 0,95 en retranchant de 3500 la somme l obtenue au point 1): $b = 3500 - 3256 = 244$ roubles.

8.60*. Une loterie est organisée de la façon suivante. Les billets vendus portent chacun un tableau avec des numéros 1, 2, . . ., 90. Le joueur doit choisir cinq numéros quelconques, les marquer et envoyer le billet aux organisateurs de la loterie qui gardent sous cachet tous les billets qui leur sont envoyés jusqu'au jour du tirage. Le tirage consiste à choisir de façon aléatoire, parmi les quatre-vingt-dix, cinq numéros qui sont ensuite communiqués aux participants. Si parmi les numéros barrés moins de deux correspondent aux numéros déclarés, le joueur ne reçoit rien. Si aux numéros déclarés correspondent deux numéros, il gagne 1 rouble; si ce sont trois numéros, il gagne 100 roubles; si ce sont quatre, 10 000 et si ce sont tous les cinq numéros, il gagne 1 000 000 de roubles. Calculer 1) la limite inférieure du prix d'un billet pour laquelle les organisateurs ne subiront pas de dommage; 2) le revenu moyen M que les organisateurs tireront de la loterie à laquelle participeront 1 000 000 de joueurs, en désignant leurs numéros indépendamment l'un de l'autre: chaque joueur achète un billet au prix de 30 kopecks; 3) appliquer la règle des trois sigma pour trouver les limites des gains possibles; peut-on admettre que le payement global assuré par la loterie suit approximativement la loi de répartition normale?

Solution. Désignons par p_i la probabilité pour que des cinq numéros désignés par le joueur exactement i numéros coïncident avec ceux qui ont été tirés. On trouve

$$p_2 = \frac{C_5^2 C_{85}^3}{C_{90}^5} \approx 2{,}25 \cdot 10^{-2}; \quad p_3 = \frac{C_5^3 C_{85}^2}{C_{90}^5} \approx 8{,}12 \cdot 10^{-4};$$

$$p_4 = \frac{C_5^4 C_{85}^1}{C_{90}^5} \approx 9{,}67 \cdot 10^{-6}; \quad p_5 = \frac{1}{C_{90}^5} \approx 2{,}28 \cdot 10^{-8}.$$

Le prix minimal d'un billet doit être égal à l'espérance mathématique du gain du joueur qui a acheté ce billet: $m = 2{,}25 \cdot 10^{-2} + 8{,}12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 + 9{,}67 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 + 2{,}28 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6 = 22{,}3 \cdot 10^{-2}$ roubles, c'est-à-dire que le prix minimal d'un billet est d'environ 23 copecks.

2) $M = (0{,}30 - 0{,}223) \cdot 10^6 = 77 \cdot 10^3$ roubles.

3) La somme globale des gains X qui doit être payée par la loterie est la somme des gains des joueurs isolés $X = \sum_{i=1}^{1000\,000} X_i$, où X_i est le gain de l'i-ième joueur.

On admet que les joueurs désignent leurs numéros indépendamment l'un de l'autre, de sorte que les variables X_i ($i = 1, 2, \ldots$

. . ., 1 000 000) sont indépendantes. On sait du théorème central limite que la somme d'un nombre assez grand de variables aléatoires indépendantes réparties uniformément obéit à peu près à la loi normale. Il faut établir si dans notre cas le nombre $n = 1\,000\,000$ de termes suffit pour que la variable X puisse être considérée comme répartie d'après la loi normale.

Calculons l'espérance mathématique m_x et l'écart quadratique moyen σ_x de la variable aléatoire X. Pour tout $i = 1, 2, \ldots$ . . ., 1 000 000 on obtient

$$m_{x_i} = 22{,}3 \cdot 10^{-2} = 0{,}223\,; \quad \alpha_2[X_i] = 2{,}25 \cdot 10^{-2} + 8{,}12 + 9{,}67 \cdot 10^2 +$$

$$+ 2{,}28 \cdot 10^4 \approx 2{,}38 \cdot 10^4\,; \quad D_{x_i} = 2{,}38 \cdot 10^4 - 0{,}22^2 \approx 2{,}38 \cdot 10^4.$$

D'où

$$m_x = 10^6 \cdot m_{x_i} = 2{,}23 \cdot 10^5\,; \quad D_x = 10^6 \cdot D_{x_i} = 2{,}38 \cdot 10^{10}\,;$$

$$\sigma_x = 10^5 \sqrt{2{,}38} \approx 1{,}54 \cdot 10^5.$$

Nous savons que pour une variable aléatoire X répartie d'après la loi normale les limites des valeurs pratiquement possibles sont comprises entre $m_x \pm 3\sigma_x$. Dans notre cas la limite inférieure des valeurs possibles de la variable aléatoire X, si elle était répartie suivant la loi normale, serait $m_x - 3\sigma_x = -2{,}39 \cdot 10^{+5}$. La valeur négative de cette limite témoigne du fait que la variable aléatoire X ne peut pas être considérée comme répartie normalement, puisqu'il n'existe pas de gains négatifs.

8.61*. Calculer la limite $\lim\limits_{a \to \infty} \sum\limits_{m=0}^{a} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, où a est un nombre entier positif.

Solution. L'expression $\sum\limits_{m=0}^{a} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ est la probabilité pour que la variable aléatoire X répartie d'après la loi de Poisson ne dépasse pas son espérance mathématique a. Mais avec la croissance illimitée du paramètre a la loi de Poisson s'approche de la loi normale. Pour la loi normale, la probabilité pour que la variable aléatoire ne dépasse pas son espérance mathématique est égale à 1/2; donc

$$\lim_{a \to \infty} \sum_{m=0}^{a} \frac{a^m}{m!} e^{-a} \frac{1}{2}.$$

8.62. Des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots$ ont une même répartition suivant la loi exponentielle de paramètre λ : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

On considère la somme du nombre aléatoire de variables $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, telles que la variable aléatoire Y ait une répartition géométrique qui commence par l'unité

$$P_n = \mathrm{P}\{Y = n\} = pq^{n-1} \quad (0 < p < 1; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques de la variable aléatoire Z.

Solution. La somme du nombre n fixé de variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n} X_i$ vérifie la loi d'Erlang d'ordre n (voir problème 8.38) de densité

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

La densité $\varphi(z)$ de la variable aléatoire Z se calcule d'après la formule de la probabilité totale à hypothèses $\{Y = n\}$:

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} pq^{n-1} =$$

$$= p\lambda e^{-\lambda z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q z)^k}{k!} = p\lambda e^{-\lambda z} e^{\lambda q z} = p\lambda e^{-\lambda p z} \quad (z > 0),$$

c'est-à-dire que la variable aléatoire Z vérifie également la loi exponentielle mais de paramètre λ_p. Par conséquent

$$m_z = 1/(\lambda p); \quad D_z = 1/(\lambda^2 p^2).$$

8.63. *Loi de répartition de la somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires.* On considère la somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, où $X_1, X_2, \ldots$ est une suite des variables aléatoires indépendantes réparties uniformément à densité $f(x)$; Y, une variable aléatoire positive à valeurs entières, qui ne dépend pas de X_i et dont la loi de répartition est $\mathrm{P}\{Y = n\} = P_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques de la variable aléatoire Z.

Solution. Supposons que la variable aléatoire Y ait pris la valeur n $(n = 1, 2, \ldots, N)$. La probabilité de ce fait est P_n. Sous cette hypothèse, $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Désignons la densité de probabilité de la somme n des variables aléatoires de même répartition $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par $f^{(n)}(x)$. Les densités $f^{(n)}(x)$ peuvent s'obtenir succes-

sivement : d'abord $f^{(2)}(x)$, composition de deux lois identiques $f(x)$ et $f(x)$, puis $f^{(3)}(x)$, composition de $f^{(2)}(x)$ et $f(x)$, etc.

D'après la formule des probabilités totales la densité $\varphi(z)$ de la variable aléatoire Z est

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(z) P_n. \tag{8.63}$$

Les caractéristiques numériques de la variable aléatoire Z sont calculées dans le problème 7.64 :

$$\mathrm{M}[Z] = m_x m_y; \quad \mathrm{D}[Z] = D_x m_y + m_x^2 D_y,$$

où m_x, m_y, D_x, D_y sont les espérances mathématiques et les variances des variables aléatoires X et Y.

Lorsque des conditions définies sont respectées, on peut admettre avec une précision suffisante pour la pratique que la variable aléatoire Z obéit à la loi normale de paramètres indiqués M [Z], D [Z]. Démontrons ce fait. Sans porter atteinte à la généralité posons pour simplifier $m_x = 0$. En vertu du théorème central limite, pour les termes de même répartition (voir section 8.0), on peut admettre approximativement que pour $n > m_y - 3\sigma_y > 20$ la densité $f^{(n)}(z)$ de la formule (8.63) présente une loi normale de paramètres $m^{(n)} = 0$; $D^{(n)} = nD_x$ [voir (5.0.33)] :

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n D_x}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2nD_x}\right\}.$$

La formule (8.63) exprime l'espérance mathématique de la fonction de l'argument aléatoire Y :

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(z) p_n = \mathrm{M}[f^{(Y)}(z)].$$

Pour les fonctions assez proches des fonctions linéaires dans le domaine des valeurs pratiquement possibles de l'argument aléatoire, on peut poser approximativement que l'espérance mathématique de la fonction est égale à la même fonction de l'espérance mathématique de l'argument aléatoire :

$$\mathrm{M}[f^{(Y)}(z)] \approx f^{(m_y)}(z) \quad \text{ou} \quad \varphi(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m_y D_x}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2m_y D_x}\right\},$$

ce qui est une loi normale. L'égalité approchée est d'autant plus exacte que la fonction $f^{(Y)}(z)$ de l'argument aléatoire Y dans le domaine de ses valeurs pratiques possibles $m_y \pm 3\sigma_y$ est plus proche de la fonction linéaire.

Les calculs montrent que cette fonction peut être considérée comme à peu près linéaire sous la condition que $m_y - 3\sigma_y > 20$. Par exemple, si la variable aléatoire Y est répartie d'après la loi de

Poisson de paramètre a [voir (4.0.26)], cette condition est observée pour $a > 40$; si c'est d'après la loi binomiale de paramètres n, p [voir (4.0.24)] (et de petit paramètre $p < 0{,}1$), alors $np > 40$. Notons que dans les deux cas la variable aléatoire Y (le nombre de termes aléatoires) respecte la loi normale approchée de paramètres $m_y = D_y = a$ pour la loi de Poisson, et $m_y = np$; $D_y = npq$ pour la loi binomiale.

8.64*. Des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont réparties suivant la même loi exponentielle de paramètre λ. La variable aléatoire $Y = U + 1$, où la variable aléatoire U est répartie d'après la loi de Poisson de paramètre a. Trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques de la variable aléatoire $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$.

Solution. La loi de répartition de la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une loi d'Erlang d'ordre n (voir problème 8.38) de paramètre λ;

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

D'après la formule des probabilités totales la densité de probabilité de la variable aléatoire Z est

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z a)^k}{(k!)^2} \quad \text{pour } z > 0.$$

Cette densité peut être exprimée à l'aide de la fonction cylindrique modifiée:

$$\varphi(z) = \lambda e^{-\lambda z - a} I_0(2\sqrt{\lambda z a}) \quad \text{pour } z > 0,$$

où

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Ensuite, en vertu de la solution du problème 8.66:

$$M[Z] = m_x m_y = (a+1)/\lambda;$$
$$D[Z] = D_x m_y + m_x^2 D_y = (a+1)/\lambda^2 + a/\lambda^2 = (2a+1)/\lambda^2.$$

8.65. On considère un système de variables aléatoires X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) lié à la variable aléatoire discrète Y de la façon suivante :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leqslant Y; \\ 0 & \text{si} \quad i > Y. \end{cases}$$

On connaît la fonction de répartition $F(y)$ de la variable aléatoire Y. Trouver la loi de répartition de chaque variable aléatoire X_i et les caractéristiques numériques du système de variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Solution. Le tableau de répartition de la variable aléatoire X_i est de la forme :

$$X_i : \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline P\{Y < i\} & P\{Y \geqslant i\} \end{array} \right|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puisque $P\{Y < i\} = F(i)$, le tableau de répartition s'écrit :

$$X_i : \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline F(i) & 1 - F(i) \end{array} \right|,$$

d'où $m_{x_i} = 1 - F(i)$; $D_{x_i} = F(i)[1 - F(i)]$.

Cherchons les covariances des variables aléatoires X_i et X_j et calculons à cet effet $M[X_i X_j]$. Le produit $X_i X_j$ pour $i < j$ peut prendre seulement deux valeurs : 1, si $X_j = 1$, et 0, si $X_j = 0$. Par conséquent, $M[X_i X_j] = m_{x_j} = 1 - F(j)$ $(i < j)$, d'où

$$K_{ij} = M[X_i X_j] - m_{x_i} m_{x_j} = 1 - F(j) - [1 - F(i)][1 - F(j)] =$$
$$= F(i)[1 - F(j)] \quad (i < j),$$

et le coefficient de corrélation

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} = \frac{F(i)[1 - F(j)]}{\sqrt{F(i) F(j) [1 - F(i)][1 - F(j)]}} = \sqrt{\frac{F(i)[1 - F(j)]}{F(j)[1 - F(i)]}}.$$

8.66. On réalise une série d'épreuves indépendantes dans chacune desquelles l'événement A apparaît avec une probabilité p. Les épreuves cessent dès que l'événement A est réalisé n fois ($n > 1$). Trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques du nombre X des épreuves « manquées », dans lesquelles l'événement A n'a pas eu lieu.

Solution. Cherchons la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne la valeur k. A cet effet il faut que le nombre total d'épreuves réalisées soit égal à $n + k$ (k épreuves ont été « manquées » alors que n se couronnèrent de succès). Par condition, la dernière épreuve doit être « heureuse », alors que dans les précédentes $n + k - 1$ épreuves, les $n - 1$ épreuves « heureuses » et k épreuves « manquées » doivent se répartir de façon arbitraire. La probabilité de ce fait est

$$P\{X=k\}=C_{n+k-1}^{k}p^{n}q^{k}, \quad \text{où} \quad q=1-p \quad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

La répartition obtenue est une généralisation naturelle de la répartition géométrique ; appelons-la *répartition géométrique généralisée* d'ordre n. Elle présente une composition de n répartitions géométriques de même paramètre p : $X = \sum_{s=1}^{n} X_s$, où chaque variable X_s possède la répartition géométrique

$$P\{X_s = k\} = pq^k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

En effet, le nombre total d'épreuves « manquées » se compose 1) du nombre d'épreuves « manquées » jusqu'à la première apparition de l'événement A ; 2) du nombre d'épreuves « manquées » entre la première et la deuxième apparition de l'événement A, etc. On en tire les caractéristiques numériques de la variable X : $m_x = nq/p$; $D_x = nq/p^2$.

8.67. Même énoncé que celui du problème 8.66, mais la variable aléatoire Y est le nombre total d'épreuves (aussi bien « heureuses » que « manquées ») réalisées jusqu'à la n-uple apparition de l'événement A. Trouver la loi de répartition et les caractéristiques numériques de la variable aléatoire Y.

Solution. $Y = X + n$, où X est la variable aléatoire qui figure dans le problème précédent. On en tire

$$P\{Y=k\}=P\{X=k-n\}=C_{k-1}^{k-n}p^{n}q^{k-n}=C_{k-1}^{n-1}p^{n}q^{k-n}$$
$$(k=n,\ n+1,\ \ldots).$$

Les caractéristiques numériques de la variable Y :

$$m_y = m_x + n = nq/p + n = n/p; \quad D_y = D_x = nq/p^2.$$

8.68. Soit une variable aléatoire Y répartie suivant la loi exponentielle de paramètre λ : $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ $(y > 0)$. Pour la valeur donnée de $Y = y$, la variable aléatoire X est répartie d'après la loi de Poisson de paramètre y :

$$P\{X=k \mid Y=y\}=\frac{y^k}{k!}e^{-y} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Trouver la loi de répartition inconditionnelle de la variable aléatoire X.

Solution. La probabilité totale de l'événement $X = k$

$$P\{X=k\}=\int_0^\infty \frac{y^k}{k!}e^{-y}\lambda e^{-\lambda y}\,dy=\frac{\lambda}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-(1+\lambda)y}\,dy=$$

$$=\frac{\lambda}{k!}k!(1+\lambda)^{-(k+1)}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^{k+1}}\quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Si on introduit les notations $\lambda/(1+\lambda)\,p$; $1/(1+\lambda)=q=1-p$, on obtient $P\{X=k\}=pq^k$ $(k=0,1,2,\ldots)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire X possède la répartition géométrique de paramètre $p=\lambda/(1+\lambda)$.

8.69. Un compteur Geiger est établi sur une sonde spatiale pour déterminer le nombre de particules cosmiques qui la frappent en un certain intervalle de temps T. Le flux des particules cosmiques est un flux poissonien de densité λ; chaque particule est enregistrée par le compteur avec une probabilité p. Le compteur est mis en marche pour un temps aléatoire T réparti d'après la loi exponentielle de paramètre μ. La variable aléatoire X est le nombre de particules enregistrées. Trouver sa loi de répartition et ses caractéristiques m_x, D_x.

Solution. Supposons que $T=t$ et cherchons la probabilité conditionnelle pour que $X=m$ $(m=0,1,2,\ldots)$

$$P\{X=m\mid t\}=\frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}.$$

Alors, la probabilité totale de l'événement $\{X=m\}$

$$P\{X=m\}=\int_0^\infty \frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}\mu e^{-\mu t}\,dt=$$

$$=\frac{\mu}{m!}(\lambda p)^m\int_0^\infty t^m e^{-(\lambda p+\mu)t}\,dt=\mu\frac{(\lambda p)^m}{(\lambda p+\mu)^{m+1}}=$$

$$=\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)^m\quad (m=0,1,2,\ldots).$$

C'est la répartition géométrique de paramètre $\mu/(\lambda p+\mu)$ (voir problème précédent); donc [voir formules (4.0.30), (4.0.31)]:

$$m_x=\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)\Big/\left(\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\right)=\frac{\lambda p}{\mu};$$

$$D_x=\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)\Big/\left(\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\right)^2=\frac{\lambda p(\lambda p+\mu)}{\mu^2}=\left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^2+\frac{\lambda p}{\mu}=$$

$$=m_x(m_x+1).$$

8.70. Résoudre le problème 8.69 sous la condition que le compteur est fonctionné un temps aléatoire T de densité $f(t)$ $(t>0)$.

Solution. Tout comme dans le problème précédent, pour $T = t$ la loi de répartition conditionnelle de la variable X est

$$P\{X = m \mid t\} = \frac{(\lambda pt)^m}{m!} e^{-\lambda pt} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

La loi de répartition inconditionnelle

$$P\{X = m\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda pt)^m}{m!} e^{-\lambda pt} f(t)\, dt \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cherchons les caractéristiques numériques de la variable aléatoire X. L'espérance mathématique conditionnelle $m_{x|t} = \lambda pt$; l'espérance mathématique inconditionnelle $m_x = \int_0^\infty \lambda ptf(t)\, dt = \lambda p \int_0^\infty tf(t)\, dt = \lambda pm_t$, où $m_t = M[T]$. D'une façon analogue on trouve le moment initial d'ordre deux de la variable aléatoire X (notons que de cette façon on ne peut calculer que les moments initiaux inconditionnels, et non pas les moments centraux):

$$\alpha_2[X \mid t] = \lambda pt + (\lambda pt)^2;$$

$$\alpha_2[X] = \lambda p \int_0^\infty tf(t)\, dt + (\lambda p)^2 \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt =$$

$$= \lambda pm_t + (\lambda p)^2 \alpha_2[T] = \lambda pm_t + (\lambda p)^2 (D_t + m_t^2)$$

où D_t est la variance de la variable aléatoire T. On en tire

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \lambda pm_t + (\lambda p)^2 D_t.$$

8.71. Résoudre le problème précédent pour le cas concret où $f(t)$ est une loi d'Erlang d'ordre $(k + 1)$ de paramètre μ:

$$f(t) = f_{k+1}(t) = \frac{\mu(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Solution. $P\{X = m\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda pt)^m}{m!} e^{-\lambda pt} \frac{\mu(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dt =$

$$= \frac{\mu(\lambda p)^m \mu^k}{m!k!} \int_0^\infty t^{m+k} e^{-(\lambda p+\mu)t}\, dt = \frac{\mu(\lambda p)^m \mu^k (m+k)!}{m!k!(\lambda p+\mu)^{m+k+1}} =$$

$$= C_{m+k}^m \left(\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\right)^{k+1} \left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)^m.$$

Ainsi, la variable X possède une répartition géométrique généralisée d'ordre $(k+1)$ (voir problème 8.66) de paramètre

$$p_1 = \frac{\mu}{\lambda p + \mu}.$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire T répartie d'après la loi d'Erlang d'ordre $(k+1)$ est $m_t = (k+1)/\mu$, et la variance $D_t = (k+1)/\mu^2$. Par conséquent, d'après les formules obtenues dans le problème précédent

$$m_x = \frac{\lambda p}{\mu}(k+1); \quad D_x = \frac{\lambda p}{\mu}(k+1)\left(1 + \frac{\lambda p}{\mu}\right),$$

ce qui, comme dans le problème 8.66, peut s'écrire

$$m_x = \frac{(k+1)}{p_1} q_1; \quad D_x = \frac{(k+1)}{p_1^2} q_1, \quad \text{où} \quad q_1 = 1 - p_1.$$

8.72. Dans la mesure des grandeurs physiques le résultat de la mesure est inévitablement arrondi en fonction de la valeur minimale de la division de l'appareil. Dans ces conditions une variable aléatoire continue se transforme en une variable discrète dont les valeurs possibles sont séparées l'une de l'autre par des intervalles égaux à la valeur de la division. Ceci pose le problème suivant. Une variable aléatoire continue X répartie d'après la loi de densité $f(x)$ est arrondie jusqu'au nombre entier le plus proche; on obtient une variable aléatoire discrète $Y = E(X)$, où par $E(X)$ on entend le nombre entier le plus proche de X. Trouver le tableau de répartition de Y et ses caractéristiques numériques.

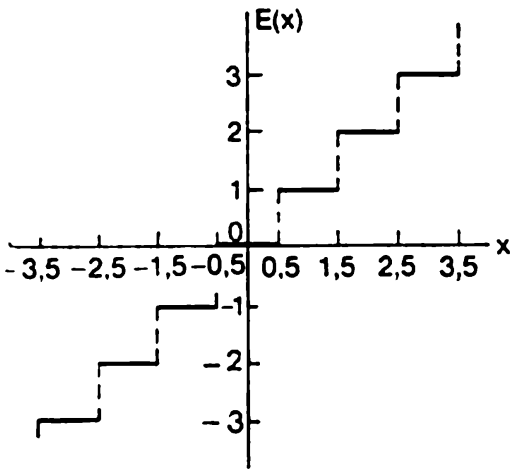


Fig. 8.72

Solution. Le graphique de la fonction $E(X)$ est représenté sur la figure 8.72. Dans le cas où les distances de la valeur x aux deux valeurs entières les plus proches sont égales, la règle d'arrondissement est inessentielle, puisque pour une variable aléatoire continue la probabilité de tomber en un point quelconque est nulle.

La probabilité pour la variable aléatoire Y de prendre une valeur entière k est égale à

$$P\{Y = k\} = \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x)\,dx \quad (k = 0;\ \pm 1;\ 2 \pm 2;\ \ldots),$$

d'où

$$m_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x)\,dx; \quad D_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x)\,dx - m_y^2 \text{ *)}.$$

8.73. Des variables aléatoires X et Y sont indépendantes et réparties d'après les lois de Poisson de paramètres a et b. Trouver la loi de répartition de leur différence $Z = X - Y$ et du module de leur différence $U = |X - Y| = |Z|$.

Solution. La variable aléatoire Z peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives. La probabilité pour que Z prenne une valeur $k > 0$ est égale à la somme des probabilités pour que X et Y prennent deux valeurs qui se distinguent de k (de plus, X est plus grand ou égal à Y):

$$P\{Z=k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \frac{a^{m+k}}{(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k \geqslant 0).$$

La probabilité pour que Z prenne une valeur négative $-k$ s'écrit

$$P\{Z=-k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{b^{(m+k)}}{(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k > 0).$$

Pour la variable aléatoire U

$$P\{U=0\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m}{(m!)^2} e^{-(a+b)};$$

$$P\{U=k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m (a^k + b^k)}{m!\,(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k > 0).$$

Ces probabilités peuvent s'écrire à l'aide des fonctions cylindriques modifiées de première espèce:

$$I_k(x) = I_{-k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2m} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

*) Si l'unité de mesure (la valeur de la division de l'appareil) est petite par rapport à la gamme des valeurs possibles de la variable aléatoire X, alors $m_y \approx m_x$; $D_y \approx D_x$.

Dans ces conditions.

$$P\{Z=k\}=I_k(2\sqrt{ab})\left(\frac{a}{b}\right)^{k/2}e^{-(a+b)}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots);$$

$$P\{U=0\}=I_0(2\sqrt{ab})\,e^{-(a+b)};$$

$$P\{U=k\}=I_k(2\sqrt{ab})\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k/2}+\left(\frac{a}{b}\right)^{-k/2}\right]e^{-(a+b)}\quad(k>0).$$

8.74. On connaît la densité commune $f(x, y)$ d'un système de variables aléatoires (X, Y). Trouver la densité $g(z)$ de la différence $Z = X - Y$.

Solution. Pour le système $(X, -Y)$ la densité de probabilité est $f(x, -y)$; nous tirons donc de l'égalité $X - Y = X + (-Y)$:

$$g(z)=G'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x-z)\,dx.$$

Si les variables X, Y sont indépendantes, il vient

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(x-z)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-z)\,f_2(y)\,dy.$$

8.75. Trouver la densité de probabilité de deux variables aléatoires indépendantes à répartition exponentielle de paramètres λ et μ:

$$Z=X-Y;\ f_1(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ (x>0);\ f_2(y)=\mu e^{-\mu y}\ (y>0).$$

Solution. $g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(x-z)\,dx$; $f_1(x)$ est différente de zéro avec $x>0$; $f_2(x-z)$ est différente de zéro avec $x-z>0$.

a) $z>0$; $\quad g(z)=\int_{z}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu(x-z)}\,dx=\dfrac{\lambda\mu e^{-\lambda z}}{\lambda+\mu}$;

b) $z<0$; $\quad g(z)=\int_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu(x-z)}\,dx=\dfrac{\lambda\mu e^{\mu z}}{\lambda+\mu}$.

Par conséquent,

$$g(z)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-\lambda z}(\lambda+\mu)^{-1} & \text{pour } z>0;\\ \lambda\mu e^{\mu z}(\lambda+\mu)^{-1} & \text{pour } z<0.\end{cases}$$

Les paramètres de cette loi

$$m_z = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - \lambda}{\lambda\mu}; \quad D_z = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(\lambda\mu)^2}.$$

La courbe de répartition a la forme représentée sur la figure 8.75, *a*. Pour $\lambda = \mu$ on obtient $g(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|}$ (fig. 8.75, *b*). C'est ce qui s'appelle répartition de Laplace.

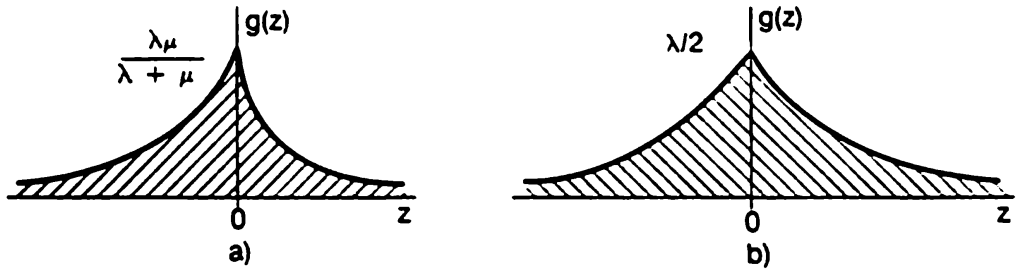


Fig. 8.75

8.76. *Composition des lois de répartition de deux variables aléatoires non négatives.* Soient deux variables aléatoires non négatives X et Y de densités $f_1(x)$ $(x > 0)$ et $f_2(y)$ $(y > 0)$. Etablir la composition de leurs lois de répartition.

Solution. Soit $Z = X + Y$; cherchons la densité $g(z)$ de la variable aléatoire Z. D'après la formule générale (8.0.5)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)\, dx.$$

En tenant compte que $f_1(x) = 0$ pour $x < 0$, et $f_2(z - x) = 0$ pour $x > z$, on obtient

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z - x)\, dx. \tag{8.76}$$

8.77. Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y réparties d'après la même loi normale de paramètres $m_x = m_y = 0$; σ_x; σ_y. Trouver la densité de probabilité de la somme de leurs modules $Z = |X| + |Y|$.

Solution. Introduisons les notations: $U = |X|$; $V = |Y|$. Les densités de ces variables $f_1(u)$ et $f_2(v)$ sont égales respectivement à

$$f_1(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left\{-\dfrac{u^2}{2\sigma_x^2}\right\} & \text{pour } u > 0; \\ 0 & \text{pour } u \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f_2(v)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\exp\left\{-\dfrac{v^2}{2\sigma_y^2}\right\} & \text{pour } v>0;\\ 0 & \text{pour } v\leqslant 0.\end{cases}$$

Compte tenu de la formule (8.76) de la composition des lois de répartition des variables aléatoires non négatives, on a

$$g(z)=\int_0^z f_1(u)\,f_2(z-u)\,du \quad (z>0)$$

ou

$$g(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\cdot\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}\int_0^z \exp-\left\{\frac{u^2}{2\sigma_x^2}+\frac{z^2}{2\sigma_y^2}-\frac{zu}{\sigma_y^2}+\frac{u^2}{2\sigma_y^2}\right\}du. \tag{8.77}$$

Cette intégrale s'exprime à l'aide de la fonction de Laplace $\Phi(x)$; à cet effet il faut dégager à l'exposant de l'expression (8.77) le carré parfait. Après des transformations, on obtient

$$g(z)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}}\exp\left\{\frac{-z^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right\}\left[\Phi\left(\frac{z\sigma_y}{\sigma_x\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\Phi\left(\frac{z\sigma_x}{\sigma_y\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\right)\right].$$

8.78. Une série de messages est transmise par un radiocanal. La durée X d'un message est une variable aléatoire à répartition exponentielle de paramètre λ (fig. 8.78). L'intervalle L entre les messages

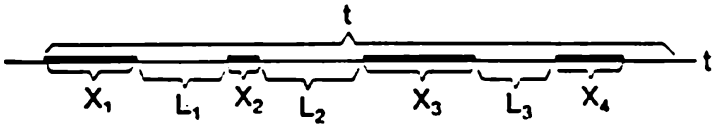


Fig. 8.78

est une variable aléatoire à répartition exponentielle de paramètre μ. Les durées des messages isolés et des intervalles entre eux ne sont pas corrélées. Trouver la probabilité pour que pas moins de m messages ($m>1$) soient transmis pendant le temps t.

Solution. La durée totale T des m messages, plus les intervalles entre eux, présente une variable aléatoire répartie d'après la loi d'Erlang généralisée d'ordre $2m-1$ de paramètres

$$\underbrace{\lambda,\ \lambda,\ \ldots,\ \lambda}_{m\ \text{fois}}\ \underbrace{\mu,\ \mu,\ \ldots,\ \mu}_{(m-1)\ \text{fois}}$$

La probabilité pour que pendant le temps t soient transmis pas moins de m messages n'est rien d'autre que la fonction de répartition de la variable aléatoire T:

$$P\{\text{pas moins de } m \text{ messages pendant le temps } t\} = \\ = P\{T < t\} = G(t).$$

La variable aléatoire T constitue une somme de deux variables aléatoires indépendantes $T = T_1 + T_2$, où T_1 est répartie d'après la loi d'Erlang d'ordre m de paramètre λ:

$$g_1(t) = \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0);$$

T_2, d'après la loi d'Erlang d'ordre $(m-1)$ de paramètre μ:

$$g_2(t) = \frac{(\mu t)^{m-2}}{(m-2)!} e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Par conséquent, pour le cas $\lambda > \mu$:

$$g(t) = \int_0^\infty g_1(\tau) g_2(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda\tau} \frac{[\mu(t-\tau)]^{m-2}}{(m-2)!} e^{-\mu(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \frac{\lambda^{m-1}\mu^{m-2}}{(m-1)!\,(m-2)!} \sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2}^i t^{m-2-i} (-1)^i \frac{(m-1+i)!}{(\lambda-\mu)^{m+i}} \times$$

$$\times \left[1 - \sum_{k=0}^{m-1+i} \frac{[(\lambda-\mu)t]^k}{k!} e^{-(\lambda-\mu)t}\right] e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Pour le cas $\mu > \lambda$, on a

$$g(t) = \int_0^t g_1(t-\tau) g_2(\tau)\, d\tau = \frac{\lambda^{m-1}\mu^{m-2}}{(m-1)!\,(m-2)!} \sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i t^{m-1-i} (-1)^i \times$$

$$\times \frac{(m+i)!}{(\mu-\lambda)^{m+1+i}} \left[1 - \sum_{k=0}^{m-1+i} \frac{[(\mu-\lambda)t]^k}{k!} e^{-(\mu-\lambda)t}\right] e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

Pour le cas $\lambda = \mu$:

$$g(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{2m-2}}{(2m-2)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

8.79. Un pendule effectue des oscillations entretenues libres, l'angle φ (fig. 8.79) variant en fonction du temps suivant une loi

harmonique : $\varphi = a \sin(\omega t + \Theta)$, où a est l'amplitude ; ω, la pulsation et Θ, la phase des oscillations. A un instant $t = 0$ absolument non lié à la position du pendule, ce dernier est photographié. Trouver la loi de répartition de l'angle Φ que fait à l'instant de prise de vue l'axe du pendule avec la verticale. Trouver son espérance mathématique et sa variance.

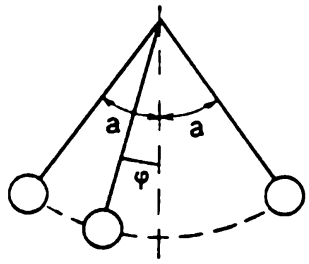


Fig. 8.79

Solution. $\Phi = a \sin \Theta$, où la phase Θ est répartie uniformément dans l'intervalle $(0 ; 2\pi)$; dans cet intervalle la fonction $\varphi = a \sin \theta$ est non monotone. Il est clair que la solution du problème ne change pas si on considère que la variable Θ est répartie uniformément dans l'intervalle $(-\pi/2 ; \pi/2)$, où la fonction φ est monotone. La densité de probabilité de l'angle Φ est

$$g(\varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2-\varphi^2}} \quad \text{pour } |\varphi| < a.$$

La loi $g(\varphi)$ étant symétrique, son espérance mathématique $m_\varphi = 0$. La variance de l'angle Φ

$$D_\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi^2 \, d\varphi}{\sqrt{a^2-\varphi^2}} = \frac{a^2}{2}.$$

8.80. On considère n variables aléatoires indépendantes T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dont chacune est répartie uniformément dans l'intervalle $(0 ; c)$. Trouver la loi de répartition du nombre Y des variables aléatoires T_i (points) qui tombent dans l'intervalle $(a, b) \subset (0 ; c)$. Quelle est la répartition limite de la variable aléatoire Y dans le cas où $n \to \infty$; $c \to \infty$, alors que le nombre moyen de points dans l'intervalle (a, b) reste constant ?

Solution. Introduisons dans notre énoncé la variable aléatoire Y_i, indicatrice de l'événement $T_i \in (a, b)$:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T_i \in (a, b) ; \\ 0 & \text{si} \quad T_i \notin (a, b). \end{cases}$$

Il est clair que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Introduisons la notation

$$P\{Y_i = 1\} = p = \frac{b-a}{c} ; \quad P\{Y_i = 0\} = 1 - p = \frac{c-b+a}{c}.$$

En considérant les n valeurs $T_1, \ldots, T_n$ comme n épreuves indépendantes dont chacune donne ou ne donne pas lieu à l'événement $T_i \in (a, b)$, on voit que la variable aléatoire Y possède une répartition binomiale de paramètres n et p et d'espérance mathématique $M[Y] = np$:

$$P\{Y = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, \ldots, n).$$

Considérons le cas où $c \to \infty$, $n \to \infty$, $n/c = \lambda = \text{const}$. Dans ces conditions, $p \to 0$, mais le nombre moyen de points qui tombent dans l'intervalle (a, b) est constant: $M[Y] = \lambda(b-a) = \text{const}$. On sait (voir section 4.0) que dans ce cas la répartition limite de la variable aléatoire Y obéit à la loi de Poisson de paramètre $d = \lambda(b-a)$:

$$P\{Y = k\} = \frac{d^k}{k!} e^{-d} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Le nombre d'événements du flux poissonien stationnaire de densité λ, qui tombent dans l'intervalle (a, b) possède cette même répartition.

On en tire la conclusion: un flux stationnaire d'événements de densité λ peut être envisagé comme un cas limite de l'ensemble de n points aléatoires indépendants dans l'intervalle $(0; c)$, dont chacun possède dans cet intervalle la répartition uniforme à condition que $n \to \infty$, $c \to \infty$, mais $n/c = \lambda = \text{const}$. Nous reviendrons dans ce qui suit sur ce modèle de flux stationnaire simple (flux stationnaire poissonien).

CHAPITRE IX

FONCTIONS ALÉATOIRES

9.0. On donne à la fonction $X(t)$ le nom de *fonction aléatoire* si sa valeur est une variable aléatoire quel que soit l'argument t. Exemples: $V(t)$, tension d'alimentation d'un ordinateur en fonction du temps t; $T(h)$, température de l'air en un lieu donné à l'instant donné en fonction de l'altitude h; $Q(t)$, le nombre de défaillances d'un ordinateur dans l'intervalle de temps de 0 à t.

La notion de fonction aléatoire est une généralisation de celle de la variable aléatoire. Une variable aléatoire pouvant être envisagée comme fonction d'un événement élémentaire ω (voir section 4.0): $X = \varphi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, où Ω est l'espace des événements élémentaires, une fonction aléatoire $X(t)$ peut être mise sous la forme

$$X(t) = \varphi(t, \omega) \quad (\omega \in \Omega, \ t \in T),$$

où t est un argument non aléatoire; T, le domaine de définition de la fonction $X(t)$.

On appelle *réalisation* d'une fonction aléatoire $X(t)$ la forme concrète qu'elle prend par suite de l'épreuve (lorsque l'événement élémentaire ω a été réalisé). Par exemple, en enregistrant avec un appareil dans l'intervalle de temps $(0, \tau)$ la tension d'alimentation d'un ordinateur en fonction du temps, nous obtenons la réalisation $v(t)$ de la fonction aléatoire $V(t)$ (fig. 9.0.1).

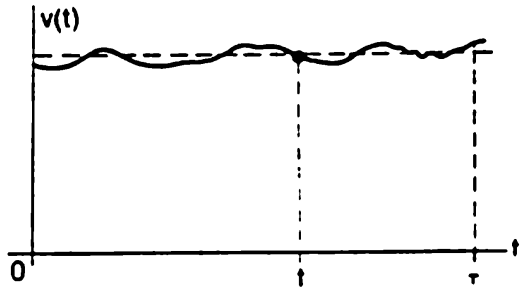


Fig. 9.0.1

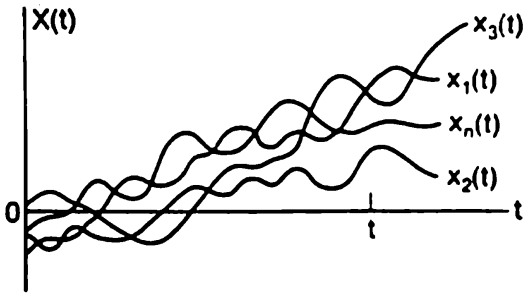


Fig. 9.0.2

Une série d'épreuves réalisées dont l'issue de chacune est une fonction aléatoire $X(t)$, donne l'ensemble des réalisations $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ de cette fonction aléatoire. Les réalisations se distinguent inévitablement l'une de l'autre, la différence étant due aux causes aléatoires (fig. 9.0.2). Pour un instant t fixé une fonction aléatoire $X(t)$ devient une variable aléatoire habituelle. Cette variable aléatoire s'appelle *section* de la fonction aléatoire.

Si on considère non pas une, mais plusieurs sections d'une fonction aléatoire en une série de points $t_1, t_2, \ldots, t_m$, on obtient un vecteur aléatoire m-dimen-

sionnel qui la décrit avec une certaine approximation (fig. 9.0.3). Dans la pratique, si les valeurs d'une fonction aléatoire sont enregistrées avec un intervalle pour les valeurs de l'argument $t_1, t_2, \ldots, t_n$, il s'agit précisément d'un vecteur aléatoire n-dimensionnel.

Une fonction aléatoire $X(t)$ dont l'argument est le temps s'appelle ordinairement *processus aléatoire*. Un processus aléatoire qui se déroule dans un système physique S consiste dans le fait qu'avec le temps t le système S change son état d'une façon aléatoire. Si à l'instant t l'état du système S est décrit par une variable aléatoire scalaire $X(t)$, il s'agit alors d'une *fonction aléatoire scalaire* (processus aléatoire scalaire) $X(t)$. Si à l'instant t l'état du système S est décrit par plusieurs variables aléatoires $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)$, il s'agit alors d'une *fonction aléatoire vectorielle* $V(t)$ (processus aléatoire vectoriel) à k composantes $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)$.

Les processus aléatoires forment des classes d'après plusieurs indices. Un processus aléatoire qui se déroule dans un système S est dit *à temps discret*

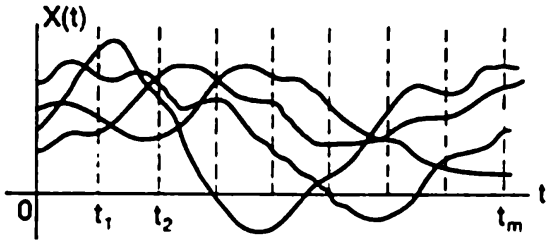


Fig. 9.0.3

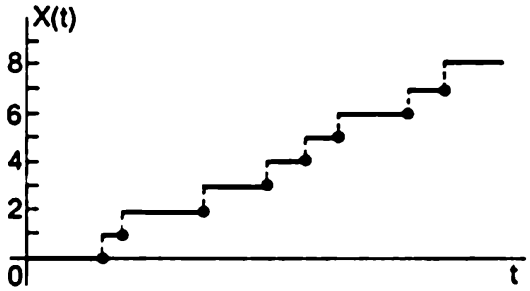


Fig. 9.0.4

si les transitions du système S d'un état en un autre sont possibles seulement à des instants définis connus à l'avance $t_1, t_2, \ldots$. Exemple d'un processus à temps discret : un ordinateur dont l'état se modifie à des instants $t_1, t_2, \ldots$ définis par la cadence de son fonctionnement ; une installation technique revisée à des instants $t_1, t_2, \ldots$ et rangée à la suite de la revision d'une catégorie en une autre.

Un processus aléatoire à temps discret s'appelle également *suite aléatoire*. Si l'état du système S est décrit par une seule variable aléatoire X, le processus aléatoire présente une suite de variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), \ldots$

Un processus aléatoire qui se déroule dans un système S est dit *à temps continu* si les transitions d'un état en un autre peuvent se produire à des instants quelconques, aléatoires, qui couvrent en continu l'axe Ot tout entier ou une partie de cet axe. Exemples d'un processus à temps continu : variation de la tension d'alimentation $V(t)$ d'un ordinateur (voir fig. 9.0.1) ou service d'une installation technique qui à des instants aléatoires tombe en panne pour être ensuite rétablie.

Un processus aléatoire qui se déroule dans un système S est dit *à états discrets*, si le nombre d'états éventuels du système est fini ou dénombrable. Exemple : une installation technique se compose de deux ensembles ; les états possibles du système : s_1, les deux ensembles sont en bon état ; s_2, le premier ensemble est en panne, le deuxième, en bon état ; s_3, le premier ensemble est en bon état, le deuxième, en panne ; s_4, les deux ensembles sont en panne. Un autre exemple : transmission d'un message par radio ; processus aléatoire $X(t)$: nombre de symboles mal transmis jusqu'à l'instant t. Ce processus aléatoire prend seulement un ensemble dénombrable des états $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ et « saute » d'une unité à l'instant de la réception du symbole successif mal transmis (fig. 9.0.4).

Un processus aléatoire qui marche dans un système S est dit *à états continus* si l'ensemble des états éventuels du système S n'est pas dénombrable. Exemple :

mise d'une sonde spatiale en position donnée par rapport à la Terre. Un autre exemple: tension d'alimentation $V(t)$ d'un ordinateur.

Voici la classification des processus d'après les indices mentionnés:

1a. Processus à états discrets et à temps discret.

1b. Processus à états discrets et à temps continu.

2a. Processus à états continus et à temps discret.

2b. Processus à états continus et à temps continu.

Exemples de processus du type 1a. Une personne a acheté m billets d'un emprunt à lots qui peuvent gagner ou être amortis aux instants connus (tirages) $t_1, t_2, \ldots$; le processus aléatoire $X(t)$ est le nombre de billets qui ont gagné jusqu'à l'instant t (t y compris). Un autre exemple: l'état de la mémoire active d'un ordinateur; tous ses états possibles peuvent être dénombrés et leurs changements peuvent se produire en des instants discrets suivant la cadence imposée par le fonctionnement de l'ordinateur.

Exemples de processus du type 1b. Un appareil peut se trouver en quatre états: s_0, non branché et en bon état; s_1, branché et en bon état; s_2, non branché et en panne; s_3, branché et en panne. De nombreux exemples de processus de ce type sont donnés aux chapitres 10 et 11.

Exemple de processus du type 2a. On observe aux instants $t_1, t_2, \ldots$ les valeurs $X(t_1), X(t_2), \ldots$ d'une variable aléatoire continue X. La suite des valeurs de cette variable est un processus $X(t)$ à états continus et à temps discret. Par exemple, si la température de l'air est mesurée deux fois par jour, la succession des valeurs de T enregistrées est un processus aléatoire à états continus et à temps discret.

Exemple de processus du type 2b: le processus $V(t)$ de variation de la tension du réseau d'alimentation d'un ordinateur à tout instant t, ou du niveau des bruits dans la transmission d'un message.

Considérons certaines caractéristiques d'une fonction aléatoire scalaire $X(t)$.

On appelle *loi de répartition unidimensionnelle* d'une fonction aléatoire $X(t)$ la loi de répartition de la section $X(t)$ de cette fonction aléatoire pour toute valeur de l'argument t. Si la variable aléatoire $X(t)$ est continue, cette loi représente la densité de répartition de la section $X(t)$, notée $f(x, t)$. Si la variable aléatoire $X(t)$ est discrète, la loi de répartition unidimensionnelle de la fonction aléatoire $X(t)$ représente une série de probabilités $\mathrm{P}\{x_i, t\}$ pour qu'à l'instant t la variable aléatoire $X(t)$ prenne la valeur x_i. Pour une variable aléatoire mixte $X(t)$ la loi de répartition unidimensionnelle est donnée par la fonction de répartition $F(x, t) = \mathrm{P}\{X(t) < x\}$. La fonction de répartition étant la forme la plus générale de la loi de répartition, qui convient pour toutes les variables aléatoires, on peut utiliser l'écriture générale $F(x, t)$ également pour la loi de répartition unidimensionnelle.

On appelle *loi de répartition bidimensionnelle* d'une fonction aléatoire $X(t)$ la loi de répartition d'un système de deux variables aléatoires, c'est-à-dire de deux sections de la fonction $X(t)$ [$X(t_1)$ et $X(t_2)$ pour toutes valeurs de t_1 et t_2]; cette loi est une fonction de quatre arguments x_1, x_2, t_1, t_2. On peut considérer respectivement la *loi de répartition n-dimensionnelle* qui dépend de $2n$ arguments.

Une fonction aléatoire $X(t)$ est dite *normale* si la répartition commune d'un nombre quelconque n de ses sections prises à des instants arbitraires $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ est une loi normale n-dimensionnelle.

On appelle *espérance mathématique d'une fonction aléatoire* $X(t)$ la fonction non aléatoire $m_x(t)$ qui pour chaque valeur de l'argument t est égale à l'espérance mathématique de la section correspondante de la fonction aléatoire:

$$m_x(t) = \mathrm{M}[X(t)]. \tag{9.0.1}$$

On appelle *fonction de corrélation* ou *fonction d'autocorrélation* de la fonction aléatoire $X(t)$ la fonction non aléatoire de deux arguments $K_x(t, t')$, qui

pour chaque couple des valeurs des arguments t, t' est égale à la covariance des sections correspondantes de la fonction aléatoire :

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t')], \tag{9.0.2}$$

où $\mathring{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ est une *fonction aléatoire centrée.*

Pour $t' = t$ la fonction de corrélation se transforme en variance de la fonction aléatoire

$$K_x(t, t) = D_x(t) = \mathrm{D}[X(t)] = [\sigma_x(t)]^2. \tag{9.0.3}$$

Propriétés principales de la fonction de corrélation :

1) $K_x(t, t') = K_x(t', t)$, c'est-à-dire que la fonction $K_x(t, t')$ ne change pas lorsqu'on remplace t par t' (symétrie) ;

2) $|K_x(t, t')| \leqslant \sigma_x(t)\,\sigma_x(t')$;

3) la fonction $K_x(t, t')$ est définie positive, c'est-à-dire

$\int\limits_{(B)}\int\limits_{(B)} K_x(t, t')\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt' \geqslant 0$, où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque ; (B), un domaine d'intégration quelconque, le même pour les deux arguments.

Pour une fonction aléatoire normale les caractéristiques $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ sont exhaustives et déterminent la loi de répartition d'un nombre quelconque de sections.

On appelle *fonction de corrélation normée* de la fonction aléatoire $X(t)$ la fonction

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\,\sigma_x(t')} = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)\,D_x(t')}}, \tag{9.0.4}$$

c'est-à-dire le coefficient de corrélation des sections $X(t)$ et $X(t')$ avec $t = t'$ $r_x(t, t') = 1$.

Le processus aléatoire $X(t)$ est dit *à accroissements indépendants*, si pour les valeurs quelconques de l'argument $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$ les variables aléatoires de l'accroissement de la fonction $X(t)$

$$U_1 = X(t_2) - X(t_1);\quad U_2 = X(t_3) - X(t_2),\ \ldots;$$
$$U_k = X(t_{k+1}) - X(t_k) \tag{9.0.5}$$

sont indépendantes.

Le processus aléatoire normal à accroissements indépendants s'appelle *processus aléatoire de Wiener*, si son espérance mathématique est nulle, et la variance de l'accroissement est proportionnelle à la longueur de l'intervalle dans lequel elle est atteinte

$$m_x(t) = 0;\quad \mathrm{D}[U_k] = a(t_{k+1} - t_k), \tag{9.0.6}$$

où $a > 0$ est un coefficient constant.

Lorsqu'on ajoute à une fonction aléatoire $X(t)$ un terme non aléatoire $\varphi(t)$, à son espérance mathématique s'ajoute le même terme non aléatoire, et la fonction de corrélation ne change pas.

Si une fonction aléatoire $X(t)$ est multipliée par un facteur non aléatoire $\varphi(t)$, son espérance mathématique est multipliée par le même facteur $\varphi(t)$, et la fonction de corrélation, par $\varphi(t)\,\varphi(t')$.

Si la fonction aléatoire $X(t)$ subit une certaine transformation A_t, on obtient une autre fonction aléatoire $Y(t) = A_t\{X(t)\}$.

La transformation $L_t^{(0)}$ est dite *linéaire homogène* si

$$1)\ L_t^{(0)}\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} L_t^{(0)}\{X_k(t)\}$$

(c'est-à-dire que la transformation peut être appliquée à la somme terme à terme) ;

$$2)\ L_t^{(0)}\{cX(t)\} = cL_t^{(0)}\{X(t)\},$$

(c'est-à-dire que le facteur c qui ne dépend pas de l'argument t par rapport auquel on effectue la transformation, peut être sorti du signe de transformation).

La transformation L_t est dite *linéaire inhomogène* si

$$L_t\{X(t)\} = L_t^{(0)}\{X(t)\} + \varphi(s),$$

où $\varphi(t)$ est une fonction non aléatoire.

Si une fonction aléatoire $Y(t)$ est liée à une fonction aléatoire $X(t)$ par une transformation linéaire $Y(t) = L_t\{X(t)\}$, son espérance mathématique $m_y(t)$ s'obtient à partir de $m_x(t)$ *par la même transformation linéaire*

$$m_y(t) = L_t\{m_x(t)\}, \tag{9.0.7}$$

et pour obtenir la fonction de corrélation $K_y(t, t')$ il faut soumettre la fonction $K_x(t, t')$ *deux fois à la transformation linéaire homogène* correspondante, une fois par rapport à t, et l'autre, par rapport à t' :

$$K_y(t, t') = L_{t'}^{(0)}\{L_t^{(0)}\{K_x(t, t')\}\}, \tag{9.0.8}$$

On appelle *fonction de corrélation mutuelle* $R_{xy}(t, t')$ de deux fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ la fonction

$$R_{xy}(t, t') = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]. \tag{9.0.9}$$

La définition de la fonction de corrélation mutuelle entraîne que

$$R_{xy}(t, t') = R_{yx}(t', t).$$

On appelle *fonction de corrélation mutuelle normée* de deux fonctions aléatoires $X(t)$ $Y(t)$ la fonction

$$r_{xy}(t, t') = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')} = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)D_y(t')}}. \tag{9.0.10}$$

Les fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ sont dites *non corrélées* si $R_{xy}(t, t') \equiv 0$.

Si $Z(t) = X(t) + Y(t)$, alors $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$,

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + R_{xy}(t, t') + R_{xy}(t', t).$$

Si les fonctions aléatoires $X(t)$, $Y(t)$ sont non corrélées, il vient

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t'). \tag{9.0.11}$$

Si

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(t), \tag{9.0.12}$$

où $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ sont des fonctions aléatoires non corrélées, il vient

$$m_z(t) = \sum_{k=1}^{n} m_{x_k}(t); \quad K_z(t, t') = \sum_{k=1}^{n} K_{x_k}(t, t').$$

En réalisant diverses transformations sur les variables aléatoires il est souvent plus commode de les écrire sous une forme complexe. On appelle *fonction aléatoire complexe* la fonction de la forme:

$$Z(t) = X(t) + iY(t), \tag{9.0.13}$$

où $X(t)$, $Y(t)$ sont des fonctions aléatoires réelles; i, l'unité imaginaire.

L'espérance mathématique, la fonction de corrélation et la variance d'une fonction aléatoire complexe se calculent de la façon suivante:

$$m_z(t) = m_x(t) + im_y(t); \quad K_z(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\overline{\mathring{X}(t')}], \tag{9.0.14}$$

où le surlignement désigne la variable conjuguée complexe et

$$D_z(t) = K_z(t, t') = \mathrm{M}[|\mathring{X}(t)|^2]. \tag{9.0.15}$$

En passant aux variables et fonctions aléatoires complexes il faut calculer la variance comme l'espérance mathématique du carré du module, et la covariance, comme l'espérance mathématique du produit d'une variable aléatoire centrée par la variable conjuguée complexe de l'autre variable centrée *).

On appelle *développement canonique d'une fonction aléatoire* $X(t)$ sa représentation sous la forme

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{m} V_k \varphi_k(t) \text{ **)}, \tag{9.0.16}$$

où V_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) sont les variables aléatoires non corrélées centrées de variances D_k ($k = 1, 2, \ldots, m$); $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), les fonctions non aléatoires. Les variables aléatoires V_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) sont des *coefficients*, et les fonctions $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), des *fonctions de coordonnées* du développement canonique.

Si une variable aléatoire $X(t)$ admet le développement canonique (9.0.16) sous une forme réelle, la fonction de corrélation $K_x(t, t')$ est exprimée par la somme

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{m} D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t'), \tag{9.0.17}$$

qui s'appelle *développement canonique de la fonction de corrélation.*

Si la variable aléatoire $X(t)$ admet le développement canonique (9.0.16) sous une forme complexe, le développement canonique de la fonction de corrélation s'écrit

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{m} D_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(t')}, \tag{9.0.18}$$

où les termes surlignés désignent la variable conjuguée complexe.

L'aptitude au développement canonique de la forme (9.0.17) ou (9.0.18) de la fonction de corrélation témoigne qu'il est possible de représenter la fonction aléatoire $X(t)$ sous la forme d'un développement canonique (9.0.16), où les variables aléatoires V_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) possèdent les variances D_k ($k = 1, 2, \ldots, m$).

---

* Dans ce que suit nons indiquerons chaque fois l'allure complexe d'une fonction aléatoire; si elle n'est pas indiquée, nous admettrons que la fonction aléatoire est réelle.

** En particulier, la sommation peut porter sur un nombre indéfini (dénombrable) de termes.

Dans le cas de la transformation linéaire de la fonction aléatoire $X(t)$ donnée par le développement canonique (9.0.16), on obtient la fonction aléatoire $Y(t) = L_t\{X(t)\}$ sous la forme d'un développement canonique

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{k=1}^{m} V_k \psi_k(t), \tag{9.0.19}$$

où

$$m_y(t) = L_t\{m_x(t)\}; \quad \psi_k(t) = L_t^{(0)}\{\varphi_k(t)\}, \tag{9.0.20}$$

c'est-à-dire que *dans la transformation linéaire d'une fonction aléatoire donnée par un développement canonique, son espérance mathématique subit la même transformation linéaire, et les fonctions de coordonnées subissent la transformation linéaire homogène correspondante.*

On appelle *fonction aléatoire stationnaire* $X(t)$ *) la fonction aléatoire dont l'espérance mathématique est constante ($m_x = \text{const}$), alors que la fonction de corrélation dépend seulement de la différence entre ses arguments : $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, où $\tau = t' - t$.

La symétrie de la fonction de corrélation $K_x(t, t')$ entraîne que $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$, c'est-à-dire que *la fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire est une fonction paire de l'argument* τ.

La variance d'une fonction aléatoire stationnaire est constante :

$$D_x = K_x(t, t') = k_x(0) = \text{const}. \tag{9.0.21}$$

La fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire possède la propriété

$$|k_x(\tau)| \leqslant D_x. \tag{9.0.22}$$

La fonction de corrélation normée d'une fonction aléatoire stationnaire est égale à

$$\rho_x(\tau) = k_x(\tau)/D_x = k_x(\tau)/k_x(0). \tag{9.0.23}$$

Le développement canonique d'une fonction aléatoire stationnaire est de la forme

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \tag{9.0.24}$$

où U_k, V_k ($k = 0, 1, \ldots$) sont des variables aléatoires non corrélées centrées à variances égales deux à deux $D|U_k| = D|V_k| = D_k$.

Le développement (9.0.24) est dit *spectral*. Au développement spectral d'une fonction aléatoire stationnaire correspond le développement en série de sa fonction de corrélation

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \tag{9.0.25}$$

on en tire

$$D_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \tag{9.0.26}$$

* Plus exactement, stationaire au sens large du mot.

En posant $\omega_0 = 0$, le développement spectral (9.0.24) d'une fonction aléatoire stationnaire peut s'écrire sous une forme complexe:

$$X(t) = m_x + \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \tag{9.0.27}$$

où

$$\omega_{-k} = -\omega_k; \quad W_0 = U_0; \quad W_k = \frac{U_k - iV_k}{2}; \quad W_{-k} = \frac{U_k + iV_k}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

On appelle *densité spectrale* d'une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ la limite du rapport de la variance liée à l'intervalle des fréquences donné à la longueur de cet intervalle, lorsque celle-ci tend vers zéro. La densité spectrale $S_x(\omega)$ et la fonction de corrélation $k_x(\tau)$ sont liées par la transformation de Fourier. Sous sa forme réelle cette liaison s'écrit:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \qquad k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega; \tag{9.0.28}$$

la dernière relation entraîne que

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \, d\omega. \tag{9.0.29}$$

Sous la forme complexe les transformations de Fourier qui associent la densité spectrale $S_x^*(\omega)$ à la fonction de corrélation $k_x(\tau)$, sont de la forme

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau; \quad k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} \, d\omega. \tag{9.0.30}$$

L'annexe 7 présente le tableau des correspondances de certaines fonctions de corrélation et des densités spectrales.

$S_x(\omega)$, aussi bien que $S_x^*(\omega)$, sont des fonctions réelles non négatives; $S_x^*(\omega)$ est une fonction paire définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; $S_x(\omega)$ est définie dans l'intervalle $(0; +\infty)$ et dans cet intervalle $S_x^*(\omega) = 0{,}5\, S_x(\omega)$.

On appelle *densité spectrale normée* $s_x(\omega)$ [ou sous une forme complexe $s_x^*(\omega)$] la densité spectrale divisée par la variance de la fonction aléatoire $X(t)$:

$$s_x(\omega) = S_x(\omega)/D_x; \quad s_x^*(\omega) = S_x^*(\omega)/D_x. \tag{9.0.31}$$

Si la fonction de corrélation mutuelle $R_{x,y}(t, t')$ de deux variables aléatoires stationnaires $X(t)$ et $Y(t')$ est fonction seulement de $\tau = t' - t$, alors de telles fonctions aléatoires sont dites *stationnaires liées*. Dans ce cas entre la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(\tau)$ et la *densité spectrale matuelle* $S_{xy}^*(\omega)$ il existe des relations déterminées par la transformation de Fourier sous une forme complexe

$$S_{xy}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau) \, d\tau; \quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}^*(\omega) \, d\omega. \tag{9.0.32}$$

Si les fonctions aléatoires stationnaires normées $X(t)$ et $Y(t)$ sont stationnaires liées, la fonction aléatoire $Z(t) = X(t)\, Y(t)$ est une fonction stationnaire de caractéristiques

$$m_z = m_x m_y + R_{xy}(0), \tag{9.0.33}$$

$$S_z^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega - v)\, S_y^*(v)\, dv + m_x m_y\, [S_{xy}^*(\omega) + S_{yx}^*(\omega)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}^*(\omega - v)\, S_{yx}^*(v)\, dv + m_x^2 S_y^*(\omega) + m_y^2 S_x^*(\omega). \tag{9.0.34}$$

Dans le cas particulier où $Z(t) = X^2(t)$,

$$m_z = m_x^2 + D_x = m_x^2 + k_x(0), \tag{9.0.35}$$

$$S_z^*(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega - v)\, S_x^*(v)\, dv + 4 m_x^2 S_x^*(\omega). \tag{9.0.36}$$

On appelle *bruit blanc* (ou bruit blanc au sens large du terme) la fonction aléatoire $X(t)$ dont deux sections diverses quelconques (aussi proches que l'on veut) ne sont pas corrélées et dont la fonction de corrélation est proportionnelle à la fonction delta :

$$K_x(t, t') = G(t)\, \delta(t - t'). \tag{9.0.37}$$

La variable $G(t)$ s'appelle *intensité du bruit blanc*. La définition et les propriétés de la fonction delta sont données par l'annexe 6.

On appelle *bruit blanc stationnaire* le bruit blanc d'intensité constante $G(t) = G = \text{const}$.

La fonction de corrélation d'un bruit blanc stationnaire est de la forme

$$k_x(\tau) = G\delta(\tau), \tag{9.0.38}$$

d'où sa densité spectrale est constante et égale à

$$S_x^*(\omega) = G/2\pi. \tag{9.0.39}$$

La variance du bruit blanc stationnaire $D_x = G\delta(0)$, c'est-à-dire qu'elle est infinie.

Si l'entrée d'un système linéaire stationnaire L est attaquée par une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$, alors, après quelque temps suffisant pour que le processus transitoire s'amortisse, la fonction aléatoire $Y(t)$ à la sortie du système linéaire sera également stationnaire. Les densités spectrales des signaux d'entrée et de sortie sont liées par la relation

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\, |\Phi(i\omega)|^2, \tag{9.0.40}$$

où $\Phi(i\omega)$ est la réponse amplitude-fréquence du système linéaire.

On dit que la fonction stationnaire $X(t)$ *possède la propriété ergodique* si ses caractéristiques $[m_x, k_x(\tau)]$ peuvent être définies comme des moyennes temporelles correspondantes pour une réalisation de durée assez grande. La condition suffisante d'ergodicité d'une fonction aléatoire stationnaire (par rapport à l'espérance mathématique) est la tendance vers zéro de sa fonction de corrélation avec $\tau \to \infty$:

$$\lim_{\tau \to \infty} k_x(\tau) = 0. \tag{9.0.41}$$

Pour que la fonction aléatoire $X(t)$ soit ergodique par rapport à la variance D_x, il suffit que la fonction aléatoire $Y(t) = X^2(t)$ possède une propriété analogue, c'est-à-dire pour $\tau \to \infty$ il faut que $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_y(\tau) = 0$ *).

On appelle *rejet* d'une fonction aléatoire $X(t)$ au-delà du niveau a l'intersection par la réalisation de cette fonction (de bas vers le haut) de la droite parallèle à l'axe Ot menée par rapport à ce dernier à la distance a (voir figure 9.0.5 où les rejets sont marqués par des croix). Le nombre de rejets X en un temps T est une variable aléatoire discrète; si les rejets sont rares, on peut admettre que sa répartition obéit à la loi de Poisson.

Pour une fonction aléatoire stationnaire normale $X(t)$, le nombre moyen de rejets au-delà du niveau a par unité de temps s'écrit

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \tag{9.0.42}$$

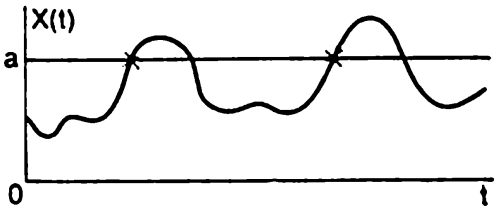


Fig. 9.0.5

où σ_y est l'écart quadratique moyen de la dérivée de la fonction aléatoire

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t). \tag{9.0.43}$$

Le nombre moyen d'intersections de niveau donné de haut vers le bas est le même.

Problèmes et exercices

9.1. Considérer la fonction de temps non aléatoire $\varphi(t)$ comme une forme particulière de la variable aléatoire $X(t) = \varphi(t)$ et trouver ses caractéristiques: espérance mathématique $m_x(t)$; variance $D_x(t)$ et fonction de corrélation $K_x(t, t')$. La fonction aléatoire $X(t)$ est-elle stationnaire?

Réponse. $m_x(t) = \varphi(t)$; $D_x(t) = 0$; $K_x(t, t') = 0$.

Dans le cas général, la fonction aléatoire $X(t)$ n'est pas stationnaire du fait que pour $\varphi(t) \neq \text{const}$ on a $m_x(t) \neq \text{const}$.

9.2. Dans l'énoncé du problème précédent $\varphi(t) = a = \text{const}$, où a est une variable non aléatoire: $X(t) = a$. La fonction aléatoire $X(t)$ est-elle stationnaire? Si c'est oui, possède-t-elle la propriété ergodique?

Réponse. La fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire du fait que $m_x(t) = a = \text{const}$; $D_x(t) = 0$; $K_x(t, t') = k_x(\tau) = 0$; elle possède la propriété ergodique.

9.3. Une fonction aléatoire $X(t)$ présente dans chaque section une variable aléatoire continue à densité de probabilité unidimensionnelle $f(x, t)$. Ecrire pour la fonction aléatoire $X(t)$ l'expression de l'espérance mathématique $m_x(t)$ et de la variance $D_x(t)$.

* Pour que la fonction aléatoire soit ergodique par rapport à la fonction de corrélation, il faut que la fonction $Z(t, \tau) = X(t)X(t+\tau)$ possède une propriété analogue.

Réponse. $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)\,dx$; $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 \times$ $\times f(x, t)\,dx$.

9.4. Une fonction aléatoire $X(t)$ représente une variable aléatoire $X(t) = V$, où V est une variable aléatoire continue de densité $\varphi(v)$. 1) Ecrire l'expression de la loi unidimensionnelle (de la densité) de répartition $f(x, t)$ de la fonction aléatoire $X(t)$; 2) trouver l'espérance mathématique $m_x(t)$ et la variance $D_x(t)$ de cette dernière; 3) écrire l'expression de la fonction de répartition bidimensionnelle $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ de deux sections $X(t_1)$ et $X(t_2)$ de la fonction aléatoire $X(t)$; 4) trouver sa fonction de corrélation $K_x(t, t')$ et sa densité spectrale $S_x^*(\omega)$.

Solution.

1) $f(x, t) = \varphi(x)$;

2) $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx = m_v$; $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 \varphi(x)\,dx$;

3) $F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \mathrm{P}\{X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2\} =$
$= \mathrm{P}\{V < x_1,\ V < x_2\}$.

Si $x_1 < x_2$, alors $V < x_1$ entraîne $V < x_2$ et $\mathrm{P}\{V < x_1;\ V < x_2\} =$ $= \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x)\,dx$. Donc

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x)\,dx = F(x_1) & \text{pour } x_1 < x_2; \\ \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x)\,dx = F(x_2) & \text{pour } x_2 < x_1, \end{cases}$$

où $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx$ est la fonction de répartition de la variable V;

4) $K_x(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t')] = \mathrm{M}[\mathring{V}\mathring{V}] = D_V$;
$D_x(t) = K_x(t, t') = D_V$.

Puisque $m_x(t) = \text{const}$ et $K_x(t, t') = \text{const}$, la fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire. Etant donné que pour chaque réalisation la moyenne temporelle est égale à la valeur prise par la variable aléatoire V dans cette réalisation et diffère pour des réalisations différentes, la fonction aléatoire $X(t)$ *n'est pas ergodique*; sa densité spectrale

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\,d\omega = D_v\delta(\omega),$$

où $\delta(\omega)$ est la fonction delta. On peut s'en convaincre directement, étant donné que

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} D_v \delta(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = D_v e^{i0\tau} = D_v.$$

9.5. Une fonction aléatoire $X(t)$ est donnée sous la forme $X(t) = Vt + b$, où V est une variable aléatoire répartie d'après la loi normale de paramètres m_v, σ_v; b, une grandeur non aléatoire. Trouver la densité de répartition unidimensionnelle $f(x, t)$ de la section de la fonction aléatoire $X(t)$ et ses caractéristiques $m_x(t)$; $D_x(t)$; $K_x(t, t')$.

Réponse. $f(x, t)$ est la loi normale de paramètres $m_v t + b$; $|t|\sigma_v$:

$$f(x, t) = \frac{1}{|t|\sigma_v\sqrt{2\pi}} \exp - \left\{\frac{[x-(m_v t+b)]^2}{2t^2\sigma_v^2}\right\};$$

$$m_x(t) = m_v t + b; \quad D_x(t) = t^2\sigma_v^2; \quad K_x(t, t') = \sigma_v^2 t t'.$$

9.6. Montrer que toute fonction de deux arguments de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(t)\, \varphi_i(t'), \tag{9.6}$$

où D_i sont des nombres non négatifs; $\varphi_i(t)$, des fonctions réelles quelconques ($i = 1, 2, \ldots, n$), possède toutes les propriétés d'une fonction de corrélation.

Solution. Il suffit de montrer qu'il existe une fonction aléatoire $X(t)$ qui possède une fonction de corrélation (9.6). Considérons la fonction aléatoire réelle $X(t)$ donnée sous la forme d'un développement canonique

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t),$$

où $D[V_i] = D_i$. La fonction de corrélation de cette fonction aléatoire est de la forme

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(t)\, \varphi_i(t'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

9.7. Soient les caractéristiques d'un processus aléatoire normal $X(t)$: $m_x(t)$; $D_x(t)$; $K_x(t, t')$. On sait qu'à l'instant t le processus aléatoire se trouvait à l'état x ($X(t) = x$). Trouver la probabilité conditionnelle $p_{\alpha\beta}$ pour qu'à l'instant $t' > t$ le processus aléatoire $X(t)$ appartienne à un certain domaine (α, β):

$$p_{\alpha\beta} = \mathrm{P}\{X(t') \in (\alpha, \beta) \mid X(t) = x\}.$$

Solution. Introduisons la notation $X(t) = X_1$; $X(t') = X_2$. Le système de variables aléatoires X_1, X_2 possède une répartition normale $f(x_1, x_2)$ de caractéristiques

$$m_{x_1} = m_x(t); \quad m_{x_2} = m_x(t');$$

$$\sigma_{x_1}^2 = D_x(t); \quad \sigma_{x_2}^2 = D_x(t'); \quad r_{1,2} = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}.$$

La loi conditionnelle de répartition

$$f(x_2 \mid x_1) = f(x_1, x_2)(f_1(x_1))^{-1}, \quad \text{où } f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2.$$

Cette loi est normale elle aussi; ses caractéristiques:

$$m_{x_2|x_1} = m_2 + r_{1,2}\frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}(x_1 - m_1); \quad \sigma_{x_2|x_1} = \sigma_{x_2}\sqrt{1 - r_{1,2}^2}.$$

On en tire

$$p_{\alpha\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x_2 \mid x_1 = x)\, dx_2 = \Phi\left(\frac{\beta - \left[m_2 + r_{1,2}\frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}(x - m_1)\right]}{\sigma_{x_2}\sqrt{1 - r_{1,2}^2}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{\alpha - \left[m_2 + r_{1,2}\frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}(x - m_1)\right]}{\sigma_{x_2}\sqrt{1 - r_{1,2}^2}}\right),$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de Laplace.

9.8. Trouver la loi de répartition uni et bidimensionnelle et les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$ donnée par son développement canonique

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t),$$

où V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des variables aléatoires à répartition normale mutuellement non corrélées de caractéristiques $m_i = 0$, D_i.

Solution. La loi de répartition unidimensionnelle $f(x_1, t)$ est une loi normale de caractéristiques

$$m_{x_1}(t) = m_x(t); \quad D_{x_1}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i^2(t).$$

La fonction de corrélation

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t) \sum_{j=1}^{n} V_j \varphi_j(t')\right] = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(t)\, \varphi_i(t').$$

La loi de répartition bidimensionnelle $f(x_1, x_2, t, t')$ est une loi normale de caractéristiques $m_{x_1}(t)$; $m_{x_2}(t')$; $D_{x_1}(t)$; $D_{x_2}(t')$; $K_x(t, t')$. La fonction aléatoire $X(t)$ est normale; donc, la loi de répartition bidimensionnelle est une caractéristique exhaustive d'un nombre quelconque de sections de cette fonction.

9.9. On donne la fonction aléatoire

$$X(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t},$$

où V_1 et V_2 sont des variables aléatoires non corrélées de caractéristiques $m_{v_1} = m_{v_2} = 0$; D_{v_1} ; D_{v_2}. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$.

Solution. La fonction aléatoire $X(t)$ est présentée par le développement canonique sans terme constant; donc, $m_x(t) = 0$;

$$K_x(t, t') = D_{v_1} e^{-\alpha_1(t+t')} + D_{v_2} e^{-\alpha_2(t+t')};$$

$$D_x(t) = D_{v_1} e^{-\alpha_1 2t} + D_{v_2} e^{-\alpha_2 2t}.$$

9.10. Une fonction aléatoire $X(t)$ est donnée par son développement canonique

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i e^{-\alpha_i t} + a,$$

où V_i sont les variables aléatoires centrées de variances D_{v_i} ($i = 1, 2, \ldots, n$); $M[V_i, V_j] = 0$ avec $i \neq j$; a, la variable non aléatoire. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$.

Réponse.

$$m_x(t) = a; \quad K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} D_{v_i} e^{-\alpha_i(t+t')};$$

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{n} D_{v_i} e^{-2\alpha_i t}.$$

9.11. La fonction aléatoire $X(t)$ est donnée par son développement canonique

$$X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t,$$

où V_1 et V_2 sont des variables aléatoires non corrélées d'espérances mathématiques nulles et de variances $D_1 = D_2 = 2$. Déterminer si la fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire.

Solution. $m_x(t) = t$; $K_x(t, t') = 2(\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \sin \omega t') = 2 \cos \omega (t - t')$.

La fonction de corrélation de la fonction aléatoire $X(t)$ satisfait à la condition de stationnarité; pourtant, l'espérance mathématique $m_x(t)$ dépend du temps. La fonction aléatoire $X(t)$ est non stationnaire, mais la fonction aléatoire centrée $\mathring{X}(t)$ l'est.

9.12. On donne deux fonctions aléatoires

$$X(t) = V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t; \quad Y(t) = U_1 \cos \omega_2 t + U_2 \sin \omega_2 t.$$

Les espérances mathématiques de toutes les variables aléatoires V_1, V_2, U_1 et U_2 sont nulles, leurs variances $D_{v_1} = D_{v_2} = 1$; $D_{u_1} = D_{u_2} = 4$; la matrice de corrélation normée du système (V_1, V_2, U_1, U_2) est de la forme

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ & 1 & 0 & -0{,}5 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Déterminer la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t')$ et trouver la valeur de cette fonction pour $t = 0$; $t' = 1$.

Solution. $R_{xy}(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{Y}(t')] = \mathrm{M}[(V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t)(U_1 \cos \omega_2 t' + U_2 \sin \omega_2 t')] = \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t' \times \mathrm{M}[V_1 U_1] + \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t' \,\mathrm{M}[V_1 U_2] + \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t' \times \mathrm{M}[V_2 U_1] + \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t' \,\mathrm{M}[V_2 U_2] = \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t' - \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t' = \cos(\omega_1 t + \omega_2 t')$;

$$R_{xy}(0, 1) = \cos \omega_2; \quad R_{yx}(0, 1) = \cos \omega_1;$$
$$R_{yx}(t, t') = R_{xy}(t', t) = \cos(\omega_1 t' + \omega_2 t).$$

9.13. *Processus de Poisson.* On considère sur l'axe Ot un flux d'événements simple de densité λ (points sur l'axe Ot, voir fig. 9.13, *a*) et la fonction aléatoire qui lui est liée $X(t)$, le nombre d'événements apparus pendant le temps $(0, t)$. A l'instant de l'apparition de l'événement suivant la fonction aléatoire $X(t)$ augmente par saut d'une unité (fig. 9.13, *a*) *). La fonction aléatoire $X(t)$ s'appelle *processus de Poisson.*

Trouver la loi de répartition unidimensionnelle du processus de Poisson, ses caractéristiques $m_x(t)$, $D_x(t)$, $K_x(t, t')$, $r_x(t, t')$, ainsi que les caractéristiques du processus aléatoire $Z(t) = X(t) - \lambda t$.

Solution. La loi de répartition de la section $X(t)$ est la loi de Poisson de paramètre $a = \lambda t$; donc, la probabilité pour que la variable aléatoire $X(t)$ prenne la valeur m est exprimée par la formule $P_m = (\lambda t)^m (m!)^{-1} e^{-\lambda t}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. L'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $X(t)$: $m_x(t) = D_x(t) = \lambda t$.

Cherchons la fonction de corrélation $K_x(t, t')$. Soit $t' > t$. Considérons l'intervalle de temps $(0, t')$ (voir fig. 9.13, *b*). Divisons cet intervalle en deux parties: de 0 à t et de t à t'. Le nombre d'événements

*) Convenons de considérer la fonction $X(t)$ continue à gauche.

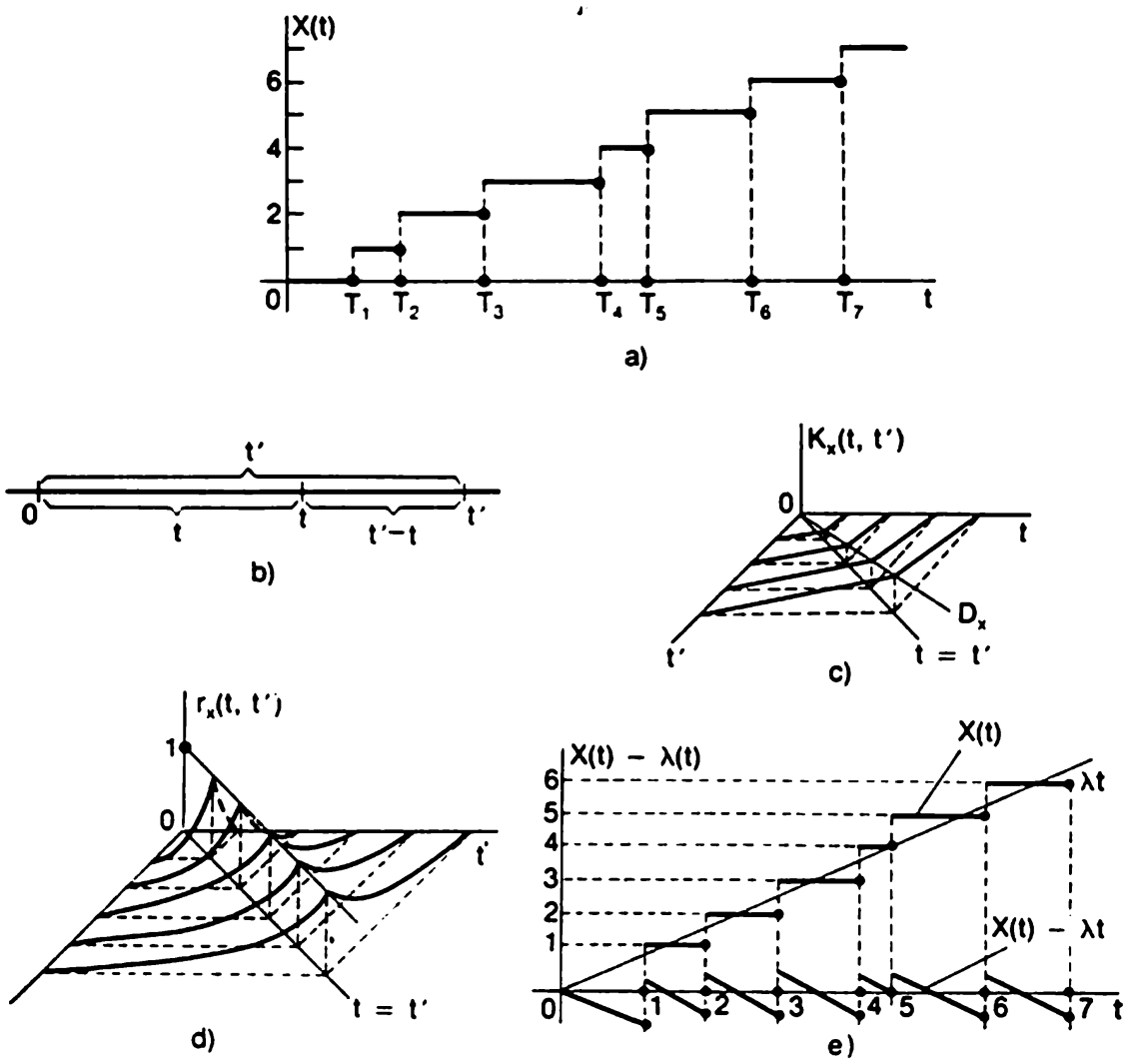


Fig. 9.13

dans tout l'intervalle $(0, t')$ est égal à la somme du nombre d'événements dans les intervalles $(0, t)$ et (t, t') *): $X(t') = X(t) + Y(t' - t)$, où $Y(t' - t)$ est le nombre d'événements survenus dans l'intervalle (t, t'); le flux étant stationnaire, la fonction aléatoire $Y(t' - t)$ a la même répartition que $X(t)$; d'autre part, en vertu des propriétés du flux d'événements poissonien les variables aléatoires $X(t)$ et $Y(t' - t)$ sont non corrélées.

Soit

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t')] = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,(\mathring{X}(t) + \mathring{Y}(t' - t))] =$$
$$= \mathrm{M}[(\mathring{X}(t))^2] = D_x(t) = \lambda t.$$

*) Nous négligeons la possibilité de l'apparition de l'événement exactement à l'instant t, sa probabilité étant nulle.

D'une façon analogue, pour $t > t'$ on obtient $K_x(t, t') = \lambda t'$. De la sorte, $K_x(t, t') = \min\{\lambda t, \lambda t'\} = \lambda \min\{t, t'\}$, où $\min\{t, t'\}$ est la grandeur minimale des t et t' (pour $t = t'$ on peut retenir comme minimale n'importe quelle des grandeurs t, t').

En utilisant le symbole de la fonction unitaire $1(x)$ (voir annexe 6), la fonction de corrélation peut s'écrire sous la forme:

$$K_x(t, t') = \lambda t\, 1(t' - t) + \lambda t'\, 1(t - t').$$

La figure 9.13, *c* représente la surface $K_x(t, t')$. Dans le quadrant $t > 0$ et $t' > 0$ la surface $K_x(t, t')$ se compose de deux plans qui passent respectivement par les axes Ot et Ot' et se coupent suivant la ligne OD_x, dont les applicates des points sont égales à la variance: $D_x = \lambda t$.

La fonction de corrélation normée

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)\, D_x(t')}} = \sqrt{\frac{t}{t'}}\, 1(t' - t) + \sqrt{\frac{t'}{t}}\, 1(t - t').$$

La surface $r_x(t, t')$ est représentée sur la figure 9.13, *d*.

Le processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants, son accroissement dans un intervalle quelconque étant le nombre d'événements apparus dans cet intervalle, et pour le flux simple, les nombres d'événements qui tombent dans des intervalles disjoints sont indépendants.

Le processus $Z(t) = X(t) - \lambda t$ (voir fig. 9.13, *e*) s'obtient par transformation linéaire inhomogène du processus aléatoire $X(t)$. Par conséquent,

$$m_z(t) = m_x(t) - \lambda t = 0; \quad D_z(t) = D_x(t) = \lambda t;$$
$$K_z(t, t') = K_x(t, t') = \lambda \min(t, t'),$$

la fonction de corrélation homogène correspondante ne modifiant pas la fonction de corrélation du processus $X(t)$.

9.14. Le processus aléatoire $X(t)$ apparaît de la façon suivante. L'axe du temps porte un flux poissonien (simple) stationnaire d'événements de densité λ. La fonction aléatoire $X(t)$ prend tour à tour les valeurs $+1$ et -1; avec la réalisation de chaque événement sa valeur change en saut de $+1$ à -1, ou inversement (fig. 9.14, *a*). A l'instant initial la fonction aléatoire $X(t)$ est égale avec une probabilité 1/2 à $+1$, et avec une probabilité 1/2, à -1. Trouver les caractéristiques $m_x(t)$; $D_x(t)$ et $K_x(t, t')$ de la fonction aléatoire $X(t)$.

Solution. La section d'une fonction aléatoire $X(t)$ possède la loi de répartition donnée par le tableau

$$X(t): \left| \begin{array}{c|c} -1 & +1 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}5 \end{array} \right| .$$

En effet, les instants du changement de signe n'étant liés d'aucune façon avec la valeur de la fonction aléatoire, on n'a aucune raison de considérer l'une quelconque des valeurs $+1$ ou -1 comme plus

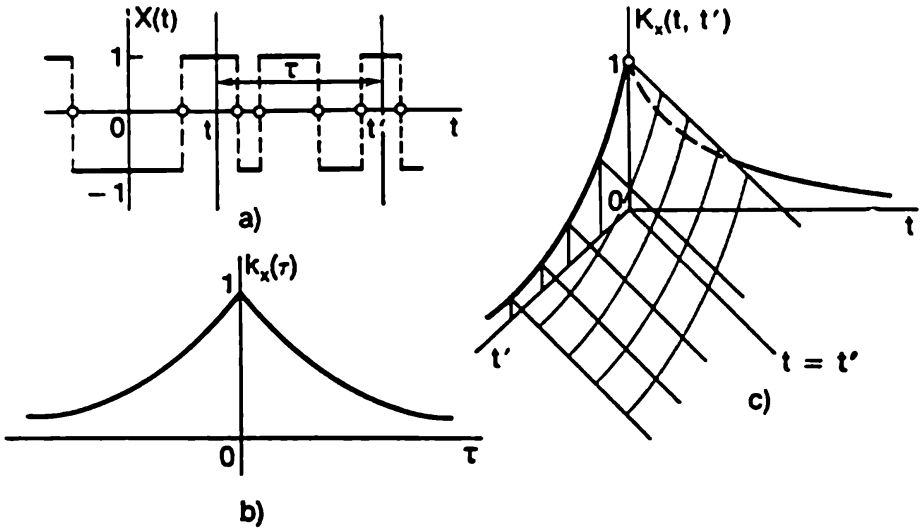


Fig. 9.14

probable que l'autre. D'où $m_x(t) = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$; $D_x(t) = (-1)^2/2 + 1^2/2 = 1$.

Pour trouver la fonction de corrélation $K_x(t, t')$, considérons deux sections quelconques de la fonction aléatoire: $X(t)$ et $X(t')$ $(t' > t)$ et calculons l'espérance mathématique de leur produit

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t')] = \mathrm{M}[X(t)\,X(t')].$$

Le produit $X(t)\,X(t')$ est égal à -1 si le nombre d'événements (de changements de signe) entre les points t et t' a été impair, et à $+1$, si ce nombre (y compris le zéro) a été pair. La probabilité pour que pendant le temps $\tau = t' - t$ ait lieu un nombre pair de changements de signe est

$$p_{\text{paire}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!}\, e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau}\, \frac{e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}}{2},$$

d'une façon analogue, la probabilité pour que pendant le temps τ ait lieu un nombre impair de changements de signe est

$$p_{\text{imp}} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$K_x(t, t') = (+1)\, p_{\text{paire}} + (-1)\, p_{\text{imp}} = e^{-2\lambda\tau},$$

où $\tau = t' - t$. D'une façon analogue, pour $t' < t$

$$K_x(t', t) = e^{-2\lambda(-\tau)}, \quad \text{où} \quad \tau = t' - t.$$

En réunissant ces formules, on obtient $K_x(t, t') = k_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$. Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 9.14, *b*. La surface $K_x(t, t') = e^{-2\lambda|t'-t|}$ est représentée sur la figure 9.14, *c*.

La fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire. Sa densité spectrale

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi} \frac{2\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2}.$$

9.15. L'axe Ot porte un flux d'événements simple (stationnaire et poissonien) de densité λ. Le processus aléatoire $X(t)$ se déroule de la façon suivante: à l'instant de l'apparition dans le flux de l'i-ième événement ($i = 1, 2, \ldots$) il prend la valeur aléatoire V_i qu'il garde jusqu'à l'événement suivant dans le flux (fig. 9.15). A l'instant initial, $X(0) = V_0$. Les variables aléatoires $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ sont indépendantes et possèdent la même répartition de densité $\varphi(x)$. Trouver les caractéristiques du processus $m_x(t)$, $D_x(t)$, $K_x(t, t')$. Le processus est-il stationnaire?

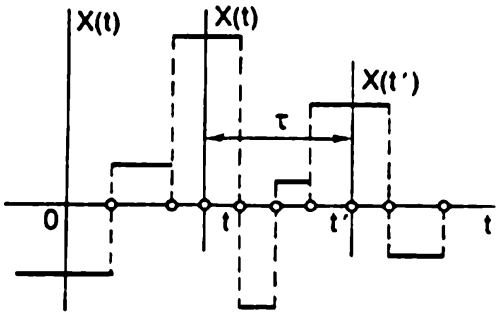


Fig. 9.15

Solution. Toute section de la fonction aléatoire $X(t)$ est répartie suivant la loi $\varphi(x)$; donc

$$m_x(t) = M[V_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, dx = m_v;$$

$$D_x(t) = D_v = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 \varphi(x)\, dx.$$

La fonction de corrélation $K_x(t, t')$ se calcule par le même procédé que dans le cas du problème 9.14. Considérons deux sections $X(t)$ et $X(t')$ $(t' > t)$ séparées par l'intervalle $\tau = t' - t$. On a

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t')].$$

Si entre les points t et t' n'apparaît aucun événement, alors $\mathring{X}(t) = \mathring{X}(t')$ et $K_x(t, t') = \mathrm{M}[(\mathring{X}(t))^2] = D_x(t) = D_v$. Si entre les points t et t' apparaît au moins un événement, alors $\mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t')] = 0$. On en tire

$$K_x(t, t') = e^{-\lambda\tau}D_v + [1 - e^{-\lambda\tau}]\cdot 0 = D_v e^{-\lambda\tau}.$$

D'une façon analogue pour $t' < t$

$$K_x(t, t') = D_v e^{-\lambda(-\tau)},$$

ce qui montre que le processus est stationnaire. Sa fonction de corrélation $k_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}$ ne dépend pas de la forme de la loi de répartition $\varphi(x)$, mais seulement de sa variance D_v.

9.16. *Processus à sections indépendantes.* On considère le cas limite du processus aléatoire $X(t)$ décrit dans le problème précédent 9.15 lorsque la densité λ du flux d'événements croît indéfiniment. Explorer le comportement des caractéristiques de ce processus avec $\lambda \to \infty$.

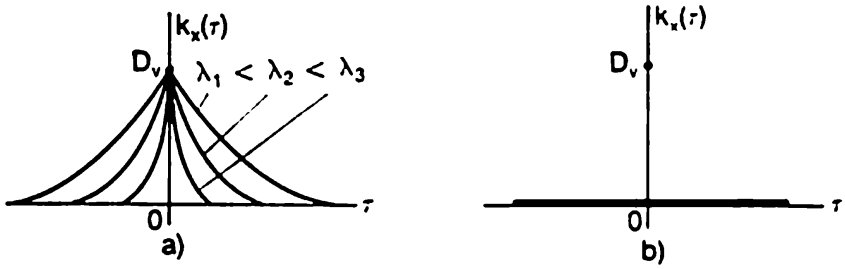


Fig. 9.16

Solution. Avec l'augmentation de λ la fonction de corrélation $k_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}$ se « resserre » vers l'origine des coordonnées (fig. 9.16, *a*). A la limite on obtient la fonction de corrélation de la forme

$$\tilde{k}_x(\tau) = \lim_{\lambda\to\infty} k_x(\tau) = \lim_{\lambda\to\infty} D_v e^{-\lambda|\tau|} = D_v \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda|\tau|},$$

c'est-à-dire la fonction nulle partout sauf à $\tau = 0$ et pour $\tau = 0$ égale à D_v (fig. 9.16, *b*). Ceci peut s'écrire

$$\tilde{k}_x(\tau) = \begin{cases} D_v & \text{pour} \quad \tau = 0; \\ 0 & \text{pour} \quad \tau \neq 0. \end{cases}$$

Puisque d'après l'énoncé du problème 9.15 toutes les sections du processus aléatoire $X(t)$ sont indépendantes, nous obtenons le modèle d'un processus aléatoire pour lequel *deux sections voisines quelconques, aussi proches que l'on veut, sont indépendantes.* Un tel processus peut s'appeler « processus à sections indépendantes ». Un processus aléatoire à sections indépendantes $\tilde{X}(t)$ qui s'obtient à la limite lorsque $\lambda \to \infty$ ne possède aucun point de continuité.

9.17. *Bruit blanc.* Considérer le cas limite du processus aléatoire $X(t)$ examiné par le problème 9.15, à condition que la densité du flux λ croît indéfiniment ($\lambda \to \infty$) et la variance D_v de chaque section tend simultanément vers l'infini ($D_v \to \infty$); de plus, $D_v/\lambda = c =$ $=$ const. Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $Z(t)$ obtenu par une telle transition limite, et montrer que la fonction aléatoire $Z(t)$ est un bruit blanc stationnaire.

Solution. Le comportement du processus aléatoire $X(t)$ aves $\lambda \to \infty$ a été déjà étudié dans le problème 9.16; maintenant nouc prendrons en considération encore une condition $D_v \to \infty$, $D_v/\lambda =$ $= c$. Considérons la densité spectrale $S_x(\omega)$ du processus aléatoire $X(t)$ du problème (9.15):

$$S_x(\omega) = \frac{D_v}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} = \frac{D_v}{\pi\lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

La condition $D_v/\lambda = c$ entraîne $D_v/(\pi\lambda) = c/\pi = a =$ const. La fonction de corrélation $k_x(\tau) = a\pi\lambda e^{-\lambda|\tau|}$.

Pour le processus aléatoire $Z(t)$ qui s'obtient avec $\lambda \to \infty$, $D_v \to$ $\to \infty$, $D_v/\lambda = c$, on obtient:

$$k_z(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} k_x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} a\pi\lambda e^{-\lambda|\tau|} = a\pi \lim_{\lambda \to \infty} \lambda e^{-\lambda|\tau|} = a\pi\delta(\tau),$$

où $\delta(\tau)$ est la fonction delta (voir annexe 6):

$$S_z(\omega) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{a\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2} = a.$$

De la sorte, nous avons vu que le processus aléatoire $Z(t)$ est un bruit blanc stationnaire et construit le modèle de l'apparition d'un tel bruit. Un bruit blanc peut être présenté comme le cas limite d'une suite de courtes impulsions indépendantes uniformément réparties à grande variance. De tels processus se présentent dans la pratique lorsqu'on envisage de différentes perturbations naturelles, le bruit « thermique » dans les dispositifs électroniques, l'effet de grenaille, etc.

9.18. On considère le processus aléatoire $X(t)$ décrit dans le problème 9.15, sous la condition que la loi de répartition de chaque variable aléatoire V_i ($i = 1, 2, \ldots$) est une loi normale à espérance mathématique $m_v = 0$ et à variance D_v. Trouver les caractéristiques

$m_x(t)$, $D_x(t)$ et $K_x(t, t')$ du processus aléatoire $X(t)$. Ce processus est-il stationnaire? Est-il normal?

Solution. Toute section de la fonction aléatoire $X(t)$ est répartie suivant la loi normale de paramètres m_v, $\sigma_v = \sqrt{D_v}$. Comme il résulte de la solution du problème 9.15, la fonction de corrélation $k_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}$. Le processus est stationnaire. Mais est-il normal? Non, il ne l'est pas, bien que la loi unidimensionnelle de répartition soit normale. La répartition commune de deux sections du processus aléatoire $X(t)$ n'est déjà plus normale, ces sections coïncidant avec une probabilité différente de zéro, ce qui ne peut pas avoir lieu pour des variables aléatoires dont la répartition commune est normale.

9.19. *Modèle du flux électronique dans un tube radio.* Le flux d'électrons qui se déplacent de la cathode vers l'anode d'un tube

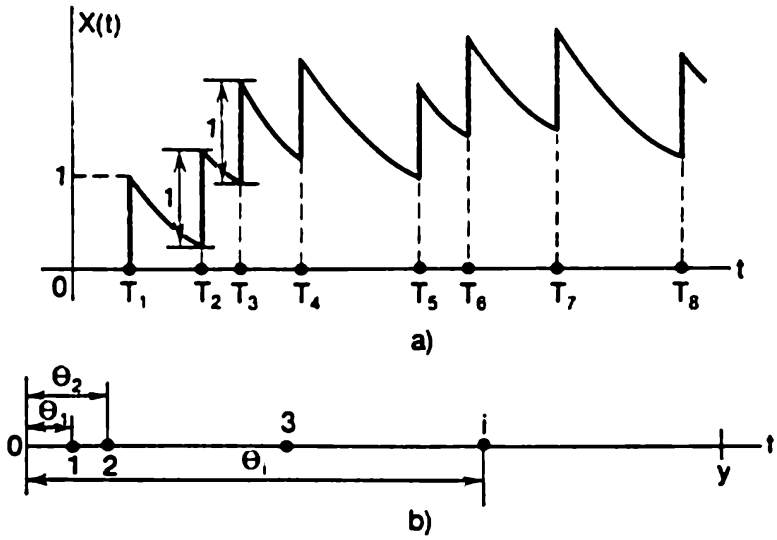


Fig. 9.19

radio constitue un flux simple de densité λ. Lorsqu' un électron est absorbé par l'anode, la tension de ce dernier croît par saut de l'unité, puis commence à décroître suivant une loi exponentielle de paramètre α qui dépend des caractéristiques du schéma électronique (fig. 9.19, *a*). Le saut de tension dû à l'amenée d'un électron est sommé avec la tension résiduelle sur l'anode. Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $X(t)$: tension sur l'anode.

Solution. Les électrons arrivent sur l'anode à des instants aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$ qui forment un flux simple d'événements. A l'instant t la tension due à l'action de l'i-ième électron arrivé à l'instant T_i est

$$W_i(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } t < T_i, \\ e^{-\alpha(t-T_i)} & \text{pour } t \geqslant T_i \end{array} \right\} = 1(t - T_i)\, e^{-\alpha(t-T_i)},$$

où $1(t)$ est la fonction unitaire; $T_i > 0$; $t > 0$. Considérons la variable aléatoire Y, nombre d'électrons amenés sur l'anode vers l'instant t. Cette variable possède la répartition de Poisson de paramètre λt. Représentons la tension $X(t)$ comme la somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} e^{-\alpha(t-T_i)} 1(t - T_i). \tag{9.19.1}$$

Dans ce qui précède (voir problème 8.80) nous avons montré que dans l'intervalle $(0, t)$ un flux d'événements poissonien peut être représenté avec une précision suffisante comme une suite de points dans cet intervalle, la coordonnée de chacun de ces points $\Theta_i \in (0, t)$ étant répartie uniformément dans cet intervalle (voir fig. 9.19, *b*) et ne dépend pas des coordonnées des autres points. Par conséquent, l'expression (9.19.1) peut se récrire sous la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} e^{-\alpha(t-\Theta_i)}, \tag{9.19.2}$$

où les variables Θ_i sont indépendantes et réparties uniformément dans l'intervalle $(0, t)$.

Introduisons la notation $X_i(t) = e^{-\alpha(t-\Theta_i)} = e^{-\alpha t} e^{\alpha\Theta_i}$; alors

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} X_i(t) = e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^{Y} e^{\alpha\Theta_i}, \tag{9.19.3}$$

où les $X_i(t)$ représentent les variables aléatoires indépendantes réparties uniformément, alors que la variable aléatoire Y ne dépend pas non plus des variables aléatoires $X_i(t)$. Conformément à la solution du problème 7.64 écrivons les expressions de $m_x(t)$ et $D_x(t)$:

$$m_x(t) = m_y(t)\, m_{x_i}(t); \tag{9.19.4}$$

$$D_x(t) = m_y(t)\, D_x(t) + D_y(t)\, m^2_{x_i}(t). \tag{9.19.5}$$

La répartition de la variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre λt fait que $m_y(t) = D_y(t) = \lambda t$. Calculons $m_{x_i}(t)$:

$$m_{x_i}(t) = \mathrm{M}[X_i(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\alpha(t-x)}\, dx = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{2\alpha t}.$$

Déterminons le moment initial d'ordre deux de la variable aléatoire $X_i(t)$:

$$\mathrm{M}[X_i^2(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t [e^{-\alpha(t-x)}]^2\, dx = \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha t}.$$

Par conséquent,

$$m_x(t) = \lambda \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}; \tag{9.19.6}$$

$$D_x(t) = \lambda t\,[D_{x_i}(t) + m^2_{x_i}(t)] = \lambda t \mathrm{M}\,[X_i^2(t)] = \lambda \frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha}. \tag{9.19.7}$$

Notons que pour $t \to \infty$ l'espérance mathématique et la variance du processus $X(t)$ ne dépendent pas du temps: $\lim\limits_{t\to\infty} m_x(t) = m_x = \lambda/\alpha$; $\lim\limits_{t\to\infty} D_x(t) = D_x = \lambda/(2\alpha)$.

Pour trouver la loi de répartition de la section du processus aléatoire $X(t)$ pour $m_x = \lambda/\alpha > 20$, faisons les raisonnements suivants. En considérant l'intervalle fini mais suffisamment grand $(0, t)$ et sous l'hypothèse que dans cet intervalle a eu lieu un assez grand nombre Y d'émissions d'électrons, le processus $X(t)$ [voir formule (9.19.2)] représente une somme des variables aléatoires indépendantes de même répartition, somme qui est répartie à peu près suivant la loi normale, puisque dans ce cas les conditions du théorème central limite sont pratiquement observées (voir chapitre 8). Par conséquent, la section d'un processus aléatoire a une répartition normale aux caractéristiques $m_x = \lambda/\alpha$; $D_x = \lambda/(2\alpha)$. Le régime stationnaire s'établit pratiquement en un temps $\tau_s = 3/\alpha$.

Pour trouver la fonction de corrélation considérons deux sections du processus aléatoire étudié aux instants t et t' $(t' > t)$. En vertu des hypothèses adoptées on peut affirmer qu'à l'instant t' la tension $X(t')$ sur l'anode est égale à la tension $X(t)$ enregistrée à l'instant t multipliée par l'exponentielle $e^{(-\alpha(t'-t)}$, plus la tension $Y(t'-t)$ qui a lieu par suite de l'arrivée sur l'anode des électrons dans l'intervalle de temps (t, t'):

$$X(t') = X(t)\,e^{-\lambda(t'-t)} + Y(t'-t). \tag{9.19.8}$$

Il est évident que les processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t'-t)$ sont indépendants, puisqu'ils sont engendrés par les électrons arrivés sur l'anode à des intervalles de temps disjoints $(0, t)$ et (t, t') respectivement. On peut dire la même chose des processus aléatoires centrés $\mathring{X}(t)$ et $\mathring{Y}(t'-t)$. Par conséquent,

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}\,[\mathring{X}(t)\{\mathring{X}(t)\,e^{-\alpha(t'-t)} + \mathring{Y}(t'-t)\}] =$$
$$= \mathrm{M}\,[(\mathring{X}(t))^2]\,e^{-\alpha(t'-t)} \quad \text{pour } t' > t;$$

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}\,[(\mathring{X}(t'))^2]\,e^{-\alpha(t-t')} \quad \text{pour } t > t'.$$

En réunissant les deux dernières expressions, on obtient

$$K_x(t, t') = D_x(\min(t, t'))\,[1 - e^{2\alpha \min(t, t')}]\,e^{-\alpha|t'-t|}.$$

Considérons le comportement limite du processus aléatoire pour $t \to \infty$, $t' \to \infty$, mais avec une valeur finie de leur différence $\tau = t' - t$. Dans ce cas

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} = \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}.$$

Ainsi, le processus aléatoire $X(t)$ étudié dans ce problème pour $t \to \infty$ et $\lambda/\alpha > 20$, est un processus aléatoire stationnaire et pratiquement normal.

Le problème examiné présente un cas plus général du problème 9.13. En effet, pour $\alpha \to 0$, la tension sur l'anode du tube est un processus de Poisson, puisqu'avec l'apparition de chaque nouvel électron la tension ne fait que croître d'une unité et ne décroît pas avec le temps. Donc, tous les t, t' finis quels qu'ils soient doivent vérifier les égalités

$$\lim_{\alpha\to 0} m_x(t) = \lim_{\alpha\to 0} \lambda \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} D_x(t) = \lim_{\alpha\to 0} \lambda \frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha} = \lambda t;$$

$$\lim_{\alpha\to 0} K_x(t, t') = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\lambda}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha \min(t, t')}] e^{-\alpha|t'-t|} = \lambda \min(t, t'),$$

dont nous proposons au lecteur de vérifier la validité.

9.20. *Fonctionnement d'un détecteur linéaire.* Admettons dans l'énoncé du problème 9.19 que les électrons viennent sur l'anode par

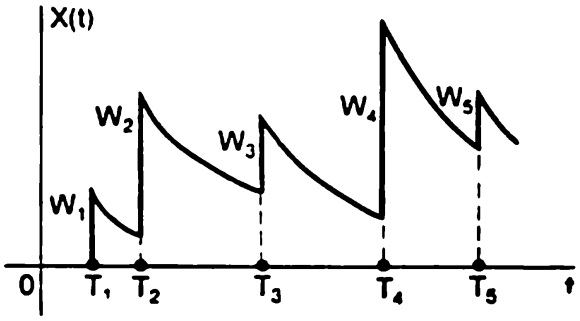


Fig. 9.20

« paquets », les instants d'amenée des paquets formant un flux simple de densité λ. Dans ces conditions, le nombre d'électrons du i-ième paquet est une variable aléatoire W_i qui ne dépend pas du nombre d'électrons des autres paquets et qui suit la loi de répartition $F(w)$ de caractéristiques m_w, D_w. Ce problème est équivalent à celui de la détermination de la tension à la sortie d'un détecteur linéaire, lorsque son entrée est attaquée à des instants aléatoires déterminés par le flux poissonien, des impulsions positives de la

variable aléatoire (tension maximale) W_i, alors que dans les périodes entre les impulsions la tension décroît suivant une loi exponentielle (fig. 9.20). Trouver les caractéristiques du processus.

Solution. Le processus étudié peut être traduit par une formule analogue à (9.19.2):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} W_i e^{-\alpha(t-\Theta_i)}, \tag{9.20}$$

où les variables aléatoires Y, W_i, Θ_i sont mutuellement indépendantes.

Introduisons la notation : $X_i(t) = W_i e^{-\lambda(t-\Theta_i)}$, alors

$$M[X_i(t)] = m_w \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}; \quad M(X_i^2(t)] = (D_w + m_w^2) \frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha t}.$$

Donc

$$m_x(t) = \lambda m_w \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}; \quad D_x(t) = \lambda(D_w + m_w^2) \frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha}.$$

Pour $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} m_x(t) = m_x = \frac{\lambda m_w}{\alpha}; \quad \lim_{t\to\infty} D_x(t) = D_x = \frac{\lambda(D_w + m_w^2)}{2\alpha};$$

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

Considérons le comportement limite du processus $X(t)$ dans les conditions d'une croissance illimitée de la densité du flux poissonien qui engendre les impulsions ($\lambda \to \infty$), de la variance de l'amplitude de chaque impulsion ($D_w \to \infty$) et du paramètre α ($\alpha \to \infty$). La croissance illimitée de la variable α signifie que la tension de l'impulsion tombe très rapidement, c'est-à-dire qu'à la limite avec $\alpha \to \infty$ l'aire de l'impulsion tend vers zéro. La vitesse de la croissance des variables λ et D_w est alors proportionnelle à la vitesse de la croissance de la variable α: $\lambda = k_1\alpha$; $D_w = k_2\alpha$. On obtient (avec $t \to \infty$)

$$\lim_{\lambda,\alpha,\to\infty} m_x = \lim_{\lambda,\alpha\to\infty} \frac{\lambda}{\alpha} m_w = k_1 m_w;$$

$$\lim_{\lambda,\alpha,D_w\to\infty} D_x = \lim_{\lambda,\alpha,D_w\to\infty} \frac{\lambda(D_w + m_w^2)}{2\alpha} \to \infty;$$

$$\lim_{\lambda,\alpha,D_w\to\infty} k_x(\tau) = \lim_{\lambda,\alpha,D_w\to\infty} \frac{k_1 k_2}{2} \alpha e^{-\alpha|\tau|} = k_1 k_2 \delta(\tau),$$

où $\delta(\tau)$ est la fonction delta.

De la sorte, à la limite nous avons un bruit blanc produit par la suite des impulsions à fréquence de répétition infinie, qui possèdent

une espérance mathématique finie et une variance infinie de leur amplitude, ainsi qu'une durée infiniment petite.

9.21. *Effet de grenaille.* Considérons le processus aléatoire $X(t)$ engendré par le processus de Poisson, comme dans le problème 9.13. Avec l'apparition de l'i-ième événement du flux poissonien à l'instant T_i, dans le circuit électrique apparaît une impulsion de tension non négative W_i à valeur (amplitude) aléatoire, qui par la suite varie suivant la même loi $\varphi(\eta)$, où la variable η est comptée à partir de l'instant T_i (fig. 9.21) ($\varphi(0) \geqslant \varphi(\eta)$). Les variables aléatoires W_i sont mutuellement indépendantes et possèdent la même fonction de répartition $F(w)$. La tension dans le circuit électrique constitue l'action globale de toutes les impulsions, compte tenu de leur variation dans le temps.

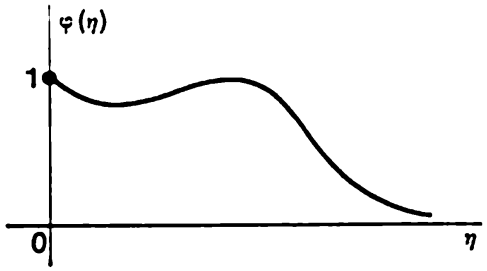


Fig. 9.21

Le processus aléatoire considéré porte le nom d'effet de grenaille et les processus étudiés dans les problèmes 9.19 et 9.20 sont des cas particuliers de cet effet. Etablir les caractéristiques de l'effet de grenaille.

Solution. Conformément à la solution du problème 9.20, l'effet de grenaille peut être présenté dans l'intervalle $(0, t)$ sous une forme analogue à (9.20)

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} W_i \varphi(t - \Theta_i), \tag{9.21}$$

où Y, W_i, Θ_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes; de plus, comme dans le problème 9.20, la variable aléatoire Y obéit à la loi de Poisson de paramètre λt, alors que la variable aléatoire Θ_i est répartie uniformément dans l'intervalle $(0, t)$.

Introduisons la notation: $X_i(t) = W_i \varphi(t - \Theta_i)$; alors $M[X_i(t)] = m_w t^{-1} \Phi(t)$, où $m_w = \mathrm{M}[W_i]$; $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t - x)\, dx$ est l'aire de l'impulsion (aire délimitée par la courbe $\varphi(\eta)$ et les axes de coordonnées);

$$\mathrm{M}[X_i^2(t)] = (D_w + m_w^2)\, t^{-1} \widetilde{\Phi}(t),$$

où

$$D_w = D[W_i] = \int_0^t (w - m_w)^2\, dF(w); \quad \widetilde{\Phi}(t) = \int_0^t [\varphi(t - x)]^2\, dx.$$

Par conséquent,

$$m_x(t) = \lambda m_w \Phi(t); \quad D_x(t) = \lambda (D_w + m_w^2) \widetilde{\Phi}(t).$$

Pour $t \to \infty$ et l'existence des intégrales impropres

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \int_0^\infty \varphi(t-x)\,dx = \Phi; \quad \lim_{t\to\infty} \widetilde{\Phi}(t) = \int_0^\infty \varphi^2(t-x)\,dx = \widetilde{\Phi};$$

$$m_x = \lambda m_w \Phi; \quad D_x = \lambda (D_w + m_w^2) \widetilde{\Phi}.$$

L'existence des intégrales impropres réduites a toujours lieu, l'aire de l'impulsion à amplitude initiale égale à l'unité et l'aire déterminée par le carré de la fonction correspondante étant dans la pratique des grandeurs finies.

En raisonnant d'une façon analogue à celle appliquée pour déduire la formule (9.19.8), on obtient pour $t' > t$ que $X(t') = X(t) \times \times \varphi(t'-t) + Y(t'-t)$. Donc

$$K_x(t, t') = \begin{cases} D_x(t)\,\varphi(t'-t) & \text{pour } t' > t, \\ D_x(t')\,\varphi(t-t') & \text{pour } t > t'. \end{cases}$$

En réunissant ces deux expressions, on trouve

$$K_x(t, t') = D_x(\min(t, t'))\,\varphi(|t'-t|).$$

Avec $t, t' \to \infty$ on obtient $k_x(\tau) = D_x(\varphi(|\tau|)\,(\tau = t'-t)$. Ainsi, nous voyons qu'avec $t, t' \to \infty$ l'effet de grenaille représente un processus aléatoire stationnaire.

Considérons le cas limite où la densité du flux des impulsions λ croît indéfiniment, la variance D_w de l'impulsion croît aussi indéfiniment, alors que l'aire de l'impulsion à amplitude unitaire Φ tend vers zéro, de sorte que la variable $\widetilde{\Phi}$ tend aussi vers zéro. On observe alors la réalisation des conditions

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \Phi\to 0}} \lambda m_w \Phi = m; \quad \lim_{\substack{\lambda,\, D_w\to\infty \\ \Phi\to 0}} \lambda (D_w + m_w^2) \widetilde{\Phi} = D.$$

Dans ce cas l'effet de grenaille se transforme en bruit blanc de caractéristiques $m_x = m$; $k_x(\tau) = D\delta(\tau)$, où $\delta(\tau)$ est la fonction delta.

9.22. *Effet de grenaille impulsionnel.* On considère l'effet de grenaille engendré par les impulsions de forme rectangulaire; de

plus, l'amplitude W_i et la durée $\varkappa_i$ de l'impulsion arrivée à l'instant T_i sont des variables aléatoires indépendantes de caractéristiques m_w; D_w; $m_\varkappa$ et $D_\varkappa$ respectivement (fig. 9.22). Trouver l'espérance mathématique et la variance d'un tel processus aléatoire $X(t)$.

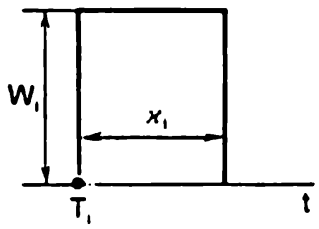


Fig. 9.22

Solution. L'effet de grenaille impulsionnel considéré dans l'intervalle $(0, t)$ peut être mis sous la forme:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} W_i \varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i) = \sum_{i=1}^{Y} X_i(t),$$

où $\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)$ est l'impulsion dont le début tombe sur l'instant Θ_i, la hauteur est égale à l'unité et la durée à $\varkappa_i$ (les variables aléatoires Θ_i et $\varkappa_i$ sont indépendantes): $\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i) = 1(t - \Theta_i)\, 1(\Theta_i + \varkappa_i - t)$. La variable aléatoire Θ_i est répartie uniformément à l'intérieur de l'intervalle $(0, t)$.

Cherchons $M[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)]$. Introduisons l'hypothèse qui consiste en ce que la variable aléatoire $\varkappa_i$ a pris la valeur $\varkappa$. En supposant que cette hypothèse ait eu lieu, cherchons l'espérance mathématique conditionnelle pour des valeurs de t suffisamment grandes:

$$M_\varkappa[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa)] = \frac{1}{t}\int_0^t 1(t-y)\, 1(y+\varkappa-t)\, dy.$$

La fonction sous le signe somme est une impulsion rectangulaire de hauteur égale à l'unité et de durée égale à $\varkappa$, alors que l'intégrale de cette fonction est égale à l'aire de cette impulsion. Par conséquent,

$$M_\varkappa[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa)] = \varkappa/t,$$

d'où l'on tire

$$M[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)] = M[\varkappa_i/t] = m_\varkappa/t.$$

D'une façon analogue,

$$M_\varkappa[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)^2] = \frac{1}{t}\int_0^t [1(t-y)\, 1(y+\varkappa-t)]^2\, dy = \frac{\varkappa}{t};$$

$$M[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)^2] = \frac{m_\varkappa}{t}.$$

Donc

$$M[X_i(t)] = M[W_i\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)] = m_w m_\varkappa/t;$$

$$M[X_i^2(t)] = M[(W_i\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i))^2] = (D_w + m_w^2)\, m_\varkappa/t;$$

$$M[X(t)] = m_x = M[Y]\, M[X_i(t)] = \lambda t m_w m_\varkappa/t = \lambda m_w m_\varkappa. \quad (9.22.1)$$

$$D[X(t)] = D_x = M[Y]\, M[X_i^2(t)] = \lambda(D_w + m_w^2)\, m_\varkappa. \quad (9.22.2)$$

A la limite, avec la croissance illimitée de la densité du flux simple λ, de la variance de l'amplitude de l'impulsion D_w, avec la désroissance illimitée de l'espérance mathématique $m_\varkappa$ et de la variance $D_\varkappa$ de la durée de l'impulsion et avec la conservation de la variable constante $D_\varkappa = \lambda (D_w + m_w^2) m_\varkappa = \text{const}$, l'effet de grenaille impulsionnel se transforme en bruit blanc de caractéristiques m_x; $k_x(\tau) = D_x\delta(\tau)$.

9.23. *Processus de variation de la quantité des éléments homogènes.* On considère le processus $X(t)$ qui est le nombre d'éléments homogènes fonctionnant à l'instant t. On suppose de plus que chaque élément fonctionne un certain temps aléatoire $\varkappa$, réparti d'après la loi exponentielle de paramètre μ, la même pour tous les éléments, après quoi il tombe en panne (« succombe »). Le début du fonctionnement (de la « vie ») de chaque élément est aléatoire et est déterminé par le flux simple de densité λ. Par exemple, $X(t)$ est le nombre d'ordinateurs en exploitation, la densité λ, le nombre d'ordinateurs produits par unité de temps; $\varkappa$, le temps aléatoire du fonctionnement d'un ordinateur (le temps moyen du fonctionnement d'un ordinateur est $m_x = 1/\mu$). Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $X(t)$.

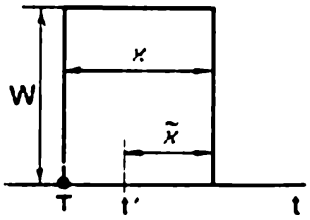


Fig. 9.23

Solution. Le processus aléatoire $X(t)$ présente un effet de grenaille impulsionnel examiné dans le problème précédent, à cette différence près que $W_i = 1$ pour toute valeur de i ($m_w = 1$; $D_w = 0$), alors que la variable aléatoire $\varkappa$ est répartie d'après la loi exponentielle de paramètre μ. Par conséquent, pour des t suffisamment grands [voir formules (9.22.1), (9.22.2)], $\mathrm{M}[X(t)] = \lambda m_w m_\varkappa = \lambda/\mu$; $D[X(t)] = \lambda (D_w + m_w^2) m_x = \lambda/\mu$.

On peut prouver que la loi de répartition unidimensionnelle d'un processus aléatoire $X(t)$ est une loi de Poisson de caractéristiques trouvées.

Pour la détermination de la fonction de corrélation du processus aléatoire $X(t)$ considéré, utilisons la propriété de la variable aléatoire $\varkappa$, durée de l'impulsion, répartie d'après la loi exponentielle, qui consiste dans le fait que le « reste » du temps de la durée de l'impulsion $\tilde{\varkappa}$ (fig. 9.23), qui est compté non pas de l'origine T, mais à partir d'un certain instant t_1 ($T < t_1 < T + \varkappa$), est également réparti d'après une loi exponentielle de paramètre μ (voir problème 5.35).

Introduisons l'hypothèse qui consiste en ce que le processus aléatoire $X(t) = n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Désignons par $P_n(t) = \mathrm{P}(X(t) = n)$ la probabilité de cette hypothèse. En supposant que cette hypothèse ait eu lieu, écrivons l'expression de la fonction

aléatoire $X_n(t')$ $(t' > t)$:

$$X_n(t') = \sum_{i=0}^{n} V_i + Y(t'-t),$$

où V_i est une variable aléatoire dont le tableau de répartition est

$$V_i: \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1-e^{-\mu(t'-t)} & e^{-\mu(t'-t)} \end{array} \right| \quad (i \neq 0),$$

$V_0 = 0$; $Y(t'-t)$ est le processus aléatoire engendré par les événements qui apparaissent au sein du flux poissonien dans l'intervalle de temps (t, t'). La variable $\sum_{i=0}^{n} V_i$ est le nombre d'éléments qui se sont conservés jusqu'à l'instant t' s'ils étaient au nombre de n à l'instant t.

Cherchons l'espérance mathématique conditionnelle du produit $X(t)\,X(t')$ sous la condition que $X(t) = n$:

$$\mathrm{M}[nX_n(t')] = n\mathrm{M}[X_n(t')] = n\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} V_i + Y(t-t')\right] =$$
$$= n\{ne^{-\mu(t'-t)} + \mathrm{M}[Y(t'-t)]\} = n^2e^{-\mu(t'-t)} + n\lambda m_x,$$

où $m_x = 1/\mu$. Par conséquent, l'espérance mathématique inconditionnelle du produit $X(t)\,X(t')$ est

$$\mathrm{M}[X(t)\,X(t')] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{M}[nX_n(t')]\,P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2e^{-\mu(t'-t)}P_n(t) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda m_x P_n(t) = \mathrm{M}[X^2(t)]\,e^{-\mu(t'-t)} + m_x^2.$$

On en tire

$$K_x(t, t') = D_x e^{-\mu(t'-t)} \text{ pour } t' > t$$

ou

$$K_x(t, t') = D_x e^{-\mu(t-t')} \text{ pour } t > t'.$$

En réunissant ces deux formules, on obtient $(\tau = t' - t)$:

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\mu|\tau|} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu|\tau|}.$$

Avec $\lambda/\mu > 20$ on peut admettre que le processus d'accumulation des éléments homogènes est pratiquement normal, et ses caractéristiques sont $m_x = \lambda/\mu$ et $k_x(\tau) = \lambda\mu^{-1}e^{-\mu|\tau|}$.

9.24. *Mouvement brownien unidimensionnel d'une particule.* Considérons sur l'axe Ox une particule qui change sa position par sauts sous l'action des collisions aléatoires avec d'autres particules (fig. 9.24, *a*). A l'instant initial la particule se trouve à l'origine des coordonnées, à l'instant T_1 de la première collision elle saute au point X_1, à l'instant T_2 de la deuxième collision son abscisse devient par saut X_2, à l'instant T_3, elle devient X_3, etc. Les variables

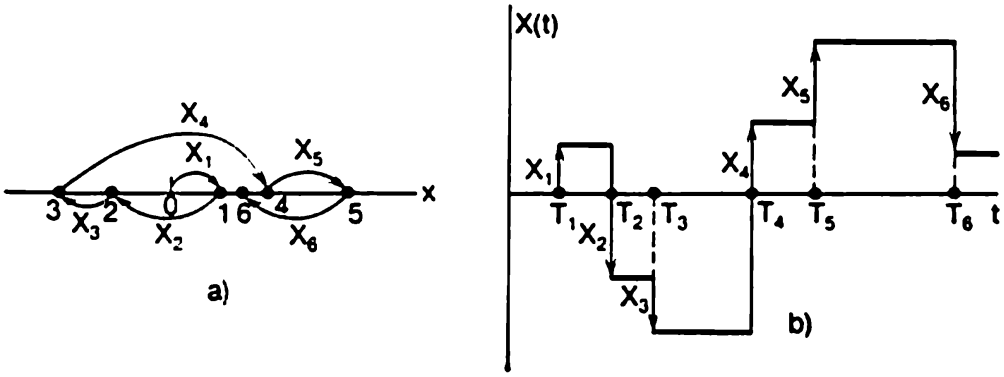


Fig. 9.24

aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ sont indépendantes et possèdent la même répartition avec $m_x = 0$ et $D_x = D$. Les instants des collisions $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$ forment un flux d'événements simple de densité λ.

On considère le processus aléatoire $X(t)$ qui est l'abscisse du point fluctuant en fonction du temps (fig. 9.24, *b*). (Les valeurs de $X(t)$ peuvent être aussi bien positives que négatives.) Le processus $X(t)$ est un modèle simplifié du mouvement brownien d'une particule. Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $X(t)$.

Solution. Le nombre d'événements dans l'intervalle $(0, t)$ est une variable aléatoire Y répartie suivant la loi de Poisson de paramètre λt. La valeur du processus $X(t)$ à l'instant t est déterminée par la formule $X(t) = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, c'est-à-dire est une somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires; de plus, toutes les variables aléatoires X_i et Y sont indépendantes. Tout comme dans le problème 9.20, on a

$$m_x(t) = \mathrm{M}[Y]\,\mathrm{M}[X_i] = 0 \text{ puisque } \mathrm{M}[Y] = \lambda t;\ \mathrm{M}[X_i] = m_x = 0;$$
$$D_x(t) = \mathrm{M}[Y]\,D[X_i] + D[Y]\,\mathrm{M}[X_i]^2 =$$
$$= \lambda t D \quad \text{puisque} \quad \mathrm{D}[X_i] = D.$$

D'une façon analogue à la solution du problème 9.20, pour un t suffisamment grand la section de la fonction aléatoire $X(t)$ suit pratiquement la loi normale de paramètres trouvés.

Cherchons la fonction de corrélation du processus $X(t)$ en considérant à cet effet deux de ses sections: $X(t)$ et $X(t')$ $(t' > t)$. Il est évident que $X(t') = X(t) + Y(t' - t)$; ici, tout comme dans le problème 9.20, le processus aléatoire $Y(t' - t) = \sum_{i=1}^{Z} X_i$, où Z est le nombre d'événements apparus dans le flux dans l'intervalle de temps $t' - t$. Nous avons montré dans ce qui précède que les processus aléatoires $X(t)$, $X(t')$ et $Y(t' - t)$ ont une espérance mathématique nulle. Donc, pour $t' > t$

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[X(t)\,X(t')] = \mathrm{M}[X(t)\,\{X(t) + Y(t' - t)\}] =$$
$$= \mathrm{M}[X^2(t)] + \mathrm{M}[X(t)\,Y(t' - t)] =$$
$$= D_x(t) + \mathrm{M}[X(t)]\,\mathrm{M}[Y(t' - t)] = D_x(t).$$

Avec $t' < t$ on obtient $K_x(t, t') = D_x(t')$. De la sorte,

$$K_x(t, t') = D\lambda \min(t, t').$$

Le processus aléatoire $X(t)$ considéré est un processus à accroissements indépendants.

Note. Le processus du mouvement aléatoire unidimensionnel d'une particule possède les mêmes caractéristiques que le processus $Y(t) = X(t) - \lambda t$ où $X(t)$ est un processus de Poisson, bien que leurs relations diffèrent sensiblement (comparez fig. 9.13, *e* et 9.24, *b*).

9.25. *Processus de Wiener.* On considère le comportement limite d'un processus aléatoire $X(t)$ qui est un mouvement brownien unidimensionnel d'une particule (voir problème 9.24) lors d'une croissance illimitée de la densité λ du flux des collisions et d'une décroissance illimitée simultanée de la variance D du déplacement de la particule; ceci, en respectant la condition $\lambda D = \alpha = \text{const}$. Montrer que dans ce cas limite, à des intervalles de temps suffisamment éloignés de l'origine, le processus est un processus de Wiener.

Solution. La condition $m_x(t) = 0$ se déduit de l'énoncé du problème précédent; l'indépendance des accroissements et l'allure normale du processus pour $t \to \infty$ sont également montrés dans le problème précédent.

$$\mathrm{D}[X(t_1) - X(t_2)] = \mathrm{M}[(X(t_1) - X(t_2))^2] \quad \text{puisque} \quad m_x = 0;$$
$$\mathrm{M}[(X(t_1) - X(t_2))^2] = \mathrm{M}[X^2(t_1) + X^2(t_2) - 2X(t_1)\,X(t_2)] =$$
$$= \mathrm{D}[X(t_1)] + \mathrm{D}[X(t_2)] - 2K_x(t_1, t_2).$$

Dans le problème précédent on a montré que $D[X(t)] = \lambda Dt$; $K_x(t_1, t_2) = \lambda D \min\{t_1, t_2\}$. On en tire pour $t_2 > t_1$

$$D[X(t_1) - X(t_2)] = \lambda Dt_1 + \lambda Dt_2 - 2\lambda D \min\{t_1, t_2\} =$$
$$= \lambda Dt_1 + \lambda Dt_2 - 2\lambda Dt_1 = \lambda D(t_2 - t_1);$$

il s'ensuit que le processus est celui de Wiener.

9.26. Une fonction aléatoire $X(t)$ est constituée de la façon suivante. Au point $t = 0$ elle prend avec la même probabilité 1/2 d'une façon aléatoire l'une des valeurs $+1$ ou -1 et reste constante jusqu'à $t = 1$. Au point $t = 1$ elle prend de nouveau, avec la même probabilité 1/2 et indépendamment de la valeur qu'elle avait dans l'intervalle précédent, la valeur $+1$ ou -1 pour la conserver jusqu'au point

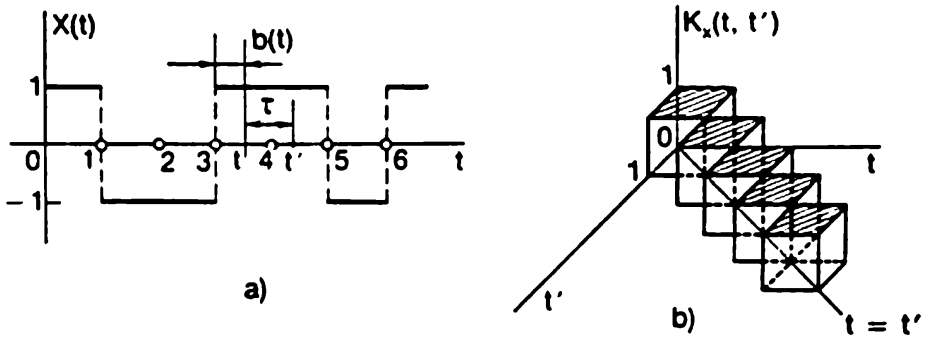


Fig. 9.26

à valeur entière $t = 2$ suivant, etc. En général, la fonction $X(t)$ est constante dans tout intervalle de n à $n + 1$, où n est un nombre naturel, alors qu'à la limite de chaque frontière de chaque nouvel intervalle, elle prend indépendamment des intervalles précédents, l'une des valeurs $+1$ ou -1 avec une probabilité 1/2 (une des réalisations possibles de la fonction aléatoire $X(t)$ est représentée sur la figure 9.26, *a*). Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$, ses espérance mathématique, variance et fonction de corrélation. Déterminer si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire.

Solution. $m_x(t) = m_x = (-1)\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$; $D_x(t) = D_x = (-1)^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{2} = 1$.

Cherchons la fonction de corrélation $K_x(t, t')$. Si les points t et t' se rapportent au même intervalle $(n, n + 1)$, où n est un entier, alors $K_x(t, t') = D_x = 1$; dans le cas contraire, $K_x(t, t') = 0$. Ce résultat peut s'écrire sous une forme plus condensée si on désigne par

$b(t)$ la partie fractionnaire du nombre t (voir fig. 9.26, *a*). On obtient alors ($\tau = t' - t$):

$$K_x(t, t') = \begin{cases} 1 \text{ pour } |\tau| < 1 - b(\min\{t, t'\}); \\ 0 \text{ pour } |\tau| > 1 - b(\min\{t, t'\}), \text{ où } \tau = t' - t. \end{cases}$$

Cette fonction dépend non seulement de $\tau = t' - t$, mais encore de la position sur l'axe Ox de l'intervalle (t, t'); par conséquent, la fonction $X(t)$ n'est pas stationnaire.

La surface $K_x(t, t')$ se présente comme une série de cubes à arête égale à l'unité, posés sur le plan tOt' le long de la bissectrice du premier angle de coordonnée, sur laquelle $t = t'$, de façon que les diagonales des bases coïncident avec la bissectrice (fig. 9.26, *b*).

9.27. Une fonction aléatoire $X(t)$ est formée de la même façon que dans le problème précédent, à cette différence près que les points

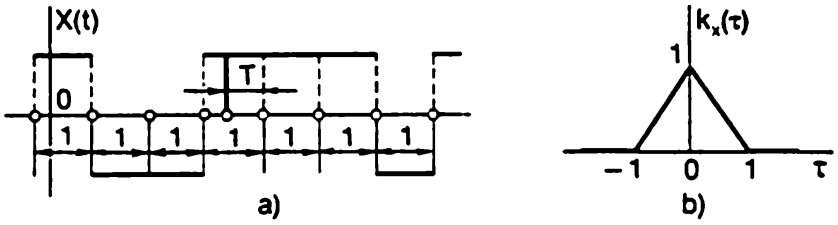


Fig. 9.27

où « se joue la partie » de la nouvelle valeur de la fonction aléatoire ne sont pas fixés sur l'axe Ot, mais occupent sur lui une position aléatoire en gardant entre eux la distance constante égale à l'unité (fig. 9.27, *a*). Toutes les positions de l'origine par rapport à la succession des instants du « jeu de la partie » sont équiprobables. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$: espérance mathématique, variance et fonction de corrélation; déterminer si la fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire.

Solution. Tout comme dans le cas précédent, $m_x(t) = m_x = 0$; $D_x(t) = D_x = 1$.

Cherchons la fonction de corrélation. Fixons l'instant t (fig. 9.27, *a*). Cet instant est aléatoire par rapport aux points où la fonction aléatoire $X(t)$ prend des valeurs nouvelles. Désignons par T l'intervalle de temps qui sépare le point t du point le plus proche, où « se joue » la nouvelle valeur de $X(t)$. La variable aléatoire T est répartie uniformément dans l'intervalle de 0 à 1. Soit $t' > t$; $\tau = t' - t > 0$. Si $\tau < T$, $K_x(t, t') = 1$; si $\tau > T$, $K_x(t, t') = 0$. Donc, pour $0 < \tau < 1$

$$K_x(t, t') = \mathrm{P}(T > \tau) \cdot 1 + \mathrm{P}(T < \tau) \cdot 0 = \mathrm{P}(T > \tau) = 1 - \tau.$$

D'une façon analogue, pour $\tau < 0$

$$K_x(t, t') = 1 + \tau \quad \text{pour} \quad -1 < \tau < 0.$$

Il s'ensuit

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{pour } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{pour } |\tau| > 1. \end{cases} \qquad (9.27)$$

Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 9.27, *b*. Puisque $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, la fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire.

La fonction de corrélation (9.27) peut s'écrire sous une forme plus condensée à l'aide de la fonction unitaire $1(x)$:

$$k_x(\tau) = (1 - |\tau|)\, 1(1 - |\tau|).$$

9.28. L'énoncé du problème précédent est modifié dans le sens qu'à chacun des instants aléatoires T_i séparés par des intervalles unitaires, la fonction aléatoire $X(t)$, prend, indépendamment des autres, la valeur U_i, variable aléatoire d'espérance mathématique m_u et de variance D_u, qu'elle conserve jusqu'à l'instant suivant. Une des réalisations d'une telle fonction aléatoire est représentée sur la figure 9.28. Trouver les caractéristiques de cette fonction : espérance mathématique, variance et fonction de corrélation ; déterminer si la fonction aléatoire est stationnaire et si c'est oui, quelle est sa densité spectrale.

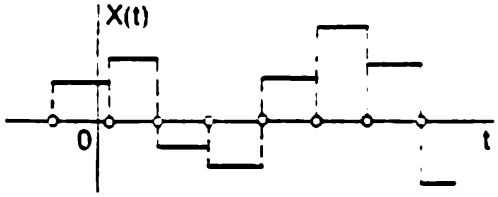


Fig. 9.28

Solution. Raisonnant exactement de la même façon que dans le problème précédent, on trouve

$$m_x(t) = \mathrm{M}[X(t)] = m_u; \quad D_x(t) = D[X(t)] = D_u;$$

$$k_x(\tau) = \begin{cases} D_u(1 - |\tau|) & \text{pour } |\tau| < 1 \\ 0 & \text{pour } |\tau| > 1 \end{cases} = D_u(1 - |\tau|)\, 1(1 - |\tau|).$$

La fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire. Sa densité spectrale $S_x^*(\omega) = D_u(1 - \cos\omega)/(\pi\omega^2)$.

9.29. La fonction aléatoire $X(t)$ est une fonction en escalier (fig. 9.29, *a*) qui à des intervalles unitaires prend tour à tour les valeurs $+1$ et -1. La position de la fonction en escalier par rapport à l'origine est aléatoire ; la variable aléatoire T qui détermine le décalage du premier point du changement de signe par rapport à l'origine des coordonnées, est une variable aléatoire répartie uni-

formément dans l'intervalle (0, 1). Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$: espérance mathématique, variance et fonction de corrélation.

Solution. Considérons la section de la fonction aléatoire $X(t)$; avec la même probabilité elle peut tomber aussi bien dans l'inter-

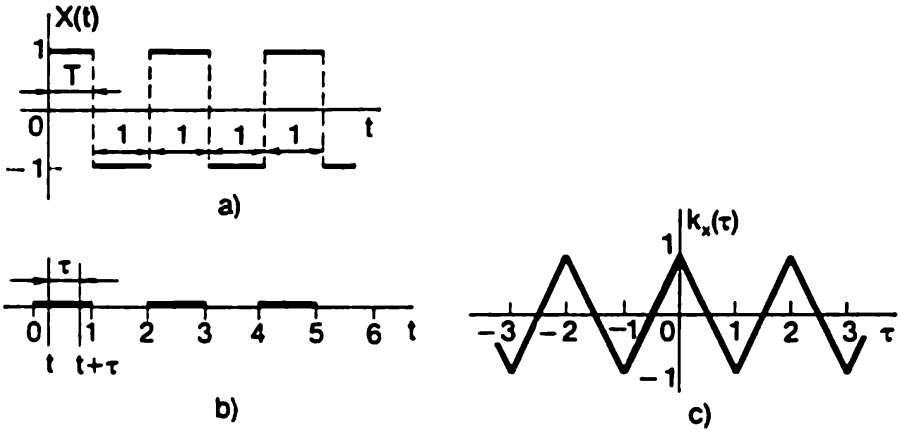


Fig. 9.29

valle où la fonction aléatoire est égale à $+1$ que dans celui où elle vaut -1. Par conséquent, le tableau de répartition de toute section est de la forme

$$X(t): \left| \begin{array}{c|c} -1 & +1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right|,$$

d'où $m_x = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$ et $D_x = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Cherchons la fonction de corrélation ($\tau = t' - t$; $t' > t$) :

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t+\tau)] = \mathrm{M}[X(t)\,X(t+\tau)].$$

Le produit $X(t)\,X(t+\tau)$ pouvant prendre seulement deux valeurs ($+1$ ou -1), il vient $M[X(t)\,X(t+\tau)] = 1p_1 + (-1) \times \times (1 - p_1) = 2p_1 - 1$, où p_1 est la probabilité pour que les points t et $t + \tau$ tombent dans les intervalles où $X(t)$ et $X(t + \tau)$ aient le même signe.

En vertu de la répartition uniforme du décalage T de la figure 9.29, *a*, nous pouvons reporter l'origine à l'extrémité gauche de l'intervalle où se trouve le point t, et admettre que le point t est réparti uniformément dans l'intervalle (0 ; 1) (fig. 9.29, *b*). Dans cette interprétation, p_1 est la probabilité pour que le point $(t + \tau)$ tombe dans l'un quelconque des intervalles de la forme $(2n, 2n + 1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (sur la figure 9.29, *b*, ces intervalles sont

marqués par de gros traits); calculons cette probabilité pour de différentes valeurs de τ.

Pour $0 < \tau < 1$, le point $(t + \tau)$ peut tomber soit dans l'intervalle (0; 1), soit dans l'intervalle (1; 2); donc

$$p_1 = \mathrm{P}\ \{t + \tau < 1\} = \mathrm{P}\ \{t < 1 - \tau\} = 1 - \tau.$$

Pour $1 < \tau < 2$ le point $t + \tau$ peut tomber soit dans l'intervalle (1; 2), soit dans l'intervalle (2; 3); donc

$$p_1 = \mathrm{P}\ \{t + \tau > 2\} = \mathrm{P}\ \{t > 2 - \tau\} = 1 - (2 - \tau) = \tau - 1.$$

En poursuivant ces raisonnements, on obtient

$$p_1 = \begin{cases} 1 - (\tau - 2n) & \text{pour } 2n < \tau < 2n + 1\,; \\ (\tau - 2n) - 1 & \text{pour } 2n + 1 < \tau < 2n + 2. \end{cases}$$

Ceci rend clair que p_1 et, par suite, $K_x(t, t + \tau) = 2p_1 - 1$, dépendent seulement de τ et sont une fonction paire de τ. Par conséquent,

$$K_x(t, t + \tau) = K_x(\tau) = \begin{cases} 4n + 1 - 2\tau & \text{pour } 2n < \tau < 2n + 1\,; \\ 2\tau - (4n + 3) & \text{pour } 2n + 1 < \tau < 2n + 2. \end{cases}$$

Le graphique de la fonction de corrélation est représenté sur la figure 9.29, *c*.

9.30. Une fonction aléatoire $X(t)$ représente une suite des impulsions de tension positives équidistantes de même largeur $\gamma < 1/2$.

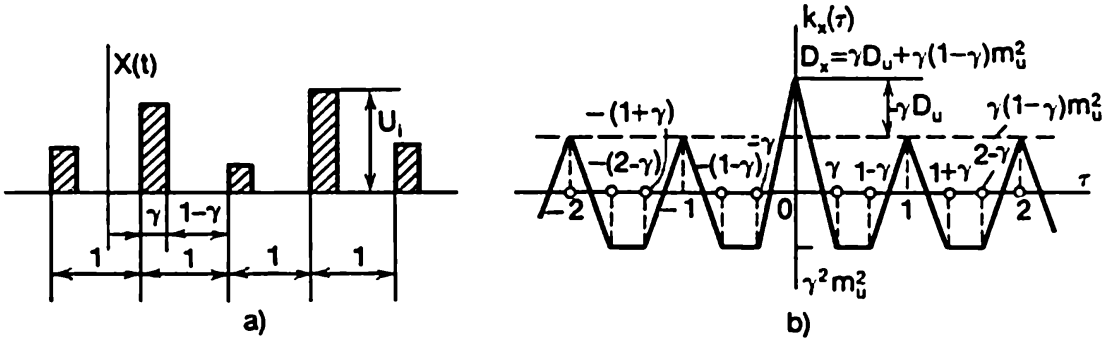


Fig. 9.30

Le début de chaque impulsion est séparé du début de l'impulsion suivante par un intervalle unitaire (fig. 9.30, *a*). La suite des impulsions occupe par rapport à l'axe Ot une position aléatoire (voir l'énoncé du problème précédent). La tension de l'i-ième impulsion U_i est aléatoire ($i = 1, 2, \ldots$). Toutes les variables aléatoires U_i sont réparties suivant la même loi d'espérance mathématique m_u et de variance D_u, et sont indépendantes. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$: espérance mathématique, variance, fonction de corrélation.

Solution. D'après la formule de l'espérance mathématique totale $m_x = m_u\gamma + 0\,(1-\gamma) = m_u\gamma$. La variance se calcule à l'aide du moment initial d'ordre deux $\alpha_2\,[X\,(t)] = \alpha_2\,[U_i]\gamma + 0\,(1-\gamma) = (D_u + m_u^2)\,\gamma$, d'où

$$D_x = \alpha_2\,[X\,(t)] - m_x^2 = (D_u + m_u^2)\,\gamma - m_u^2\gamma = \\ = \gamma D_v + \gamma\,(1-\gamma)\,m_u^2.$$

Dans notre cas la fonction aléatoire $X\,(t)$ n'est pas centrée. Cherchons la fonction de corrélation à l'aide du moment initial deux mixte

$$K_x\,(t,\ t+\tau) = \mathrm{M}\,[X\,(t)\,X\,(t+\tau)] - m_x^2.$$

Calculons $\mathrm{M}\,[X\,(t)\,X\,(t+\tau)]$. Utilisons à cet effet la formule de l'espérance mathématique totale. Tout comme dans le problème précédent, présentons l'axe Ot comme couvert par des intervalles alternatifs: les intervalles hachurés correspondent aux impulsions, et clairs, aux espacements entre eux. Désignons par T la valeur aléatoire de la limite gauche de l'intervalle $(T,\ T+\tau)$. Trois hypothèses sont possibles:

H_1: les deux points T et $T+\tau$ tombent dans l'intervalle de la même impulsion;

H_2: l'un des points T, $T+\tau$ tombe dans l'intervalle de l'une des impulsions, et l'autre, dans celui d'une autre;

H_3: au moins un des points T, $T+\tau$ se trouve hors des intervalles des impulsions quelconques.

Pour la première hypothèse, les variables $X\,(t)$ et $X\,(T+\tau)$ coïncident et $\mathrm{M}\,[X\,(T)\,X\,(T+\tau)] = \mathrm{M}\,[U^2] = D_u + m_u^2$. Pour la deuxième hypothèse, $X\,(T)$ et $X\,(T+\tau)$ sont des variables aléatoires indépendantes de mêmes espérances mathématiques m_u; d'après le théorème de multiplication des espérances mathématiques $\mathrm{M}\,[X\,(T)\,X\,(T+\tau)] = m_u^2$. Pour la troisième hypothèse, $\mathrm{M}\,[X\,(T)\,X\,(T+\tau)] = 0$. L'espérance mathématique totale

$$\mathrm{M}\,[X\,(t)\,X\,(t+\tau)] = \mathrm{P}\,\{H_1\}\,(D_u + m_u^2) + \mathrm{P}\,\{H_2\}\,m_u^2.$$

Les probabilités $\mathrm{P}\,\{H_1\}$ et $\mathrm{P}\,\{H_2\}$, et, par suite, la fonction de corrélation, dépendent seulement de τ:

1) pour $0 < \tau < \gamma$

$$\mathrm{P}\,\{H_1\} = \gamma - \tau;\quad \mathrm{P}\,\{H_2\} = 0;$$
$$\mathrm{M}\,[X\,(t)\,X\,(t+\tau)] = (\gamma-\tau)\,(D_u + m_u^2);$$
$$k_x\,(\tau) = (\gamma-\tau)\,(D_u + m_u^2) - \gamma^2 m_u^2;$$

2) pour $\gamma < \tau < 1-\gamma$

$$\mathrm{P}\,\{H_1\} = 0;\quad \mathrm{P}\,\{H_2\} = 0;\quad \mathrm{M}\,[X\,(t)\,X\,(t+\tau)] = 0;$$
$$k_x\,(\tau) = 0 - \gamma^2 m_u^2 = -\gamma^2 m_u^2;$$

3) pour $1 - \gamma < \tau < 1$

$$P\{H_1\} = 0; \quad P\{H_2\} = \gamma - (1 - \tau);$$
$$M[X(t)\,X(t+\tau)] = [\gamma - (1 - \tau)]\, m_u^2;$$
$$k_x(\tau) = (\gamma - 1 + \tau - \gamma^2)\, m_u^2.$$

Les intervalles ultérieurs des valeurs de τ sont traités d'une façon analogue.

Le graphique de la fonction $k_x(\tau)$ est représenté sur la figure 9.30, *b*. Pour $|\tau| > 1/2$ la courbe $k_x(\tau)$ se répète périodiquement en atteignant aux points entiers les maxima égaux à $\gamma(1 - \gamma)\, m_u^2$.

9.31*. On considère une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ qui représente une tension en dents de scie (fig. 9.31, *a*). L'origine

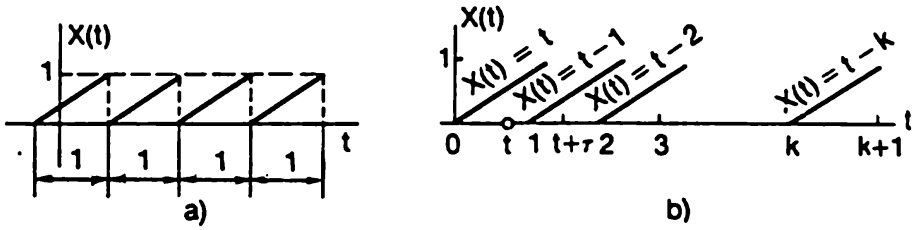


Fig. 9.31

occupe par rapport aux sommets une position aléatoire, comme dans le problème 9.29. Trouver l'espérance mathématique, la variance et la fonction de corrélation de la fonction aléatoire $X(t)$.

Solution. L'espérance mathématique m_x se trouve sans peine si l'on tient compte que pour tout t la répartition de $X(t)$ est uniforme dans l'intervalle $(0; 1)$; d'où $m_x = 1/2$.

Pour obtenir la fonction de corrélation procédons de la façon suivante: relions rigidement la suite des sommets des dents à l'axe Ot, mais, par contre, jetons sur cet axe d'une façon aléatoire l'origine t de l'intervalle $(t, t + \tau)$ (fig. 9.31, *b*). La succession des dents étant périodique, il suffit de jeter d'une façon aléatoire le point t sur le premier intervalle $(0; 1)$ en le répartissant avec une densité constante. Dans ces conditions, comme le montre la figure 9.31, *b*, $X(t) = t$, alors que la valeur $X(t + \tau)$ est égale à la partie fractionnaire du nombre $t + \tau$, c'est-à-dire que $X(t + \tau) = t + \tau - E(t + \tau)$, où $E(t + \tau)$ est la partie entière du nombre $(t + \tau)$.

Si la partie entière du nombre τ est n $(n \leqslant \tau < n + 1)$, il vient

$$E(t+\tau) = \begin{cases} n & \text{pour } t+\tau < n+1; \\ n+1 & \text{pour } t+\tau \geqslant n+1, \end{cases}$$

et donc

$$X(t+\tau) = \begin{cases} t+\tau-n & \text{pour } t < n+1-\tau, \\ t+\tau-(n+1) & \text{pour } t \geqslant n+1-\tau. \end{cases}$$

D'après la formule de l'espérance mathématique de la fonction de la variable aléatoire t, on a pour $n \leqslant \tau < n+1$

$$M[X(t)X(t+\tau)] = \int_0^1 X(t)X(t+\tau)\cdot 1\cdot dt = \int_0^{n+1-\tau} t(t+\tau-n)\,dt +$$

$$+ \int_{n+1-\tau}^1 t(t+\tau-n-1)\,dt = \frac{1}{2}(n+1-\tau)^2 + \frac{1}{2}(\tau-n) - \frac{1}{6}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Il s'ensuit que la fonction de corrélation dépend seulement de τ et pour $n \leqslant \tau \leqslant n+1$ ($n = 0$; ± 1; ± 2, ...) elle s'écrit

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = M[X(t)X(t+\tau)] - m_x^2 =$$
$$= 0{,}5(n+1-\tau)^2 + (\tau-n)/2 - 5/12.$$

C'est une fonction périodique de période 1, dont le graphique se compose de tronçons reproduits périodiquement des paraboles tournées par la convexité vers le bas. Dans l'intervalle $0 \leqslant \tau < 1$ cette parabole est de la forme $k_x(\tau) = (1-\tau)^2/2 + \tau/2 - 5/12$ avec le sommet au point $(1/2; -1/24)$. En posant $\tau = 0$, on obtient $D_x = k_x(0) = 1/12$.

9.32. On considère une transformation linéaire des n processus aléatoires $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ de la forme

$$Y(t) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) X_i(t),$$

où $\varphi_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) sont des fonctions du temps non aléatoires.

On connaît les caractéristiques des processus aléatoires $X_i(t)$: $m_i(t)$; $D_i(t)$; $K_i(t, t')$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), ainsi que les fonctions de corrélation mutuelles $R_{ij}(t, t') = M[\mathring{X}_i(t)\mathring{X}_j(t')]$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$). Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $Y(t)$.

Solution.

$$m_y(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) m_i(t);$$

$$K_y(t, t') = M[\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')] = M\left[\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\mathring{X}_i(t) \sum_{j=1}^n \varphi_j(t)\mathring{X}_j(t')\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\varphi_i(t') K_i(t, t') + \sum_{i\neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t') R_{ij}(t, t') +$$

$$+ \sum_{i\neq j} \varphi_i(t')\varphi_j(t) R_{ij}(t', t);$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t) D_i(t) + 2 \sum_{i \neq j} \varphi_i(t) \varphi_j(t) R_{ij}(t, t).$$

Si les processus aléatoires $X_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) ne sont pas corrélés ($R_{ij}(t, t') \equiv 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$), alors

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \varphi_j(t') K_i(t, t');$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t) D_i(t).$$

9.33. Soient deux fonctions aléatoires non corrélées $X(t)$ et $Y(t)$ de caractéristiques

$$m_x(t) = t^2; \quad K_x(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')};$$
$$m_y(t) = 1; \quad K_y(t, t') = e^{\alpha_2(t-t')}.$$

Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$. Résoudre ce même problème, si les fonctions aléatoires $X(t)$, $Y(t)$ sont corrélées et leur fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t') = ae^{-\alpha|t-t'|}$.

Solution. Lorsque $R_{xy}(t, t') \equiv 0$,

$$m_z = m_x(t) + tm_y(t) + t^2 = 2t^2 + t;$$
$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t-t')^2}.$$

Lorsque $R_{xy}(t, t') = a \exp\{-\alpha \mid t - t' \mid\}$, $m_z(t)$ ne change pas;

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') + t'R_{xy}(t, t') + tR_{xy}(t', t) =$$
$$= e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t-t')^2} + a(t+t')e^{-\alpha|t-t'|}.$$ a

9.34. Trouver l'espérance mathématique et la fonction de corrélation de la somme de deux fonctions aléatoires non corrélées $X(t)$ et $Y(t)$ de caractéristiques

$$m_x(t) = t; \quad K_x(t, t') = tt';$$
$$m_y(t) = -t; \quad K_y(t, t') = tt'e^{\alpha(t+t')}.$$

Réponse. $m_z(t) = m_x(t) = m_y(t) = 0$; $K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') = tt'[1 + e^{\alpha(t+t')}]$.

9.35. Soit une fonction aléatoire complexe $Z(t) = X(t) + iY(t)$, où i est l'unité imaginaire; $X(t)$, $Y(t)$ sont les fonctions aléatoires non corrélées de caractéristiques

$$m_x(t) = t^2; \quad K_x(t, t') = e^{-\alpha(t-t')^2};$$
$$m_y(t) = 1; \quad K_y(t, t') = e^{2\alpha_2(t+t')}.$$

Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $Z(t)$: $m_z(t)$; $K_z(t, t')$ et $D_z(t)$.

Réponse. $m_z(t) = t^2 + \mathrm{i}$; $K_z(t, t') = \mathrm{e}^{-\alpha_1(t-t')^2} + \mathrm{e}^{2\alpha_2(t+t')}$;

$$D_z(t) = K_z(t, t') = 1 + \mathrm{e}^{4\alpha_2 t}.$$

9.36. Une fonction aléatoire complexe est donnée sous la forme $Z(t) = X(t) + \mathrm{i}Y(t)$, où

$$X(t) = \sum_{k=1}^{3} (a_k + V_k)\,\mathrm{e}^{-\alpha_k t};$$

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{3} (b_k + U_k)\,\mathrm{e}^{-\beta_k t}.$$

Les espérances mathématiques de toutes les variables aléatoires V_k et U_k ($k = 1, 2, 3$) sont nulles, alors que la matrice de corrélation du système de variables aléatoires (V_1, V_2, V_3, U_1, U_2, U_3) est de la forme

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 3 \end{Vmatrix}.$$

Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $Z(t)$.

Réponse. $m_z(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \mathrm{e}^{-\alpha_k t} + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} b_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}$;

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + \mathrm{i}\,[K_{xy}(t', t) - K_{xy}(t, t')],$$

où

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{3} k\mathrm{e}^{-\alpha_k(t+t')};$$

$$K_y(t, t') = \sum_{k=1}^{3} k\mathrm{e}^{-\beta_k(t+t')};$$

$$K_{xy}(t', t) = \mathrm{e}^{-\alpha_1 t' - \beta_1 t} - \mathrm{e}^{-\alpha_2 t' - \beta_2 t} + 3\mathrm{e}^{-\alpha_3 t' - \beta_3 t};$$

$$K_{xy}(t, t') = \mathrm{e}^{-\alpha_1 t - \beta_1 t'} - \mathrm{e}^{-\alpha_2 t - \beta_2 t'} + 3\mathrm{e}^{-\alpha_3 t - \beta_3 t'}.$$

9.37. *Fonction de corrélation d'un produit.* On considère deux fonctions aléatoires centrées non corrélées $X(t)$ et $Y(t)$ et leur produit $Z(t) = X(t)\,Y(t)$.

Démontrer que la fonction de corrélation d'un produit est égale au produit des fonctions de corrélation des facteurs : $K_z(t, t') = K_x(t, t')\,K_y(t, t')$.

Solution. $K_z(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{Z}(t)\mathring{Z}(t')]$; $\mathring{Z}(t) = \dot{Z}(t) - m_z(t)$. Les fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ étant non corrélées et centrées, $m_z(t) = m_x(t)\, m_y(t) = 0$; on en tire

$$\mathring{Z}(t) = \mathring{X}(t)\mathring{Y}(t) = X(t)\,Y(T)\,;$$

$$K_z(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t)\mathring{X}(t')\mathring{Y}(t')] =$$

$$= \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t')]\,\mathrm{M}[\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')] = K_x(t, t')\,K_y(t, t').$$

En particulier, pour $t = t'$

$$D_z(t) = D_x(t)\,D_y(t).$$

9.38. Démontrer que la fonction de corrélation d'un produit des fonctions aléatoires centrées indépendantes $Z(t) = \prod_{i=1}^{n} X_i(t)$ est égale au produit des fonctions de corrélation des facteurs

$$K_x(t, t') = \prod_{i=1}^{n} K_{x_i}(t, t').$$

Solution. La démonstration est analogue à la précédente à cette différence près que dans ce cas pour qu'on puisse appliquer le théorème de multiplication des espérances mathématiques, le fait que les facteurs sont non corrélés ne suffit pas, alors que leur indépendance suffit.

9.39. La fonction aléatoire $X(t)$ de caractéristiques $m_x(t) = 0$, $K_x(t, t')$ subit la transformation linéaire non homogène

$$Y(t) = L_t^{(0)}\{X(t)\} + \varphi(t),$$

où $\varphi(t)$ est une fonction non aléatoire. Trouver la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t')$.

Solution. On a $\mathring{X}(t) = X(t)$; $\mathring{Y}(t) = L_t^{(0)}\{X(t)\} = L_t^{(0)}\{\mathring{X}(t)\}$ puisque en centrant la fonction aléatoire $Y(t)$ le terme non aléatoire $\varphi(t)$ s'« annihile » ; on en tire

$$R_{xy}(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t')] = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,L_{t'}^{(0)}\{\mathring{X}(t')\}] =$$

$$= L_{t'}^{(0)}\{\mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t')]\} = L_{t'}^{(0)}\{K_x(t, t')\}.$$

9.40. *Caractéristiques de la dérivée d'un processus aléatoire.* Soit un processus aléatoire $X(t)$ d'espérance mathématique $m_x(t)$ et de fonction de corrélation $K_x(t, t')$. Trouver les caractéristiques $m_y(t)$, $K_y(t, t')$ et $D_y(t)$ de sa dérivée $Y(t) = dX(t)/dt$. Trouver également la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t')$.

Solution. La fonction aléatoire $Y(t)$ est liée à $X(t)$ par une transformation linéaire homogène. En appliquant les règles générales (9.0.7), (9.0.8) et (9.0.9), on obtient

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}; \quad K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t\, \partial t'};$$

$$D_y(t) = [K_y(t, t')]_{t=t'} = \left[\frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t\, \partial t'}\right]_{t=t'};$$

$$R_{xy}(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t')] = \mathrm{M}\left[\mathring{X}(t)\frac{d}{dt'}\mathring{X}(t')\right] = \frac{\partial}{\partial t'}K_x(t, t').$$

Notons que

$$R_{yx}(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}K_x(t, t').$$

9.41. Les caractéristiques d'une fonction aléatoire $X(t)$ sont $m_x(t) = 1$ et $K_x(t, t') = e^{\alpha(t+t')}$. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $Y(t) = t\frac{d}{dt}X(t) + 1$. Déterminer si les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sont stationnaires.

Solution. En vertu de la linéarité de la transformation $t\frac{dX(t)}{dt} + 1$

$$m_y(t) = t\frac{d}{dt}m_x(t) + 1 = 1;$$

$$K_y(t, t') = tt'\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'}K_x(t, t') = tt'\alpha^2 e^{\alpha(t+t')}.$$

Aucune des fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ n'est stationnaire puisque leurs fonctions de corrélation dépendent non seulement de $\tau = t' - t$, mais encore de chacun des arguments t, t'.

9.42. Une fonction aléatoire $X(t)$ a les caractéristiques

$$m_x(t) = t^2 - 1; \quad K_x(t, t') = 2e^{-\alpha(t'-t)^2}.$$

Déterminer les caractéristiques des fonctions aléatoires

$$Y(t) = tX(t) + t^2 + 1; \quad Z(t) = 2t\frac{d}{dt}X(t) + (1-t)^2;$$

$$U(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2} + 1.$$

Solution. $m_y(t) = tm_x(t) + t^2 + 1 = t^3 + t^2 - t + 1;$

$$K_y(t, t') = 2tt'e^{-\alpha(t'-t)^2};$$

$$m_z(t) = 2t\frac{d}{dt}m_x(t) + (1-t)^2 = 1 - 2t + 5t^2;$$

$$K_z(t) = 4tt'\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'}K_x(t, t') = 16\alpha tt'e^{-\alpha(t-t')^2}[1 - 2\alpha(t-t')^2];$$

$$m_u(t) = \frac{d^2}{dt^2}m_x(t) + 1 = 3;$$

$$K_u(t, t') = \frac{\partial^4}{\partial t^2[\partial t']^2}K_x(t, t').$$

En calculant $K_z(t, t')$ nous avons déjà trouvé $\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} K_x(t, t')$; par conséquent,

$$K_u(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} \{4\alpha e^{-\alpha(t-t')^2} [1 - 2\alpha (t-t')^2] =$$

$$= 8\alpha^2 e^{-\alpha(t-t')^2} [3 + 4\alpha^2 (t'-t)^4 - 12\alpha (t-t')^2].$$

9.43. La fonction aléatoire $X(t)$ est donnée par l'expression $X(t) = V \cos \omega t$, où V est une variable aléatoire de caractéristiques $m_v = 2$; $\sigma_v = 3$. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$: $m_x(t)$; $K_x(t, t')$; $D_x(t)$. La fonction aléatoire $X(t)$ est-elle stationnaire? Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $Y(t) = X(t) + \alpha \frac{d}{dt} X(t)$, où α est une grandeur non aléatoire. La fonction $Y(t)$ est-elle stationnaire?

Solution. $m_x(t) = m_v \cos \omega t = 2 \cos \omega t$;

$$K_x(t, t') = D_v \cos \omega t \cos \omega t' = 9 \cos \omega t \cos \omega t';$$

$$D_x(t) = 9 (\cos \omega t)^2.$$

La fonction aléatoire $Y(t)$ peut être mise sous la forme:

$$Y(t) = V \cos \omega t + \alpha \frac{d}{dt} V \cos \omega t = V (\cos \omega t - \alpha\omega \sin \omega t);$$

on en tire $m_y(t) = m_v (\cos \omega t - \alpha\omega \sin \omega t) = 2 (\cos \omega t - \alpha\omega \sin \omega t)$;

$$K_y(t, t') = 9 (\cos \omega t - \alpha\omega \sin \omega t) (\cos \omega t' - \alpha\omega \sin \omega t');$$

$$D_y(t) = 9 (\cos \omega t - \alpha\omega \sin \omega t)^2.$$

Les fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ sont non stationnaires.

9.44. Un central téléphonique reçoit un flux simple d'appels de densité λ. La fonction aléatoire $X(t)$ est le nombre d'appels reçus pendant un temps t (voir problème 9.13). Trouver les caractéristiques de sa dérivée $Y(t)$.

Solution. Dans le sens courant une fonction aléatoire discontinue qui constitue un processus de Poisson, n'est pas dérivable; pourtant, en utilisant la fonction delta généralisée, on peut écrire les caractéristiques de la dérivée. La transformation $Y(t) = dX(t)/dt$ qui associe la fonction aléatoire $Y(t)$ à $X(t)$ est une transformation linéaire homogène. C'est pourquoi en vertu du problème 9.13

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} t\lambda = \lambda;$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial}{\partial t'} [\lambda t 1(t'-t) + \lambda t' 1(t-t')] \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} [\lambda (t-t') \delta(t-t') + \lambda 1(t-t')];$$

mais

$$(t-t')\,\delta(t-t) \equiv 0,$$

d'où

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda 1(t-t')) = \lambda\delta(t-t') = \lambda\delta(\tau).$$

De la sorte, la fonction de corrélation de la fonction aléatoire $Y(t)$ est proportionnelle à la fonction delta, c'est-à-dire que la fonction $Y(t)$ constitue un bruit blanc stationnaire de densité $G = \lambda$ et à niveau moyen $m_y = \lambda$. La densité spectrale d'un tel bruit blanc s'écrit :

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\delta(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,dt = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

9.45. Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $Y(t)$ égal à la dérivée du processus de Wiener $X(t)$ (voir problème 9.25) : $Y(t) = \frac{d}{dt}X(t)$.

Solution. Puisque $m_x(t) = 0$, $m_y(t) = 0$. Les fonctions de corrélation des processus de Wiener et de Poisson sont égales (à un facteur constant près). La fonction de corrélation du processus de Wiener (voir solution du problème précédent) est donc proportionnelle à la fonction delta, le processus $Y(t)$ lui-même présentant un bruit blanc stationnaire.

9.46. Démontrer que la dérivée du processus aléatoire homogène (mouvement brownien) d'une particule (voir problème 9.24) est un bruit blanc stationnaire.

Indication. Utiliser la solution du problème 9.44.

9.47. *Caractéristiques de l'intégrale d'un processus aléatoire.* Soit un processus aléatoire $X(t)$ de caractéristiques $m_x(t)$; $K_x(t, t')$. Trouver les caractéristiques $m_y(t)$, $K_y(t, t')$ de l'intégrale de ce processus aléatoire $Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau$, ainsi que la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t')$.

Solution. $m_y(t) = \int_0^t m_x(t)\,dt$;

$$K_y(t, t') = \int_0^t\int_0^{t'} K_x(\tau, \tau')\,d\tau\,d\tau',$$

$$D_y(t) = \int_0^t\int_0^{t'} K_x(\tau, \tau')\,d\tau\,d\tau' ;$$

$$R_{xy}(t, t') = \int_0^{t'} K_x(t, \tau')\, d\tau'.$$

Notons que

$$R_{yx}(t, t') = \int_0^{t} K_x(\tau, t')\, d\tau.$$

On peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $X(t)$ différente de zéro telle que $Y(t)$ soit stationnaire.

9.48. Les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$ sont $m_x(t) = 0$; $K_x(t, t') = [1 - (t' - t)^2]^{-1}$. Trouver les caractéristiques de la variable aléatoire $Y(t) = \int_0^t X(t)\, dt$. Déterminer si les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sont stationnaires.

Solution. En vertu de la linéarité de la transformation $\int_0^t X(t)\, dt$

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(t)\, dt = 0;$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t dt \int_0^{t'} K_x(t, t')\, dt' = \int_0^t \left(\int_0^{t'} [1 + (t' - t)^2]^{-1}\, dt' \right) dt =$$

$$= t \operatorname{arctg} t + t' \operatorname{arctg} t' - (t - t') \operatorname{arctg}(t - t') -$$

$$- \frac{1}{2} \ln \{(1 + t^2)(1 + t'^2)[1 + (t - t')^2]^{-1}\}.$$

La fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire: $K_x(t, t') = K_x(t - t')$; la fonction aléatoire $Y(t) = \int_0^t X(t)\, dt$ n'est pas stationnaire. En effet, la variance de la fonction aléatoire est égale à $D_y(t) = K_y(t, t') = 2t \operatorname{arc\,tg} t - \ln(1 + t^2)$, c'est-à-dire qu'elle dépend de t.

9.49. Une fonction aléatoire $X(t)$ de caractéristiques $m_x(t) = t^2 + 3$ et $K_x(t, t') = 5tt'$ subit la transformation linéaire de la forme

$$Y(t) = \int_0^t \tau X(\tau)\, d\tau + t^3.$$

Déterminer les caractéristiques de la fonction aléatoire $Y(t)$: $m_y(t)$; $K_y(t, t')$.

Solution. $m_y(t) = \int_0^t \tau(\tau^2+3)\,d\tau + t^3 = \frac{t^4}{4} + \frac{3}{2}t^2 + t^3$.

La partie homogène de la transformation linéaire considérée

$$L_t^{(0)}\{X(t)\} = \int_0^t \tau X(\tau)\,d\tau.$$

Par conséquent

$$K_y(t, t') = \int_0^t d\tau \int_0^{t'} \tau\tau' K_x(\tau, \tau')\,d\tau' =$$

$$= 5\int_0^t \tau\tau \left(\int_0^{t'} \tau'\tau'\,d\tau'\right) d\tau = \frac{5}{9}t^3(t')^3.$$

9.50. Une fonction aléatoire $X(t)$ de caractéristiques $m_x(t) = 0$ et $K_x(t, t') = 3e^{-(t+t')}$ subit la transformation linéaire de la forme

$$Y(t) = -t\frac{d}{dt}X(t) + \int_0^t \tau X(\tau)\,d\tau + \sin\omega t.$$

Trouver la covariance des variables aléatoires $X(0)$ et $Y(1)$, c'est-à-dire de deux sections des fonctions aléatoires : de $X(t)$ avec $t = 0$ et de $Y(t')$ avec $t' = 1$.

Solution. En vertu de la solution du problème précédent

$$R_{xy}(t, t') = L_{t'}^{(0)}\{K_x(t, t')\},$$

où $L_{t'}^{0}$ est la partie homogène de la transformation linéaire, appliquée à l'argument t'. Dans notre cas

$$R_{xy}(t, t') = -3t'\frac{\partial e^{-(t+t')}}{\partial t'} + 3\int_0^{t'} \tau' e^{-(t+\tau')}\,d\tau' =$$

$$= 3t'e^{-(t+t')} + 3e^{-t}[e^{-t'}(-t'-1)+1] = 3e^{-t}(1-e^{-t'}).$$

En posant $t = 0$, $t' = 1$, on obtient

$$K_{X(0),\,Y(1)} = R_{xy}(0, 1) = 3(1-e^{-1}) \approx 1{,}90.$$

9.51. Un signal d'entrée aléatoire $X(t)$ est transformé par un relai en signal de sortie aléatoire $Y(t)$ lié à $X(t)$ par une relation non linéaire $Y(t) = \operatorname{sign} X(t)$, c'est-à-dire

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } X(t) > 0, \\ 0 & \text{pour } X(t) = 0, \\ -1 & \text{pour } X(t) < 0. \end{cases}$$

Le signal d'entrée est la fonction aléatoire $X(t)$ examinée dans le problème 9.15. Trouver la loi de répartition de la section de la fonction aléatoire $Y(t)$ et ses caractéristiques $m_y(t)$, $K_y(t, t')$.

Solution. La fonction aléatoire $Y(t)$ peut prendre seulement deux valeurs: $+1$ et -1; la valeur 0 peut être négligée du fait que $P\{X(t) = 0\} = 0$. La probabilité pour que $X(t) > 0$ est égale à $p = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$. Le tableau de répartition de la variable aléatoire $X(t)$ est de la forme

$$Y(t): \left| \begin{array}{c|c} -1 & +1 \\ \hline 1-p & p \end{array} \right|.$$

On en tire $m_y = 2p - 1$; $D_y = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p)$.

Soit $\tau = t' - t$ et $t' > t$. Si en un temps τ aucun événement n'est apparu dans le flux poissonien (la probabilité de ce fait est $e^{-\lambda\tau}$), alors les valeurs de la fonction aléatoire $Y(t)$ et $Y(t')$ sont égales et la fonction de corrélation conditionnelle $K_y(t, t') = D_y = 4p(1 - p)$. Mais si en un temps τ au moins un événement s'est produit, alors $Y(t)$ et $Y(t')$ ne sont pas corrélées entre elles et la fonction de corrélation conditionnelle $K_y(t, t')$ est nulle. On en tire pour $t' > t$

$$K_y(t, t') = e^{-\lambda\tau} 4p(1-p),$$

et dans le cas général (pour des t, t' quelconques)

$$K_y(t, t') = k_y(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} 4p(1-p).$$

9.52. Le signal d'entrée aléatoire $X(t)$ examiné dans le problème 9.15 est transformé en un signal aléatoire de sortie $Y(t)$ par un relai à zone morte

$$Y(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} X(t) & \text{pour } |X(t)| > \varepsilon; \\ 0 & \text{pour } |X(t)| < \varepsilon. \end{cases}$$

où ε est la zone morte du relai.

Trouver la loi de répartition de la section de la fonction aléatoire $Y(t)$ et ses caractéristiques: l'espérance mathématique et la fonction de corrélation.

Solution. Quel que soit t, la variable aléatoire $Y(t)$ peut prendre l'une des trois valeurs -1, 0, $+1$, et possède le tableau de répartition

$$Y(t): \left| \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & +1 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \right|,$$

où

$$p_1 = \mathrm{P}\{X(t) < -\varepsilon\} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,dx;$$

$$p_2 = \mathrm{P}\{|X(t)| < \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,dx;$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

On en tire $m_y = p_3 - p_1$; $D_y = p_1 + p_3 - (p_3 - p_1)^2$.

Par des raisonnements analogues à ceux du problème précédent, déterminons la fonction de corrélation

$$k_y(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cdot [p_1 + p_3 - (p_3 - p_1)^2].$$

9.53. Une fonction aléatoire $X(t)$ est transformée en une fonction aléatoire $Y(t)$ à l'aide d'un élément non linéaire dont le fonctionnement est décrit par la formule suivante:

$$Y(t) = \begin{cases} -b\varepsilon & \text{pour } X(t) < -\varepsilon, \\ bX(t) & \text{pour } |X(t)| < \varepsilon, \\ b\varepsilon & \text{pour } X(t) > \varepsilon. \end{cases}$$

Le graphique de la relation $y(x)$ est représenté sur la figure 9.53, *a*.

L'entrée de cet élément est attaquée par une fonction aléatoire $X(t)$ examinée dans le problème 9.15. Trouver la loi de répartition unidimensionnelle de la fonction aléatoire $Y(t)$ et ses caractéristiques: l'espérance mathématique et la fonction de corrélation.

Solution. La variable aléatoire $Y(t)$, section de la fonction aléatoire $Y(t)$, possède une répartition continue dans l'intervalle ouvert $(-b\varepsilon, +b\varepsilon)$ et, d'autre part, avec une probabilité différente de zéro, des valeurs discrètes possibles $-b\varepsilon$ et $+b\varepsilon$; de la sorte, la section $Y(t)$ constitue une variable aléatoire mixte dont la fonction de répartition $F(y)$ est continue dans l'intervalle $(-b\varepsilon, +b\varepsilon)$, alors qu'aux extrémités de l'intervalle (aux points $-b\varepsilon$ et $+b\varepsilon$) elle subit

une discontinuité. Aux points de discontinuité les sauts de $F(y)$ valent

$$P\{Y(t) = -b\varepsilon\} = P\{X(t) < -\varepsilon\} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,dx = p_1;$$

$$P\{Y(t) = +b\varepsilon\} = P\{X(t) > \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)\,dx = p_2.$$

Cherchons la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y(t)$ dans l'intervalle $(-b\varepsilon, +b\varepsilon)$:

$$F(y) = P\{Y(t) < y\} = P\left\{X(t) < \frac{y}{b}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{y/b} \varphi(x)\,dx = p_1 + \int_{-\varepsilon}^{y/b} \varphi(x)\,dx \quad (-b\varepsilon < y < b\varepsilon).$$

Le graphique de répartition de $F(y)$ est représenté sur la figure 9.53, *b*.

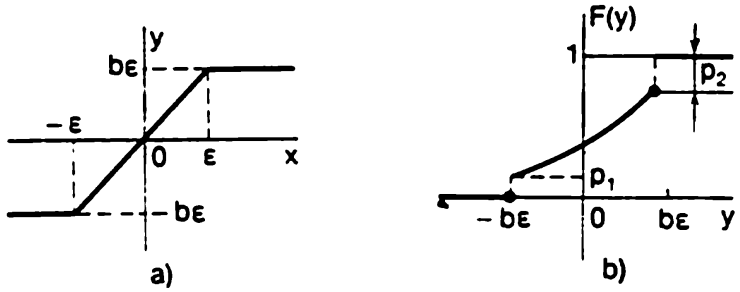


Fig. 9.53

La densité de probabilité de la variable aléatoire mixte $Y(t)$ dans l'intervalle $(-b\varepsilon, +b\varepsilon)$ est égale à la dérivée de $F(y)$ sur cet intervalle:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{b}\varphi(y/b) \quad \text{pour} \quad -b\varepsilon < y < +b\varepsilon.$$

Les caractéristiques de la fonction aléatoire $Y(t)$

$$m_y(t) = m_y = -b\varepsilon p_1 + b\varepsilon p_2 + \frac{1}{b}\int_{-b\varepsilon}^{b\varepsilon} y\varphi\left(\frac{y}{b}\right) dy =$$

$$= b\varepsilon(p_2 - p_1) + b\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\varphi(x)\,dx;$$

$$D_y(t) = \alpha_2[Y(t)] - m_y^2 = (\varepsilon b)^2(p_1 + p_2) +$$

$$+ \frac{1}{b}\int_{-b\varepsilon}^{b\varepsilon} y^2\varphi\left(\frac{y}{b}\right) dy - m_y^2 = D_y.$$

D'une façon analogue aux problèmes précédents,

$$k_y(\tau) = D_y e^{-\lambda|\tau|}.$$

9.54. On considère la fonction aléatoire $X(t) = W\cos(\omega_1 t - \Theta)$, où W est une variable aléatoire centrée de variance D_w; Θ, une variable aléatoire répartie avec une densité constante dans l'intervalle $(0; 2\pi)$, et ω_1, un paramètre non aléatoire ($\omega_1 > 0$). Les variables aléatoires W et Θ sont indépendantes. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$, son espérance mathématique et sa fonction de corrélation. Déterminer si la fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire et ergodique. Si elle est stationnaire, trouver sa densité spectrale $S_x(\omega)$.

Solution. Mettons la fonction aléatoire $X(t)$ sous la forme

$$X(t) = W\cos(\omega_1 t - \Theta) = W\cos\Theta\cos\omega_1 t + W\sin\Theta\sin\omega_1 t.$$

Introduisons la notation $W\cos\Theta = U$; $W\sin\Theta = V$. Cherchons d'abord les caractéristiques principales du système de variables aléatoires U et V:

$$\mathrm{M}[U] = \mathrm{M}[W\cos\Theta] = \mathrm{M}[W]\,\mathrm{M}[\cos\Theta] = 0;$$
$$\mathrm{M}[V] = \mathrm{M}[W\sin\Theta] = \mathrm{M}[W]\,\mathrm{M}[\sin\Theta] = 0;$$
$$\mathrm{D}[U] = \mathrm{M}[(W\cos\Theta)^2] = \mathrm{M}[W^2]\,\mathrm{M}[\cos^2\Theta] = D_w\mathrm{M}[\cos^2\Theta];$$
$$\mathrm{D}[V] = \mathrm{M}[(W\sin\Theta)^2] = \mathrm{M}[W^2]\,\mathrm{M}[\sin^2\Theta] = D_w\mathrm{M}[\sin^2\Theta];$$
$$K_{uv} = \mathrm{M}[W\cos\Theta W\sin\Theta] = D_w\mathrm{M}[\sin\Theta\cos\Theta].$$

La valeur de Θ étant répartie uniformément dans l'intervalle $(0; 2\pi)$, il vient

$$\mathrm{M}[\sin^2\Theta] = \mathrm{M}[\cos^2\Theta] = \int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{1}{2};$$

$$\mathrm{M}[\sin\Theta\cos\Theta] = \int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,\frac{1}{2\pi}\,dx = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{M}[U] = \mathrm{M}[V] = 0$; $\mathrm{D}[U] = \mathrm{D}[V] = D_w/2$; $K_{uv} = 0$. Donc l'expression

$$X(t) = W\cos(\omega_1 t - \Theta) = U\cos\omega_1 t + V\sin\omega_1 t$$

est le développement spectral de la fonction aléatoire stationnaire $m_x = 0$, et la fonction de corrélation est de la forme $k_x(\tau) = (D_w\cos\omega_1\tau)/2$. Le graphique de cette fonction est représenté sur la figure 9.54.

La fonction aléatoire $X(t)$ n'est pas une fonction ergodique, les caractéristiques trouvées d'après une seule réalisation ne coïncidant pas avec les caractéristiques déterminées d'après les réalisations multiples.

En effet, chaque réalisation de la fonction aléatoire $X(t)$ est une oscillation harmonique, dont l'amplitude constitue la valeur prise aléatoirement par la variable W. Pour chacune de telles réalisations la moyenne par rapport au temps est nulle et coïncide avec l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X(t)$, mais la variance

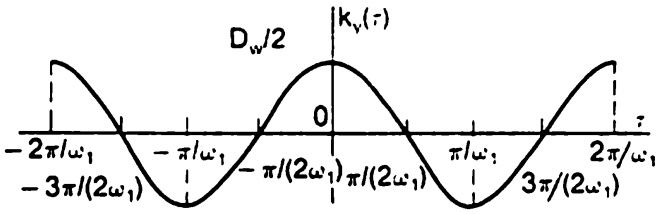


Fig. 9.54

et la fonction de corrélation trouvées comme des moyennes temporelles pour une réalisation ne coïncident déjà plus avec les caractéristiques correspondantes de la fonction aléatoire $X(t)$. Par exemple

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} W^2 \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega_1 t - \Theta)]\,dt = \frac{1}{2} W^2.$$

Cherchons la densité spectrale de la fonction aléatoire $X(t)$. Montrons qu'elle est proportionnelle à la fonction delta: $S_x(\omega) = D_w\delta(\omega - \omega_1)/2$ $(0 < \omega < \infty)$. En effet, pour une telle densité spectrale la fonction de corrélation

$$k_x(\tau) = \int_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega = \int_0^\infty \frac{D_w}{2}\delta(\omega - \omega_1)\cos\omega\tau\,d\omega = \frac{D_w}{2}\cos\omega_1\tau,$$

ce qui coïncide avec la fonction de corrélation de $X(t)$, Or, puisque les transformations de Fourier directe et inverse déterminent la densité spectrale et la fonction de corrélation d'une façon biunivoque, l'expression écrite ci-dessus pour $S_x(\omega)$ donne la densité spectrale de la fonction aléatoire $X(t)$.

Si on utilise non pas la forme réelle, mais une forme complexe de la transformation de Fourier, on obtient la densité spectrale $S_x^*(\omega)$ sous la forme

$$S_x^*(\omega) = D_w\,[\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]/4 \quad (-\infty < \omega < \infty)$$

Notons que d'une façon analogue on pourrait écrire également $S_x(\omega) = D_w[\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]/2$, mais pour des ω positifs (du fait que $\omega_1 > 0$) $\delta(\omega + \omega_1) \equiv 0$.

9.55. Montrer que la somme des fonctions aléatoires élémentaires de la forme

$$X(t) = m_x + \sum_{i=0}^{\infty} W_i \cos(\omega_i t + \Theta_i)$$

ne représente rien d'autre que le développement spectral (9.0.24) de la fonction aléatoire $X(t)$.

Ici W_i sont des variables aléatoires centrées de variance D_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$); Θ_i, une variable aléatoire répartie uniformément dans l'intervalle $(0; 2\pi)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) (de plus, toutes les variables aléatoires W_i, Θ_i sont indépendantes).

Solution. Conformément à la solution du problème précédent

$$W_i \cos(\omega_i t - \Theta_i) = U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t,$$

où U_i et V_i sont des variables aléatoires non corrélées à espérances mathématiques nulles. Donc

$$X(t) = m_x + \sum_{i=0}^{\infty} (U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t),$$

ce qu'il fallait démontrer.

9.56. On considère le processus aléatoire $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t) + b$, où $X_i(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires non corrélés de caractéristiques m_i; $k_i(\tau)$; $S_i^*(\omega)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); a_i, b, des nombres réels. Trouver les caractéristiques du processus aléatoire $Y(t)$.

Réponse. $m_y = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b$; $k_y(\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 k_i(\tau)$;

$$S_y^*(\omega) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 S_i^*(\omega).$$

Le processus aléatoire $Y(t)$ est stationnaire.

9.57. On considère le processus aléatoire $Y(t) = \prod_{l=1}^{n} X_l(t)$, où $X_l(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires indépendants de caractéristiques $m_l = 0$; $k_l(\tau)$; $S_l^*(\omega)$ ($l = 1, 2, \ldots, n$). Trouver ses caractéristiques.

Réponse. $m_y = \prod_{l=1}^{n} m_l$; $k_y(\tau) = \prod_{l=1}^{n} k_l(\tau)$;

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=1}^{n} k_l(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau.$$

Le processus $Y(t)$ est stationnaire.

9.58. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $X(t)$ représentée par son développement spectral donné par le problème 9.55.

Solution. Introduisons la notation : $W_i(\cos\omega_i t - \Theta) = X_i(t)$; alors

$$X(t) = m_x + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t).$$

Conformément à la solution des problèmes 9.54 et 9.56, on a

$$M[X(t)] = m_x\,; \quad k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{x_i}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos\omega_i\tau\,;$$

$$S_x^*(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{4}\,[\delta(\omega+\omega_i) + \delta(\omega-\omega_i)] \quad (-\infty < \omega < \infty).$$

La fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire, mais non ergodique.

9.59. On considère le produit de deux fonctions aléatoires stationnaires non corrélées $Z(t) = X(t)\,Y(t)$, la fonction aléatoire $X(t)$ étant celle du problème 9.14 (alternance aléatoire des valeurs $+1$ et -1 avec un flux simple de changements de signes), alors que la fonction aléatoire $Y(t)$ est la même que dans le problème 9.54. Trouver les caractéristiques de la variable aléatoire $Z(t)$.

Solution. On a $m_x(t) = m_y(t) = 0$; $m_z(t) = 0$; $K_x(t, t') = e^{-2\lambda|\tau|}$; $K_y(t, t') = (D_w \cos\omega_1\tau)/2$ $(\tau = t' - t)$.
Conformément au problème 9.57

$$K_z(t, t') = K_x(t, t')\,K_y(t, t') = (D_w e^{-2\lambda|\tau|} \cos\omega_1\tau)/2.$$

La figure 9.59 représente l'une des réalisations possibles de la variable aléatoire $Z(t)$, obtenue par multiplication des ordonnées correspondantes des réalisations des fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$.

9.60*. *Critère de l'allure définie positive.* Soit une fonction $k_x(\tau)$ à propriétés

1) $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$; 2) $k_x(0) > 0$; 3) $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$.

Il faut élucider si $k_x(\tau)$ peut être fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire, c'est-à-dire si elle possède la propriété d'être définie positive. Montrer que la condition suffisante de cette propriété est que la fonction

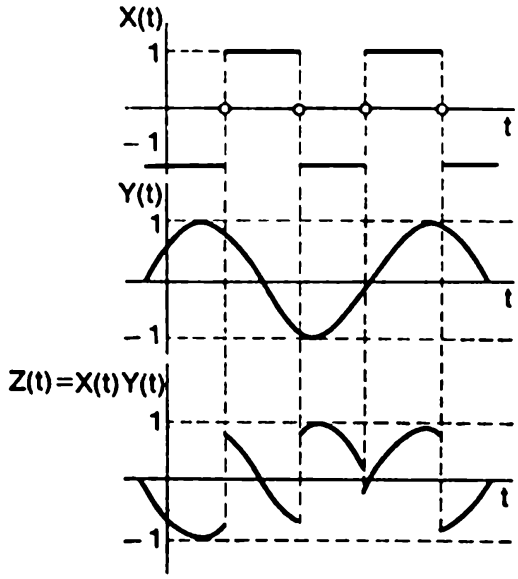


Fig. 9.59

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k_x(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \quad (9.60.1)$$

soit non négative pour toute la valeur de ω:

$$S_x(\omega) \geqslant 0, \quad (9.60.2)$$

c'est-à-dire qu'en calculant la densité spectrale d'après la formule (9.60.1) on n'obtienne pour aucun ω des valeurs négatives de cette fonction.

Solution. Supposons que $S_x(\omega) \geqslant 0$ et montrons que dans ces conditions la fonction $k_x(\tau) = k_x(t - t')$ est définie positive. On a

$$k_x(\tau) = \int_0^\infty S_x(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega = \int_0^\infty S_x(\omega) \cos \omega t \cos \omega t' \, d\omega +$$

$$+ \int_0^\infty S_x(\omega) \sin \omega t \sin \omega t' \, d\omega. \quad (9.60.3)$$

La propriété recherchée de la fonction $k_x(t - t')$ consiste dans le fait que soit respectée la condition

$$\int_{(B)} \int_{(B)} k_x(t - t') \varphi(t) \varphi(t') \, dt \, dt' \geqslant 0$$

pour toute fonction $\varphi(t)$ et tout domaine d'intégration (B).

Vérifions cette inégalité par rapport à la fonction (9.60.3)

$$\int_{(B)} \int_{(B)} \left\{ \int_0^\infty S_x(\omega) \cos \omega t \cos \omega t' \varphi(t) \varphi(t') \, d\omega + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty S_x(\omega) \sin \omega t \sin \omega t' \varphi(t) \varphi(t') \, d\omega \right\} dt \, dt' =$$

$$= \int_0^\infty S_x(\omega) \left\{ \int_{(B)} \cos \omega t \varphi(t)\, dt \int_{(B)} \cos \omega t' \varphi(t')\, dt' + \right.$$

$$\left. + \int_{(B)} \sin \omega t \varphi(t)\, dt \int_{(B)} \sin \omega t' \varphi(t')\, dt' \right\} d\omega.$$

En désignant

$$\int_{(B)} \cos \omega t \varphi(t)\, dt = \psi_1(B, \omega); \qquad \int_{(B)} \sin \omega t \varphi(t)\, dt = \psi_2(B, \omega),$$

on obtient

$$\int_{(B)} \int_{(B)} k_x(t-t') \varphi(t) \varphi(t')\, dt\, dt' =$$

$$= \int_0^\infty S_x(\omega) ([\psi_1(B, \omega)]^2 + [\psi_2(B, \omega)]^2)\, d\omega \geqslant 0,$$

étant donné que par condition $S_x(\omega) \geqslant 0$.

On peut démontrer que la condition (9.60.3) est non seulement suffisante, mais encore nécessaire pour que la fonction de corrélation soit définie positive.

9.61*. Etablir si la fonction

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\operatorname{ch} \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta |\tau| \right) \quad (\alpha > 0; \quad \beta > 0)$$

possède les propriétés d'une fonction de corrélation.

Solution. Il faut vérifier si cette fonction possède les propriétés suivantes:

1) $k_x(0) > 0$; 2) $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$; 3) $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$;

4) $S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \geqslant 0$ pour ω quelconque.

Les propriétés 1) et 2) sont évidentes. Vérifions les autres.

3) La fonction $k_x(\tau)$ est paire; donc, il suffit de l'analyser pour $\tau \geqslant 0$:

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2} e^{-(\alpha-\beta)\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) - \frac{1}{2} e^{-(\alpha+\beta)\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right).$$

Etant donné que $k_x(0) = 1$, il faut que cette expression ne dépasse pas l'unité en module. Pour $\alpha < \beta$ cette condition n'est pas respectée, puisque avec $\tau \to \infty$ l'expression $e^{-(\alpha-\beta)\tau}$ croît indéfiniment. Dans le cas $\alpha = \beta$ on obtient $k_x(\tau) \equiv 1$; pour $\alpha > \beta$,

on a $-k_x(\tau) \leqslant 1$. Ainsi, la propriété 3) est respectée seulement pour $\alpha \geqslant \beta$.

4) $$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-\beta+i\omega)\tau}\, d\tau + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta+i\omega)\tau}\, d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta+i\omega} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+i\omega}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta)^2+\omega^2} - \frac{1}{(\alpha+\beta)^2+\omega^2}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\pi} \cdot \frac{2\alpha}{[(\alpha-\beta)^2+\omega^2]\,[(\alpha+\beta)+\omega^2]}$$

pour $\alpha \geqslant \beta$ (Re est la partie réelle). Pour $\alpha = \beta$, on a $S_x^*(\omega) = \delta(\omega)$.

Ainsi, pour $\alpha \geqslant \beta$ la fonction $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right)$ possède toutes les propriétés de la fonction de corrélation. Les

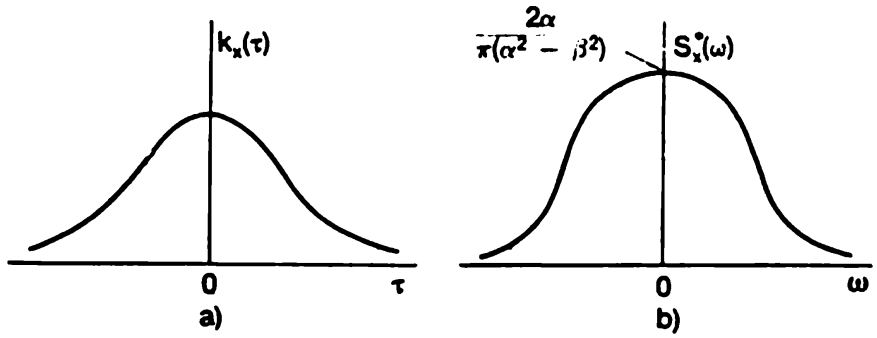


Fig. 9.61

graphiques de $k_x(\tau)$ et $S_x^*(\omega)$ pour $\alpha > \beta$ sont représentés sur les figures 9.61, *a* et *b*.

9.62. Montrer qu'il n'existe aucune fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ dont la fonction de corrélation $k_x(\tau)$ soit constante dans un certain intervalle $(-\tau_1, \tau_1)$ et nulle hors de cet intervalle.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une fonction aléatoire $X(t)$ à fonction de corrélation égale à $b > 0$ pour $|\tau| < \tau_1$ et nulle pour $|\tau| > \tau_1$. Essayons de trouver la densité spectrale de la fonction aléatoire $X(t)$:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_1} b \cos\omega\tau\, d\tau = \frac{b}{\pi}\,\frac{\sin\omega\tau_1}{\omega}.$$

Cette expression montre que pour certaines valeurs de ω la fonction $S_x(\omega)$ est négative, ce qui contredit aux propriétés de la densité spectrale, et, par suite, la fonction de corrélation de la forme indiquée ne peut pas exister.

9.63. La fonction $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau|$ possède-t-elle les propriétés d'une fonction de corrélation?

Réponse. Non, puisqu'elle ne respecte pas deux conditions: $k_x(0) > 0$ et $k_x(0) \geqslant |k_x(\tau)|$.

9.64. Une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ possède les caractéristiques m_x et $k_x(\tau)$. Trouver la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t')$ de la fonction aléatoire $X(t)$ et de la fonction aléatoire $Y(t) = 1 - X(t)$.

Solution. $R_{xy}(t, t') = \mathrm{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{Y}(t')] = \mathrm{M}[-\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t')] = -K_x(t, t') = -k_x(\tau)$.

9.65. Une fonction aléatoire $X(t)$ possède les caractéristiques m_x; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Trouver sa densité spectrale.

Solution. $S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{D_x}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, dt$,

où Re est la partie réelle. On a

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d\tau = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d(\alpha+i\omega)\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{c} (\alpha+i\omega)\tau = y \\ \text{pour } \tau = 0;\ y = 0 \\ \text{pour } \tau = \infty;\ y = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{\alpha+i\omega} \int\limits_0^{\infty} e^{-y}\, dy = \frac{1}{\alpha+i\omega};$$

$$\operatorname{Re} \int\limits_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d\tau = \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha+i\omega} = \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha+i\omega} \frac{\alpha-i\omega}{\alpha-i\omega} = \operatorname{Re} \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - i\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Donc $S_x^*(\omega) = \frac{D_x}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$.

9.66. Trouver la densité spectrale d'une fonction aléatoire $X(t)$, si sa fonction de corrélation s'écrit

$$k_x(\tau)\, D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

Réponse. $S_x^*(\omega) = \frac{D_x \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{[\alpha^2+(\beta-\omega)^2][\alpha^2+(\beta+\omega)^2]}$.

Indication. Mettre $\cos \beta\tau$ sous la forme $\cos \beta\tau = (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau})/2$ et utiliser la solution du problème 9.65.

9.67. Trouver la densité spectrale de la fonction aléatoire stationnaire à fonction de corrélation

$$k_x(\tau) = D_x e^{-(\lambda\tau)^2}.$$

Solution. Soit

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-(\lambda\tau)^2} e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda\tau)^2 - i\omega\tau}\, d\tau.$$

En appliquant la formule connue

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left\{-\frac{AC - B^2}{A}\right\} \quad (A > 0)$$

et en tenant compte que $i^2 = -1$, on obtient

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}} \exp\left\{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}\right\} = \frac{D_x}{4\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}\right\}.$$

Le graphique de cette fonction est analogue à la courbe de la loi normale.

9.68. Dans l'intervalle de $-\omega_1$ à $+\omega_1$ la densité spectrale d'une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ est constante, alors que hors

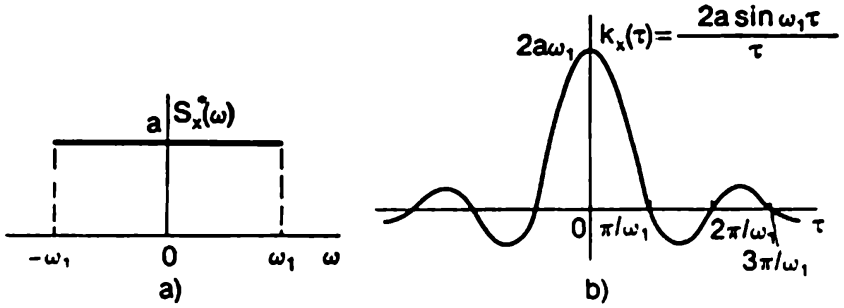


Fig. 9.68

de cet intervalle elle est nulle, c'est-à-dire qu'elle a la forme représentée sur la figure 9.68, *a* :

$$S_x^*(\omega) = \begin{Bmatrix} a & \text{pour } |\omega| < \omega_1 \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \omega_1 \end{Bmatrix} = a1\left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_1}\right).$$

Trouver la fonction de corrélation $k_x(\tau)$ de la fonction aléatoire $X(t)$.

Solution. $k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = 2a \int_0^{\omega_1} \cos \omega\tau\, d\omega = \frac{2a \sin \omega_1\tau}{\tau}$;

$$D_x = k_x(0) = 2a\omega_1.$$

Le graphique de la fonction de corrélation est représenté sur la figure 9.68, *b*.

9.69. *Dérivée d'une fonction aléatoire stationnaire.* Soit une fonction aléatoire stationnaire de caractéristiques $m_x(t) = m_x$; $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, où $\tau = t' - t$. Trouver les caractéristiques de sa dérivée $Y(t) = dX(t)/dt$ et montrer qu'elle est également stationnaire.

Solution. Puisque $Y(t)$ est liée à $X(t)$ par une transformation linéaire homogène, il vient

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} m_x = 0 = \text{const};$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} k_x(\tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t'} k_x(\tau)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d}{d\tau} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t'}\right).$$

Mais $\partial\tau/\partial t' = 1$ et $\partial\tau/\partial t = -1$; donc

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d}{d\tau} k_x(\tau)\right] = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau).$$

Puisque le premier membre de l'égalité dépend seulement de τ, on a

$$K_y(t, t') = k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau),$$

et la fonction aléatoire $Y(t)$ est stationnaire.

9.70. La fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ est $k_x(\tau)$. La fonction aléatoire $Y(t)$ s'obtient par dérivation de $X(t)$: $Y(t) = dX(t)/dt$. Trouver la fonction de corrélation $k_y(\tau)$, si

1) $k_x(t) = e^{-\alpha|\tau|}$; 2) $k_x(t) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$;

3) $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$ $(\alpha > 0;\ \beta > 0)$.

Solution. Résolvons ce problème en appliquant l'appareil des fonctions généralisées dont les règles d'utilisation sont données par l'annexe 6.

$$1)\ k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|} = -\frac{d}{d\tau}\left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau}\right] =$$

$$= \alpha\left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|}\left(\frac{d|\tau|}{d\tau}\right)^2 + \frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|}\right] =$$

$$= \alpha e^{-\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sign}\tau)^2].$$

Le terme $2\delta(\tau)$ montre que dans la composition de la fonction aléatoire $Y(t)$ il y a un bruit blanc. Ecrivons ensuite les réponses

et proposons au lecteur de vérifier leur validité :

2) $k_y(\tau) = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$,

3) $k_y(\tau) = (\alpha^2 + \beta^2)\, e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$.

9.71. Trouver la densité spectrale de la fonction aléatoire stationnaire à fonction de corrélation

$$k_y(\tau) = \alpha e^{-\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sign}\tau)^2].$$

Solution. $S_y^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_y(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha|\tau|}\, 2\delta(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign}\tau)^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Etant donné que

$$(\operatorname{sign}\tau)^2 = \begin{cases} 1 & \text{pour } \tau \neq 0; \\ 0 & \text{pour } \tau = 0 \end{cases}$$

et puisque au point $\tau = 0$ la fonction de la deuxième intégrale ne présente aucune particularité, on peut négliger dans la deuxième intégrale le point $\tau = 0$. On obtient

$$S_y^*(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{2\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

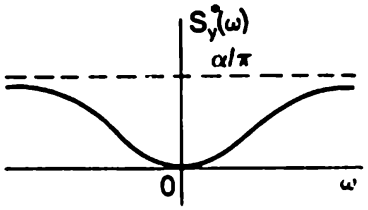


Fig. 9.71

Le graphique de la densité spectrale $S_y^*(\omega)$ est représenté sur la figure 9.71.

La densité spectrale $S_y^*(\omega)$ peut s'obtenir d'une façon plus simple à partir des raisonnements suivants. Représentons la fonction aléatoire $Y(t)$ comme la dérivée de la fonction aléatoire $X(t)$ du problème 9.70 (point 1)). Soit

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}; \quad S_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

la réponse amplitude-fréquence de l'opérateur de dérivation est égale à $\Phi(i\omega) = i\omega$; donc

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}|i\omega|^2 = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

9.72. Soit une fonction aléatoire stationnaire à fonction de corrélation $k_x(\tau) = (\sin\tau)/\tau$. Trouver la fonction de corrélation, la variance et la densité spectrale de sa dérivée: $Y(t) = dX(t)/dt$.

Solution. Conformément à la solution du problème 9.69:

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2 k_x(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right).$$

En développant $(\sin\tau)/\tau$ en série de Maclaurin, on obtient

$$\frac{\sin\tau}{\tau} = 1 - \frac{\tau^2}{3!} + \frac{\tau^4}{5!} - \frac{\tau^6}{7!} + \ldots;$$

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau) = \frac{1}{3} - \frac{\tau^2}{2!\cdot 5} + \frac{\tau^4}{4!\cdot 7} - \ldots$$

On en tire $D_y = k_y(0) = 1/3$.

La densité spectrale $S_x^*(\omega) = {}^1/_2 \cdot 1(1 - |\omega|)$ (voir point 15 de l'annexe 7). Par conséquent, $S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\,\omega^2 = \dfrac{\omega^2 \cdot 1(1 - |\omega|)}{2}$.

9.73. Une fonction aléatoire $X(t)$ possède la fonction de corrélation

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right) \quad (\alpha \geqslant \beta > 0).$$

La fonction aléatoire $Y(t) = dX(t)/dt$. Chercher sa fonction de corrélation $k_y(\tau)$ et sa densité spectrale $S_y^*(\omega)$.

Solution. Pour calculer $k_y(\tau)$ appliquons les propriétés des fonctions généralisées (voir [2]):

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau) =$$

$$= -\frac{d}{d\tau}\left[-e^{-\alpha|\tau|}\alpha\frac{d|\tau|}{d\tau}\left(\operatorname{ch}\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha|\tau|}\left(\beta\operatorname{sh}\beta\tau + \alpha\operatorname{ch}\beta|\tau|\frac{d|\tau|}{d\tau}\right)\right] =$$

$$= -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta}e^{-\alpha|\tau|}\operatorname{sh}\beta\tau\right) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{e^{\alpha|\tau|}}\left[\operatorname{ch}\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right];$$

$$S_y^*(\omega) = \frac{2\alpha\omega^2}{\pi}\,\frac{\alpha^2 - \beta^2}{[(\alpha-\beta)^2 + \omega^2]\,[(\alpha+\beta)^2 + \omega^2]}.$$

Puisque la limite $\lim\limits_{\tau\to 0} k_y(\tau)$ existe (elle est égale à $k_y(0) = \alpha^2 - \beta^2$), la fonction aléatoire $X(t)$ est dérivable.

9.74. Démontrer que la fonction de corrélation mutuelle $R_{xy}(t, t')$ d'une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ et de sa dérivée $Y(t) = dX(t)/dt$ satisfait à la condition $R_{xy}(t, t') = -R_{xy}(t', t)$, c'est-à-dire qu'avec la permutation des arguments elle change de signe.

Solution. Soit $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, où $\tau = t' - t$.

$$R_{xy}(t, t') = \mathrm{M}\left[\mathring{X}(t)\frac{d}{dt'}\mathring{X}(t')\right] = \frac{\partial}{\partial t'}\mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t')] = \frac{\partial}{\partial t'}k_x(\tau).$$

Mais $\tau = t' - t$; donc

$$R_{xy}(t, t') = \frac{d}{d\tau}k_x(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial t'} = \frac{d}{d\tau}k_x(\tau).$$

D'autre part,

$$R_{xy}(t', t) = \frac{\partial}{\partial t}K_x(t, t') = \frac{d}{d\tau}k_x(\tau)\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{d}{d\tau}k_x(\tau) = -R_{xy}(t, t'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, la fonction de corrélation mutuelle d'une fonction aléatoire stationnaire et de sa dérivée ne dépend que de $\tau = t' - t$:

$$R_{xy}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}k_x(\tau),$$

c'est-à-dire que la fonction $X(t)$ et sa dérivée sont à « corrélation stationnaire ».

9.75. Démontrer que toute fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ et la valeur de sa dérivée $Y(t) = dX(t)/dt$ en ce point t ne sont pas corrélées, et si la répartition de la fonction aléatoire $X(t)$ est normale, elles sont encore indépendantes.

Solution. Nous avons montré dans le problème précédent que $R_{xy}(\tau) = -\frac{d}{d\tau}k_x(\tau)$. Pour $t' = t$, $\tau = 0$

$$R_{xy}(0) = -\frac{d}{d\tau}k_x(0) = -\frac{d}{d\tau}D_x = 0.$$

Ainsi, en un point quelconque une fonction aléatoire stationnaire n'est pas corrélée avec sa dérivée en ce même point.

Pour les fonctions aléatoires réparties normalement la non-corrélation en même point de $X(t)$ et de sa dérivée implique également leur indépendance.

9.76. Trouver les caractéristiques de la fonction $Y(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt}$, si la fonction aléatoire normale $X(t)$ est stationnaire et possède les caractéristiques:

$$m_x;\ k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Solution. $Y(t) = \frac{1}{2}\frac{d[X(t)]^2}{dt}$. Introduisons la notation $X^2(t) = Z(t)$. Conformément à (9.0.35) et (9.0.36) on a

$$m_z = m_x^2 + k_x(0) = m_x^2 + D;$$

$$S_z^*(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega - v)\, S_x^*(v)\, dv + 4m_x^2 S_x^*(\omega) =$$

$$= \frac{D\alpha}{\pi}(\alpha^2+\beta^2)\frac{\omega^2(\omega^2+20\alpha^2+4\beta^2)}{[(\omega^2+4\alpha^2+4\beta^2)^2-16\beta^2\omega^2](\omega^2+4\alpha^2)} +$$

$$+ 4m_x^2\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2} = S_{x^2}^*(\omega).$$

La fonction de corrélation $k_z(\tau)$ peut se calculer d'après l'expression :

$$k_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z^*(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

On en tire

$$m_y(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}m_z = 0; \qquad S_y^*(\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 S_z^*(\omega).$$

9.77. *Détection quadratique d'une fonction aléatoire stationnaire.* On appelle détection quadratique d'une fonction aléatoire $X(t)$ la transformation non linéaire de la forme $Z(t) = a^2X^2(t)$, où a est une constante ; $X(t)$, une fonction aléatoire. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire à la sortie du détecteur quadratique de paramètre $a = 2$, si à son entrée est appliquée une fonction aléatoire stationnaire normale de caractéristiques $m_x = 3$; $k_x(\tau) = 4e^{-3|\tau|}$.

Solution. Introduisons la notation $X_1(t) = aX(t)$. Les caractéristiques de la fonction aléatoire $X_1(t)$: $m_{x_1} = am_x = 6$; $k_{x_1}(\tau) = a^2k_x(\tau) = 16e^{-3|\tau|}$. Alors, $Z(t) = X_1^2(t)$. Posons $D_1 = 16$; $\alpha_1 = 3$. D'après la formule (9.0.35) on trouve $m_z = m_{x_1}^2 + k_{x_1}(0) = 36 + 16 = 52$. D'après la formule (9.0.36)

$$S_z^*(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_{x_1}^*(\omega - v)\, S_{x_1}^*(v)\, dv + 4m_{x_1}^2 S_{x_1}^*(\omega) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1\alpha_1}{\pi}\frac{1}{\alpha_1^2+(\omega-v)^2}\frac{D_1\alpha_1}{\pi}\frac{1}{\alpha_1^2+v^2}\,dv + 4m_{x_1}^2\frac{D_1\alpha_1}{\pi}\frac{1}{\alpha_1^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{4D_1^2\alpha_1}{\pi}\frac{1}{(2\alpha_1)^2+\omega^2} + \frac{4D_1\alpha_1 m_{x_1}^2}{\pi(\alpha_1^2+\omega^2)}.$$

Par conséquent (voir point 6 de l'annexe 7),

$$k_z(\tau) = k_1(\tau) + k_2(\tau) = \widetilde{D}_1 e^{-\widetilde{\alpha}_1|\tau|} + \widetilde{D}_2 e^{-\widetilde{\alpha}_2|\tau|},$$

où

$$\widetilde{D}_1 = 2D_1^2 = 2\cdot 16^2 = 512; \quad \widetilde{\alpha}_1 = 2\alpha_1 = 6,$$

$$\widetilde{D}_2 = 4D_1 m_{x_1}^2 = 4\cdot 16\cdot 6^2 = 2\,304; \quad \widetilde{\alpha}_2 = 3.$$

De la sorte, le signal à la sortie d'un détecteur quadratique peut être présenté comme la somme de deux processus aléatoires stationnaires non corrélés $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$ à caractéristiques indiquées plus haut. Portons surtout notre attention sur ce que $Z(t)$ n'est pas un processus aléatoire normal.

9.78. Une fonction aléatoire normale $X(t)$ possède les caractéristiques m_x; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Trouver les caractéristiques de la fonction aléatoire $W(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt}$.

Solution. $W(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}X^2(t)$;

$$S_w^*(\omega) = 0{,}5\omega^2 S_{x^2}^*(\omega).$$

L'opération de dérivation étant linéaire $m_w(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}m_{x^2}(t)$. Mais conformément à la solution du problème précédent $m_{x^2}(t) = \text{const}$; donc $m_w(t) = 0$. Dans le problème précédent nous avons trouvé la densité spectrale $S_{x^2}^*(\omega)$; donc

$$S_w^*(\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 S_{x^2}^*(\omega) = \frac{D_x^2 2\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{\omega^2+(2\alpha)^2} + \frac{2D_x m_x^2 \alpha\omega^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

et en vertu du point 18 de l'annexe 7, on a

$$k_w(\tau) = \frac{D_x^2}{\pi}e^{-2\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) - 2\alpha(\operatorname{sign}\tau)^2] + \\ + \frac{2D_x m_x^2}{\pi}e^{-\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sign}\tau)^2].$$

La forme de la fonction de corrélation $k_w(\tau)$ nous amène à conclure que la fonction $W(t)$ comporte un bruit blanc.

9.79. L'angle de déplacement d'un radar dans le plan horizontal est un processus aléatoire normal $X(t)$ d'espérance mathématique $m_x = 0$ et à fonction de corrélation $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta t$, où $D_x = 4$ deg^2; $\alpha = 10^{-3}$ 1/s; $\beta = 0{,}1$ 1/s. A l'instant initial $t = 0$ l'angle de déplacement est nul: $X(0) = 0$. Trouver la probabilité p pour qu'à l'instant $t' = 0{,}2$ s l'angle de déplacement soit inférieur à 1°.

Solution. Introduisons la notation $X(0) = X_0$; $X(t_1) = X_1$. La loi de répartition conditionnelle de la variable aléatoire X_1 à

condition que la variable aléatoire $X_0 = x_0$ s'obtient de l'expression $f(x_1 \mid x_0) = f(x_1, x_0)/f(x_1)$, où $f(x_1, x_0)$ est la loi de répartition normale du système de deux variables aléatoires de caractéristiques $m_1 = m_0 = 0$;

$$D_1 = D_0 = D_x = 4 \text{ deg}^2;$$

$$k_{x_1, x_0} = k_x(0{,}2) = D_x e^{-\alpha \mid 0{,}2 \mid} \cos(\beta \cdot 0{,}2) = 3{,}68 \text{ deg}^2;$$

$$r_{x_1, x_0} = k_{x_1, x_0} / \sqrt{D_{x_1}, D_{x_0}} = 0{,}921.$$

La loi de répartition conditionnelle $f(x_1 \mid x_0) = 0$ est une loi normale de caractéristiques

$$m_{x_1 \mid x_0} = 0; \quad \sigma_{x_1 \mid x_0} = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2_{x_1, x_0}} = 0{,}776.$$

Alors

$$p = \int_{-1}^{1} f(x_1 \mid x_0 = 0)\, dx = 2\Phi\left(\frac{1}{0{,}776}\right) = 0{,}81.$$

9.80. A l'entrée d'un circuit oscillant d'un système de commande automatique dont la fonction de transfert est de la forme

$$\Phi(p) = k/(Tp^2 + \xi p + k) \quad (\xi > 0),$$

est appliqué un bruit blanc de densité spectrale $S^*_x(\omega) = N$. Déterminer la variance du signal de sortie (il s'agit des intervalles de temps assez éloignés, après la fin des processus transitoires).

Solution. $S^*_y(\omega) = S^*_x(\omega) \mid \Phi(i\omega) \mid^2 = Nk/(\mid T(i\omega)^2 + \xi i\omega + k \mid^2)$, d'où

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S^*_y(\omega)\, d\omega = \pi k N/\xi.$$

Notons que la variance du signal de sortie ne dépend pas de la constante de temps T du circuit oscillant mais dépend seulement du gain k, du coefficient d'amortissement ξ et de la puissance du signal N.

9.81. La fonction de transfert du système auquel est appliqué le signal $X(t)$ est de la forme

$$\Phi(p) = (1 + T_1 p)/(T_1^2 p^2 + p + k),$$

où $k = 25$ 1/s; $T_1 = 0{,}05$ s.

La densité spectrale du signal d'entrée

$$S^*_x(\omega) = 2T\delta_x/[1 + (T\omega)^2],$$

où $T=1$ s; $\delta_x=4$ deg²/s². Trouver la variance du signal de sortie.

Solution.

$$S_y^*(\omega)=S_x^*(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2=\frac{2\delta_x(-T_1^2(i\omega)^2+1)}{|TT_1(i\omega)^3+(T+T_1)(i\omega)^2+(1+kT)\,i\omega+k|^2};$$

$$D_y=\int_0^\infty S_y^*(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_0(i\omega)^4+b_1(i\omega)^2+b_2}{|a_0(i\omega)^2+a_1(i\omega)^2+a_2i\omega+a_3|^2}\,d\omega=$$

$$=\frac{-a_2b_0+a_0b_1-a_0a_1b_2/a_3}{2a_0(a_0a_3-a_1a_2)};$$

dans notre cas $b_0=0$; $b_1=-T_1^2$; $b_2=1$; $a_0=TT_1$; $a_1=$ $=T+T_1$; $a_2=1+kT$; $a_3=k$. Il vient

$$D_y=4\pi T\delta_x\,\frac{b_1-a_1b_2/a_3}{2(a_0a_3-a_1a_2)}\approx 0{,}0428\ \text{deg}^2.$$

9.82. Le signal de sortie $Y(t)$ est lié au signal d'entrée $X(t)$ par l'équation différentielle

$$a_1\frac{dX(t)}{dt}+a_0X(t)=b_1\frac{dY(t)}{dt}+b_0Y(t). \qquad (9.82)$$

La fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ est une fonction normale de caractéristiques m_x et $k_x(\tau)=D_xe^{-\alpha|\tau|}$. Trouver les caractéristiques du signal de sortie $Y(t)$.

Solution. La fonction aléatoire $X(t)$ étant soumise à la transformation linéaire stationnaire, en régime établi la variable aléatoire $Y(t)$ est stationnaire. La grandeur m_y peut s'obtenir à partir de l'équation

$$a_1\frac{dm_x}{dt}+a_0m_x=b_1\frac{dm_y}{dt}+b_0m_y.$$

Etant donné que $m_x=\text{const}$ et $m_y=\text{const}$, $a_0m_x=b_0m_y$, d'où $m_y=a_0m_x/b_0$. L'équation (9.82) peut s'écrire sous une forme opératorielle

$$(a_1p+a_0)\,X(t)=(b_1p+b_0)\,Y(t),$$

d'où

$$Y(t)=\frac{a_1p+a_0}{b_1p+b_0}\,X(t)=\Phi(p)\,X(t),$$

où $\Phi(p)$ est la fonction de transfert.

$$S_y^*(\omega)=S_x^*(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2=S_x^*(\omega)\left|\frac{a_1i\omega+a_0}{b_1i\omega+b_0}\right|^2=$$

$$=\frac{D_x\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\,\frac{a_0^2+a_1^2\omega^2}{b_0^2+b_1^2\omega^2}=\frac{D_x\alpha}{\pi b_1^2}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\,\frac{a_0^2+a_1^2\omega^2}{b_0^2/b_1^2+\omega^2}.$$

L'expression de $S_y^*(\omega)$ peut s'écrire :

$$S_y^*(\omega) = \frac{D_x\alpha}{\pi b_1^2} \frac{a_0^2 + a_1^2\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(b_0^2/b_1^2+\omega^2)} = \frac{D_x\alpha}{\pi b_1^2}\left(\frac{a}{b^2+\omega^2} + \frac{c}{d^2+\omega^2}\right),$$

où

$$a = a_1^2 - c; \quad c = \frac{a_0^2 - a_1^2 b_0^2/b_1^2}{\alpha^2 - b_0^2/b_1^2}; \quad b = \alpha; \quad d = b_0/b_1.$$

Introduisons la notation : $D_1 = D_x\alpha a/b$; $D_2 = D_x\alpha c/(b_1^2 d)$. Alors (voir point 6 de l'annexe 7) $k_y(\tau) = D_1 e^{-b|\tau|} + D_2 e^{-d|\tau|}$. La variance du signal de sortie $D_y = k_y(0) = D_1 + D_2$.

9.83. Pour diminuer le niveau du bruit $X(t)$ on emploie le filtre RC (fig. 9.83). A l'entrée du filtre est appliqué un bruit blanc de densité spectrale $S_x^*(\omega) = 10^{-5}$ V²·s. Déterminer la constante de temps minimale $T = RC$ du filtre telle que si $m_x = 0$, le signal à la sortie du filtre dépasse en module 100 mV avec la probabilité $p = 0{,}05$.

Solution. La fonction de transfert du filtre RC est de la forme $\Phi(p) = 1/(1 + Tp)$. Par conséquent,

$$S_y^*(\omega) = \left|\frac{1}{1+Ti\omega}\right|^2 S_x^*(\omega) = \frac{1}{1+T^2\omega^2}\cdot 10^{-5} = \frac{D_y\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2},$$

où $\alpha = 1/T$ 1/s ; $D_y = \pi\alpha\cdot 10^{-5}$ V². On en tire (voir point 5 de l'annexe 7) $k_y(\tau) = D_y e^{-\alpha|\tau|}$.

Le signal normal d'entrée subissant une transformation linéaire, le signal de sortie de caractéristiques $m_y = 0$; $D_y = (\pi/T)\,10^{-5}$ V²

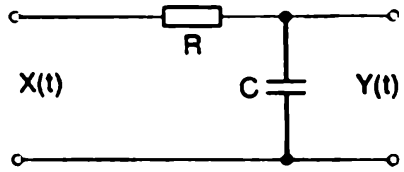


Fig. 9.83

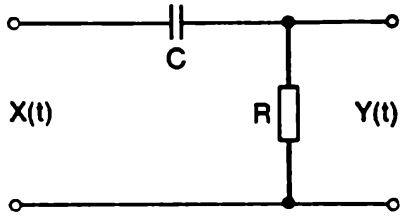


Fig. 9.84

est normal lui aussi. D'après l'énoncé du problème $p = 1 - 2\Phi(100/\sigma_y) = 0{,}05$, où $\Phi(x)$ est une fonction de Laplace (annexe 5). On a $\Phi(100/\sigma_y) = 0{,}475$; $100/\sigma_y = 1{,}96$; $\sigma_y = 100/1{,}96 = 51{,}1$ mV ; $\sigma_y^2 = D_y = 26{,}1\cdot 10^{-4}$ V².

La constante de temps minimale cherchée du filtre $T = (\pi/D_y) \times 10^{-5} = 0{,}012$ s.

9.84. A l'entrée du filtre RC représenté sur la figure 9.84 est appliquée une fonction aléatoire stationnaire normale $X(t)$ de caractéristiques m_x ; $k_x(\tau) = D_x \cos\beta\tau$. Trouver les caractéristiques du signal de sortie $Y(t)$.

Solution. La fonction de transfert du filtre est de la forme $\Phi(p) = Tp(1+Tp)^{-1}$, où $T = RC$. Par conséquent, $m_y = 0$ (la composante constante ne passe pas par le condensateur C). La densité spectrale du signal de sortie (voir point 3 de l'annexe 7) s'écrit

$$S_y^*(\omega) = \left|\frac{Ti\omega}{1+Ti\omega}\right|^2 S_x^*(\omega) = \frac{(T\omega)^2}{1+(T\omega)^2}\frac{D_x}{2}[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)].$$

La variance du signal de sortie D_y se calcule d'après l'expression (voir annexe 6):

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{D_x}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(T\omega)^2}{1+(T\omega)^2}[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)]\,d\omega = D_x\frac{2(T\beta)^2}{1+(T\beta)^2}.$$

La loi de répartition unidimensionnelle du signal de sortie est une loi normale de paramètres $m_y = 0$ et D_y.

9.85. A l'entrée d'un régulateur automatique est appliquée une tension $X(t)$ qui est un processus aléatoire stationnaire normal de caractéristiques $m_x = 220$ V; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$, où $D_x = \sigma_x^2 = 16$ V^2; $\alpha = 200$ 1/s. Le fonctionnement du régulateur de tension est normal si la tension $X(t)$ n'est pas inférieure à 208 V, et pas supérieure à 232 V; dans le cas contraire, il est débranché automatiquement pour être branché de nouveau lorsque la tension d'entrée $X(t)$ reprend la valeur imposée. Déterminer la probabilité p pour que le régulateur travaille à un instant t arbitraire, la loi de répartition de la durée du service normal T_1 et la durée moyenne du débranchement du régulateur $\bar{t}_2$.

Solution. Conformément à la solution du problème 9.70 (point b)

$$k_y(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}[D_x e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)] =$$

$$= D_x\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|), \quad \sigma_y = \alpha\sigma_x.$$

Le nombre moyen de dépassements du niveau a (vers le haut) est

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi}\left[\exp\left\{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}\right]\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}354 \text{ 1/s}.$$

Par conséquent, le nombre moyen total de dépassements par unité de temps au-delà du niveau admis est $2\lambda_a = \lambda_1 = 0{,}708$ 1/s. Avec une précision suffisante pour la pratique la loi de répartition de la variable aléatoire T_1 peut être considérée comme exponentielle d'espérance mathématique $\bar{t} = 1/\lambda_1 = 1{,}41$ s. La probabilité pour que le régulateur travaille à un instant arbitraire est égale à

$$p = \mathrm{P}(208 < X(t) < 232) = \mathrm{P}(|X(t)-m_x| < 12) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

D'autre part, la probabilité p peut s'obtenir à partir de l'expression $p = \bar{t}_1/(\bar{t}_1 + \bar{t}_2)$, d'où $\bar{t}_2 = \bar{t}_1 (1 - p)/p = 1{,}31 \cdot 10^{-4}$ s.

9.86. Un poste radio peut travailler seulement dans une marge de températures définie $t_0 = \pm 30$ °C, où t_0 est la température moyenne nominale; lorsque la température dépasse ces limites, l'appareil tombe en panne. La température ambiante $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire d'espérance mathématique $m_x = t_0$ et d'écart quadratique moyen $\sigma_x = 10$ °C, à fonction de corrélation de la forme $k_x(\tau) = 100 (\sin \tau)/\tau$ (°C)^2; sa répartition est normale. Trouver le nombre moyen de dépassements de la température au-delà de la limite $t_0 = \pm 30$ °C pendant le temps $T = 50$ s. En considérant le nombre de dépassements réparti d'après la loi de Poisson, trouver la probabilité pour que pendant le temps T l'appareil tombe en panne.

Solution. D'après la solution du problème 9.72

$$k_y(\tau) = -\frac{\partial^2 k_x(\tau)}{\partial \tau^2} = -100 \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{\tau}{2!\,5} - \ldots \right\}.$$

En posant $\tau = 0$, on trouve $D_y = k_y(0) = 33{,}3$; $\sigma_y = 5{,}76$ °C. Le nombre moyen de dépassements vers le haut au-delà de la limite $a = m_x + 30$ °C est d'après la formule (9.0.42)

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi} e^{-a^2/200} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}00134 \text{ 1/s}.$$

Le nombre moyen total de dépassements vers le bas au-delà de la limite $m_x = -30$ °C est le même; le nombre moyen de rejets au-delà des limites admissibles est $2\lambda_a = 0{,}00269$.

Pour la variable aléatoire Y, le nombre de dépassements vers le bas et le haut, à répartition poissonienne d'espérance mathématique $2\lambda_a T = 0{,}00269 \cdot 50 = 0{,}1345$, la probabilité pour qu'elle prenne une valeur supérieure à zéro (un dépassement au moins aura lieu) est égale à $1 - e^{-0{,}1345} = 0{,}125$.

CHAPITRE X

FLUX D'ÉVÉNEMENTS. PROCESSUS ALÉATOIRES DE MARKOV

10.0. On appelle *flux d'événements* la suite des événements homogènes qui apparaissent l'un après l'autre à des instants aléatoires. Exemples : flux d'appels d'un central téléphonique ; flux de palets au but dans le jeu de hockey ; flux de défaillances d'un ordinateur ; flux de demandes d'exécution des travaux prévus dans un centre de calcul, etc.

Une représentation suggestive d'un flux d'événements est donnée par une série des points d'abscisses $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n, \ldots$ (fig. 10.0.1) séparés par des

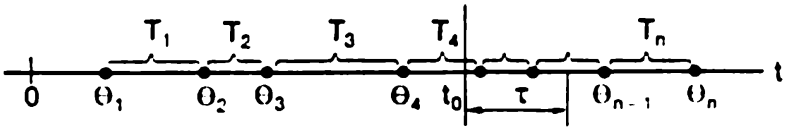


Fig. 10.0.1

intervalles $T_1 = \Theta_2 - \Theta_1$; $T_2 = \Theta_3 - \Theta_2, \ldots, T_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n$. Une description probabiliste présente un flux d'événements comme une suite des variables aléatoires Θ_1 ; $\Theta_2 = \Theta_1 + T_1$; $\Theta_3 = \Theta_1 + T_1 + T_2$; ...

Notons que dans la notion « flux d'événements » le terme « événement » a un sens tout à fait différent du terme « événement aléatoire » introduit dans ce qui précède. En particulier, aucun sens n'est de parler de la probabilité des « événements » qui constituent un flux (par exemple, de la probabilité d'un appel au central téléphonique : il est clair que tôt ou tard cet appel aura lieu, et pas un seul). On peut associer à un « flux d'événements » des événements aléatoires de toute sorte, par exemple,

A = {dans un intervalle de temps de t_0 à $t_0 + \tau$ un appel au moins aura lieu}, ou

B = {dans ce même intervalle auront lieu exactement deux appels}.

Les probabilités de tels événements peuvent être calculées.

Notons également que nous pouvons visualiser sur un dessin sous la forme d'une suite de points non pas le flux d'événements lui-même, qui est aléatoire, mais seulement une de ses *réalisations concrètes*.

Nous avons déjà mentionné au chapitre 4 les flux d'événements et certaines de leurs propriétés ; maintenant nous allons les décrire avec plus de détails.

Un flux d'événements est dit *permanent* si ses caractéristiques probabilistes ne dépendent pas du choix de l'origine du temps, ou d'une façon plus concrète, si la probabilité pour tel ou tel nombre d'événements de tomber dans un intervalle de temps quelconque ne dépend que de la *longueur* de cet intervalle τ et ne dépend pas de sa position sur l'axe Ot.

Un flux d'événements est dit *ordinaire* si la probabilité pour deux et plus événements de tomber dans un intervalle de temps élémentaire Δt est négligeable

par rapport à la probabilité correspondante pour un seul événement. Pratiquement, l'ordinarité du flux signifie que les événements y apparaissent « un à un », et non pas par groupes de deux, trois, etc. (la coïncidence exacte des instants de l'apparition de deux événements est théoriquement possible, mais sa probabilité est nulle).

Un flux d'événements ordinaire peut être interprété comme un processus aléatoire $X(t)$ qui est le nombre d'événements survenus jusqu'à l'instant t

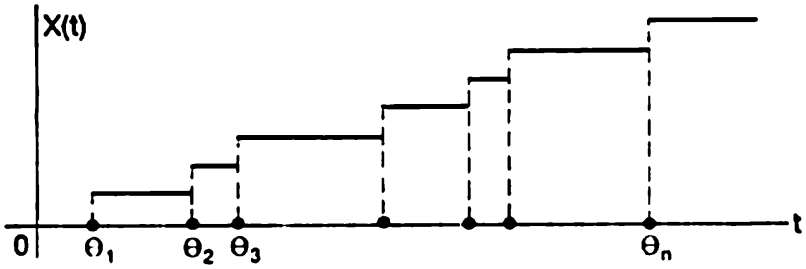


Fig. 10.0.2

(fig. 10.0.2). Le processus aléatoire $X(t)$ croît par saut d'une unité aux points $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n, \ldots$

Un flux d'événements est dit *sans postaction* si le nombre d'événements qui tombent dans un intervalle de temps τ quelconque ne dépend pas du nombre d'événements apparus pendant l'un quelconque des autres intervalles disjoints. Pratiquement, l'absence de postaction dans un flux signifie que les événements qui le constituent apparaissent à tel ou tel instant indépendamment l'un de l'autre.

On dit qu'un flux d'événements est *simple* s'il est permanent, ordinaire et ne possède pas de postaction.

L'intervalle de temps T entre deux événements voisins d'un flux simple obéit à la loi de répartition exponentielle

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{pour } t > 0), \tag{10.0.1}$$

où $\lambda = 1/M[T]$ est une quantité inverse à la valeur moyenne de l'intervalle T.

Un flux d'événements ordinaire sans postaction est dit *de Poisson*. Un flux simple présente un cas particulier du flux poissonien (notamment, un flux de Poisson stationnaire).

La *densité* λ d'un flux d'événements est le nombre moyen (espérance mathématique du nombre) d'événements apparus par unité de temps. Pour un flux stationnaire $\lambda = \text{const}$; pour un flux non stationnaire, dans le cas général, la densité dépend du temps: $\lambda = \lambda(t)$.

La densité instantanée d'un flux $\lambda(t)$ est déterminée comme la limite du rapport du nombre moyen d'événements produits en un intervalle de temps élémentaire $(t, t + \Delta t)$ à la longueur Δt de cet intervalle, lorsqu'elle tend vers zéro. Le nombre moyen d'événements qui surviennent dans un intervalle de temps τ qui suit directement l'instant t_0 (voir fig. 10.0.1) est égal à $a(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\,dt$. Si le flux d'événements est stationnaire, alors $a(t_0, \tau) = a(\tau) = \lambda\tau$.

Un flux d'événements ordinaire s'appelle *flux de Palma* (ou *flux récurrent*, ou encore *flux à postaction limitée*) si les intervalles de temps $T_1, T_2, \ldots$ entre les événements successifs (voir fig. 10.0.1) constituent des variables aléatoires indépendantes de même loi de répartition. Les répartitions de $T_1, T_2, \ldots$ étant

identiques, le flux de Palma est toujours stationnaire. Le flux simple est un cas particulier du flux de Palma; les intervalles entre les événements y sont répartis d'après la loi exponentielle (10.0.1) où λ est la densité du flux.

On appelle *flux d'Erlang d'ordre k* le flux d'événements qui s'obtient par « tamisage » d'un flux simple, lorsqu'on conserve dans un flux chaque k-ième point (événement), alors que tous les points intermédiaires sont rejetés (voir

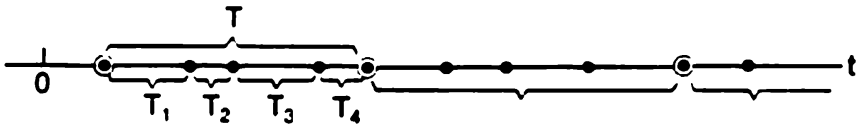


Fig. 10.0.3

fig. 10.0.3 qui illustre l'obtention du flux d'Erlang d'ordre 4 à partir d'un flux simple).

L'intervalle de temps entre deux événements voisins d'un flux d'Erlang d'ordre k constitue une somme de k variables aléatoires indépendantes $T_1, T_2, \ldots$ $\ldots, T_k$ à loi de répartition exponentielle de paramètre λ:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i. \tag{10.0.2}$$

La loi de répartition de la variable aléatoire T s'appelle *loi d'Erlang d'ordre k* (voir problème 8.38) qui possède la densité

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (\text{pour } t > 0). \tag{10.0.3}$$

L'espérance mathématique, la variance et l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire T (10.0.2) sont respectivement égaux à:

$$m_t = k/\lambda; \quad D_t = k/\lambda^2; \quad \sigma_t = \sqrt{k}/\lambda. \tag{10.0.4}$$

Le coefficient de variation de la variable aléatoire (10.0.2) s'écrit

$$v_t = \sigma_t/m_t = 1/\sqrt{k}; \tag{10.0.5}$$

$v_t \to 0$ avec $k \to \infty$, c'est-à-dire qu'avec l'augmentation de l'ordre d'un flux d'Erlang, le « degré d'aléarité » de l'intervalle entre les événements tend vers zéro.

Si simultanément avec le « tamisage » d'un flux simple on change l'échelle suivant l'axe Ot (en divisant par k), on obtient un flux d'Erlang *normé* d'ordre k, dont la densité ne dépend pas de k. L'intervalle de temps $\tilde{T}$ entre les événements voisins dans le flux d'Erlang normé d'ordre k possède la densité

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t} \quad (\text{pour } t > 0). \tag{10.0.6}$$

Les caractéristiques numériques de la variable aléatoire

$$\tilde{T} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} T_i$$

sont

$$\mathrm{M}\,|\,\tilde{T}\,| = 1/\lambda; \quad \mathrm{D}\,|\,\tilde{T}\,| = 1/k\lambda^2; \quad \tilde{\sigma}_t = 1/(\lambda\sqrt{k}); \quad v_t = 1/\sqrt{k}. \tag{10.0.7}$$

Avec la croissance de k le flux d'Erlang normé s'approche indéfiniment d'un *flux régulier* à intervalle constant $l = 1/\lambda$ entre les événements.

Un processus aléatoire qui se déroule dans un système physique S est dit *de Markov* (ou processus sans postaction) s'il possède la propriété: *pour tout instant* t_0 (fig. 10.0.4) *la probabilité de l'état du système dans l'avenir* ($t > t_0$) *dépend seulement de son état dans le présent* ($t = t_0$) *sans dépendre de quelle manière et quand le système S a été amené en cet état* (autrement dit, pour un présent défini, l'avenir ne dépend pas du passé, de la préhistoire du processus).

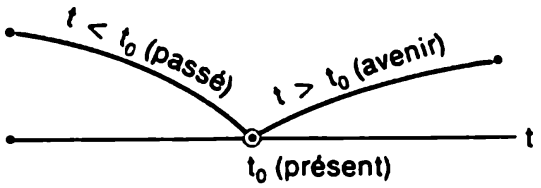


Fig. 10.0.4

Dans ce chapitre nous considérons seulement les processus de Markov à états discrets $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Il est commode d'illustrer ces processus par un *graphe des états* (fig. 10.0.5), où les rectangles (ou les ronds) visualisent les états $s_1, s_2, \ldots$ du système S (sommets), alors que les flèches ou arcs, les transitions éventuelles d'un état en un autre (sur le graphe sont marquées seulement les transitions directes et non pas celles qui passent par d'autres états). Quelquefois les graphes traduisent non seulement les transitions éventuelles d'un état

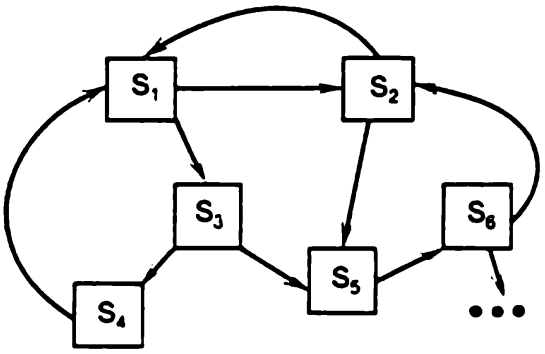


Fig. 10.0.5

Fig. 10.0.6

en un autre, mais encore des séjours à l'état antérieur: ceci est visualisé par une flèche (une « boucle »), orientée de l'état considéré vers ce même état (fig. 10.0.6), mais on peut également s'en passer. Le nombre d'états du système peut être aussi bien fini qu'infini, mais dénombrable.

Il est d'usage de donner au processus aléatoire de Markov à états discrets et à temps discret le nom de *chaîne de Markov*. Pour un tel processus, il est commode de considérer les instants $t_1, t_2, \ldots$, où le système S peut changer son état, comme des *pas successifs* du processus, et à titre d'argument dont dépend le processus, de considérer non pas le temps t, mais le numéro du pas: $1, 2, \ldots, k, \ldots$. Dans ce cas un processus aléatoire est caractérisé par la suite des états:

$$S(0); \quad S(1); \quad S(2); \quad \ldots; \quad S(k); \ldots, \tag{10.0.8}$$

où $S(0)$ est l'état initial du système (avant le premier pas); $S(1)$, l'état immédiat du système après le premier pas; ...; $S(k)$, l'état immédiat du système après le k-ième pas...

L'événement $\{S(k) = s_i\}$ = {dès le k-ième pas le système se trouve à l'état s_i} ($i = 1, 2, \ldots$) est un événement aléatoire; donc, la succession des états (10.0.8) peut être considérée comme une suite des événements aléatoires.

L'état initial S (0) peut aussi bien être donné à l'avance qu'aléatoire. On dit que les événements de la suite (10.0.8) forment une *chaîne de Markov*.

Considérons un processus à n états éventuels $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Si on désigne par $X(t)$ le numéro de l'état dans lequel se trouve le système S à l'instant t, alors le processus (la chaîne de Markov) est décrit par une fonction aléatoire en nombres entiers $X(t) > 0$, dont les valeurs possibles sont $1, 2, \ldots, n$. Cette

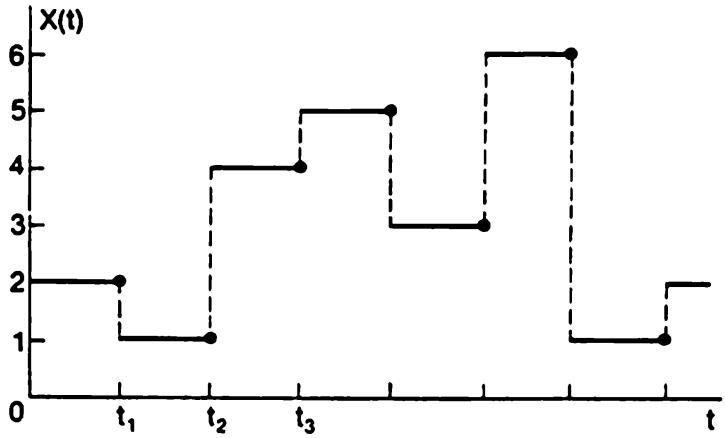


Fig. 10.0.7

fonction subit des sauts d'une valeur entière à une autre, à des instants $t_1, t_2, \ldots$ donnés (fig. 10.0.7), elle est continue à gauche, ce qui est visualisé par des points sur la figure 10.0.7.

Considérons la loi de répartition unidimensionnelle de la fonction aléatoire $X(t)$. Désignons par $p_i(k)$ la probabilité pour qu'après le k-ième pas, et jusqu'au $k+1$-ième pas, le système soit à l'état s_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Les probabilités $p_i(k)$ s'appellent *probabilités des états* d'une chaîne de Markov. Il est évident que pour tout k

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1. \tag{10.0.9}$$

La répartition des états au début du processus

$$p_1(0),\ p_2(0),\ \ldots,\ p_i(0),\ \ldots,\ p_n(0) \tag{10.0.10}$$

s'appelle *répartition initiale des probabilités* d'une chaîne de Markov. En particulier, si l'on connaît exactement l'état initial S (0) du système S, par exemple, si $S(0) = s_i$, la probabilité initiale $p_i(0) = 1$, alors que toutes les autres sont nulles.

On appelle *probabilité de transition* au k-ième pas de l'état s_i à l'état s_j la probabilité conditionnelle pour que, après le k-ième pas, le système se trouve à l'état s_j sous la condition que directement avant ce pas, après $k-1$ pas, il se trouvait à l'état s_i. Quelquefois aux probabilités de transition on donne également le nom de « probabilités transitoires ».

Une chaîne de Markov est dite *homogène* si les probabilités transitoires ne dépendent pas du numéro du pas, mais dépendent seulement de l'état au début de la transition et de l'état auquel elle a abouti :

$$\mathrm{P}\{S(k) = s_j \mid S(k-1) = s_i\} = P_{ij}. \tag{10.0.11}$$

Les probabilités transitoires P_{ij} d'une chaîne de Markov homogène forment un tableau carré (matrice) de dimension $n \times n$:

$$\| P_{ij} \| = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (10.0.12)$$

Quelle que soit la ligne de la matrice, la somme des probabilités transitoires est égale à l'unité

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n). \qquad (10.0.13)$$

Une matrice qui possède cette propriété est dite *stochastique*. P_{ij} n'est rien d'autre que la probabilité pour que le système amené vers le pas donné à l'état s_i y reste au cours du pas successif.

Si pour une chaîne de Markov homogène sont données la répartition initiale des probabilités (10.0.10) et la matrice des probabilités transitoires (10.0.12), alors les probabilités des états du système $p_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) peuvent être définies par la formule récurrente

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) P_{ji} \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n). \qquad (10.0.14)$$

Si tous les états sont essentiels, et leur nombre est fini, il existe pour une chaîne de Markov homogène une limite $\lim\limits_{k \to \infty} p_i(k) = p_i$ déterminée par le système d'équations $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j P_{ji}$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Pour une chaîne de Markov inhomogène, les probabilités de transition qui figurent dans la matrice (10.0.12) et la formule (10.0.14) dépendent du numéro du pas k.

Pour les calculs réels d'après la formule (10.0.14) il faut y prendre en considération non pas tous les états s_j, mais seulement ceux pour lesquels les probabilités transitoires sont différentes de zéro, c'est-à-dire ceux à partir desquels sur le graphe des états les flèches mènent vers les états s_i.

Le processus aléatoire de Markov à états discrets et temps continu s'appelle parfois « chaîne de Markov continue ». Pour un tel processus à tout instant la probabilité de la transition de l'état s_i à l'état s_j est nulle. Au lieu de la probabilité de la transition P_{ij}, on considère la *densité de probabilité de la transition* λ_{ij}, définie comme la limite du rapport de la probabilité de la transition de l'état s_i à l'état s_j en un petit intervalle de temps Δt adjacent à l'instant t, à la longueur de cet intervalle, lorsqu'elle tend vers zéro. La densité de probabilité de la transition peut être tant constante ($\lambda_{ij} = \text{const}$), que dépendante du temps [$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$]. Dans le premier cas, le processus aléatoire de Markov à états discrets et à temps continu est dit *homogène*. L'exemple typique en est fourni par le processus aléatoire $X(t)$ qui est le nombre d'événements apparus jusqu'à l'instant t dans un flux simple (voir fig. 10.0.2).

Pour l'étude des processus aléatoires à états discrets et à temps continu il est commode de représenter les transitions du système S d'un état en un autre comme se produisant sous l'action de certains *flux d'événements*; dans ces conditions, les densités de probabilité de la transition acquièrent le sens des *densi-*

tés λ_{ij} des flux d'événements correspondants (dès que dans un flux de densité λ_{ij} apparaît le premier événement, le système passe par saut de l'état s_i à l'état s_j). Si tous ces flux sont poissoniens (c'est-à-dire ordinaires et sans postaction, à densité constante ou dépendant du temps), le processus observé dans le système S est un processus de Markov.

Lorsqu'on considère les processus aléatoires de Markov à états discrets et à temps continu, il est commode d'utiliser le graphe des états, où à côté de chaque flèche qui mène de l'état s_i à l'état s_j, on indique la densité λ_{ij} du flux d'événements qui fait passer le système suivant la flèche donnée (fig. 10.0.8). Un tel graphe d'états est dit *marqué* *).

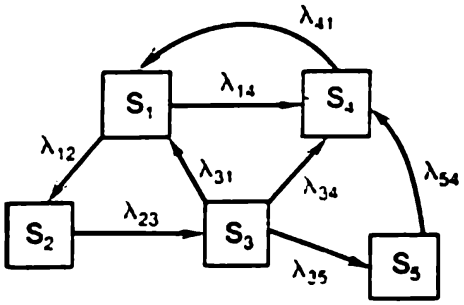


Fig. 10.0.8

La probabilité pour que le système S de l'état s_i passe en un intervalle de temps élémentaire $(t, t+\Delta t)$ à l'état s_j (élément de probabilité de la transition de s_i à s_j) est la probabilité pour que pendant ce temps dt apparaît au moins un événement du flux qui fait passer S de s_i à s_j. A des infiniment petits d'ordres supérieurs près cette probabilité est égale à $\lambda_{ij}dt$.

On appelle *flux de probabilité de la transition* de l'état s_i à l'état s_j la grandeur $\lambda_{ij}p_i(t)$ (ici la densité λ_{ij} peut être aussi bien dépendante qu'indépendante du temps).

Considérons le cas où le système S possède un nombre fini d'états $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Pour décrire le processus aléatoire qui se déroule dans ce système on recourt aux *probabilités des états*

$$p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t), \tag{10.0.15}$$

où $p_i(t)$ est la probabilité pour qu'à l'instant t le système S se trouve à l'état s_i:

$$p_i(t) = \mathrm{P}\{S(t) = s_i\}. \tag{10.0.16}$$

Il est clair que pour tout t

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \tag{10.0.17}$$

Pour calculer les probabilités (10.0.15) il faut résoudre le système d'équations différentielles (équations de Kolmogorov) de la forme

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}p_j(t) - p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ou, en omettant l'argument t des variables p_i,

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}p_j - p_i\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{10.0.18}$$

---

*) Sur le graphe des états d'un système à temps continu nous ne marquerons pas les boucles qui correspondent au séjour du système à l'état donné, du fait qu'un tel séjour est toujours possible.

Rappelons que les densités λ_{ij} des flux peuvent dépendre du temps t (l'argument t est omis pour abréger).

Pour composer les équations (10.0.18) il est commode d'utiliser le graphe marqué des états du système et la règle mnémonique suivante: *la dérivée de la probabilité de chaque état est égale à la somme de tous les flux de probabilité, qui font passer le système des autres états à l'état donné, moins la somme de tous les flux de probabilité qui font passer le système de l'état donné à d'autres états.* Par exemple, pour le système S dont le graphe marqué des états est donné par la figure 10.0.8, le système d'équations de Kolmogorov s'écrit

$$\begin{aligned} dp_1/dt &= \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4 - (\lambda_{12} + \lambda_{14})\, p_1; \\ dp_2/dt &= \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2; \\ dp_3/dt &= \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3; \\ dp_4/dt &= \lambda_{14}p_1 + \lambda_{34}p_3 + \lambda_{54}p_5 - \lambda_{41}p_4; \\ dp_5/dt &= \lambda_{35}p_1 - \lambda_{54}p_5. \end{aligned} \tag{10.0.19}$$

Puisque la condition (10.0.17) est vérifiée pour tout t, on peut exprimer l'une quelconque des probabilités (10.0.15) par l'intermédiaire des autres et réduire ainsi de l'unité le nombre d'équations.

Pour résoudre le système d'équations différentielles (10.0.18) des probabilités des états $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$, il faut donner la répartition initiale des probabilités

$$p_1(0),\ p_2(0),\ \ldots,\ p_i(0),\ \ldots,\ p_n(0), \tag{10.0.20}$$

dont la somme est égale à l'unité

$$\sum_{j=1}^{n} p_i(0) = 1.$$

Si, en particulier, on connaît exactement l'état du système à l'instant initial $t = 0$, par exemple, si $S(0) = s_i$, alors $p_i = 1$, et les autres probabilités (10.0.20) sont nulles.

Dans de nombreux cas, lorsque le processus dont le système est le siège dure assez longtemps, une question se pose sur le comportement limite des probabilités $p_i(t)$ pour $t \to \infty$. Si tous les flux d'événements qui font passer le système d'un état en un autre sont des flux simples, c'est-à-dire des flux poissoniens stationnaires, à densités constantes λ_{ij}, dans certains cas il existe des probabilités *limites* des états

$$p_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.0.21}$$

qui ne dépendent pas de l'état du système S à l'instant initial. Cela signifie qu'avec le temps dans le système S s'établit un *régime permanent limite* qui le fait passer d'un état en un autre, mais les probabilités des états ne varient déjà plus. Dans ce régime limite, chaque probabilité limite peut être interprétée comme un *temps moyen relatif* de la présence du système à l'état donné.

Le système pour lequel il existe des probabilités limites est dit *ergodique* et le processus aléatoire correspondant est dit ergodique lui aussi.

Pour l'existence des probabilités limites des états la seule condition $\lambda_{ij} =$ $=$ const ne suffit pas, il faut encore que soient observées certaines conditions qui ne peuvent être vérifiées que d'après le graphe des états, en y dégageant les états « essentiels » et « inessentiels ». L'état s_i est dit *essentiel* s'il n'existe pas d'autre état s_j tel qu'en passant une fois d'une certaine façon de s_i à s_j, le système ne puisse déjà plus revenir à l'état s_i. Tous les états non dotés de cette propriété sont dits *inessentiels*.

Par exemple, pour le système S dont le graphe des états est donné par la figure 10.0.9, les états s_1, s_2 sont inessentiels (on peut, par exemple, quitter l'état s_1 pour l'état s_2, et ne pas y revenir, tout comme on ne peut pas revenir à l'état s_2 après les états s_4 ou s_5), alors que les états s_4, s_5, s_6, s_7 sont essentiels (les états essentiels sont encadrés par des traits gras).

Lorsque le nombre d'états n est fini, pour l'existence des probabilités limites il faut et il suffit qu'*on puisse en un certain nombre de pas passer de chaque état essentiel à chaque autre état essentiel*. Le graphe représenté sur la figure 10.0.9 ne satisfait pas à cette condition (par exemple, on ne peut pas passer de

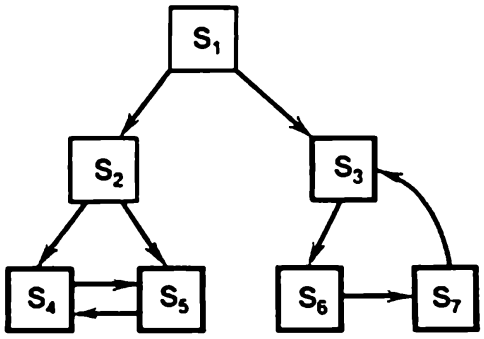


Fig. 10.0.9

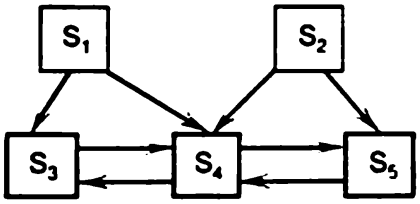


Fig. 10.0.10

l'état essentiel s_4 à l'état essentiel s_6); pour le graphe représenté sur la figure 10.0.10, les probabilités limites existent (il est possible de passer de chaque état essentiel à chaque autre état essentiel).

Les états inessentiels portent justement ce nom du fait qu'à partir de chacun de tels états le système passe tôt ou tard à un des états essentiels pour ne plus revenir à l'état initial. Naturellement, les probabilités limites des états inessentiels sont nulles.

Si le système S possède un nombre fini d'états $s_1, s_2, \ldots, s_n$, pour l'existence des probabilités limites *il suffit qu'il soit possible de passer d'un état quelconque du système* (en un certain nombre de pas) *à n'importe quel autre état*. Si le nombre d'états $s_1, s_2, \ldots, s_n \ldots$ est infini, cette condition cesse d'être suffisante, et l'existence des probabilités limites dépend non seulement du graphe des états, mais encore des densités λ_{ij}.

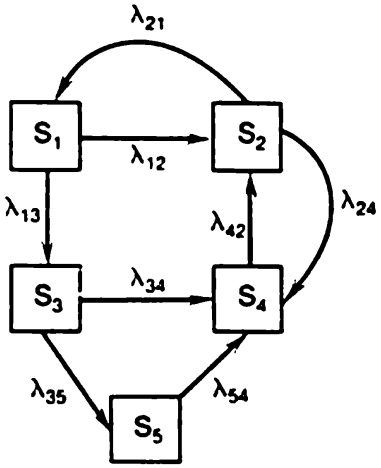


Fig. 10.0.11

Les probabilités limites des états, si elles existent, peuvent s'obtenir par la résolution d'un *système d'équations algébriques linéaires*; elles s'obtiennent à partir des équations différentielles de Kolmogorov en annulant leurs premiers membres (les dérivées). Cependant, il est plus commode de composer ces équations directement d'après le graphe des états, en appliquant la règle mnémonique: *pour chaque état le flux de probabilités global sortant est égal au flux de probabilités global entrant*. Par exemple, pour le système S, dont le graphe des états marqué est donné par la figure 10.0.11, les équations des probabilités limites des états sont de la forme:

$$(\lambda_{12}+\lambda_{13})\,p_1=\lambda_{21}p_2\,; \quad (\lambda_{21}+\lambda_{24})\,p_2=\lambda_{12}p_1+\lambda_{42}p_4\,;$$
$$(\lambda_{34}+\lambda_{35})\,p_3=\lambda_{13}p_1\,; \quad \lambda_{42}p_4=\lambda_{24}p_2+\lambda_{34}p_3+\lambda_{54}p_5\,; \quad \lambda_{54}p_5=\lambda_{35}p_3. \tag{10.0.22}$$

Ainsi, pour le système S à n états, on obtient un système de n équations algébriques homogènes linéaires à n inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_n$. A partir de ce système, on peut calculer les inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_n$ à un facteur arbitraire près. Pour calculer leurs valeurs exactes on ajoute aux équations la *condition de normalisation* $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, dont l'utilisation permet d'exprimer l'une quelconque des probabilités p_i par l'intermédiaire des autres probabilités et éliminer respectivement l'une des équations.

Il arrive souvent dans la pratique de tomber sur des systèmes dont le graphe des états est de la forme représentée sur la figure 10.0.12 (tous les états peuvent être étendus en une chaîne, chacun d'entre eux étant lié par une liaison directe et inverse aux deux états voisins, sauf les deux états extrêmes, dont

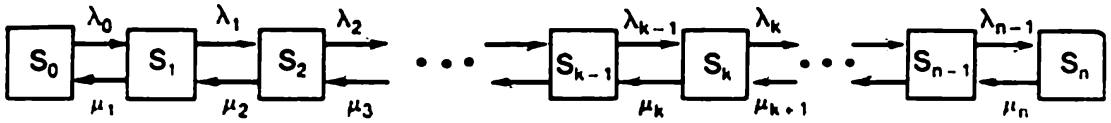


Fig. 10.0.12

chacun n'est lié qu'à un seul état voisin). Le schéma de la figure 10.0.12 s'appelle *schéma de naissance et de mort*. Cette dénomination est empruntée aux problèmes biologiques, où l'état d'une population s_k traduit la présence dans cette population de k unités. Le passage à droite est lié à la « naissance » des unités, et le passage à gauche, à leur « mort ». Sur la figure 10.0.12 les densités de la « naissance » ($\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$) sont marquées contre les flèches qui mènent de gauche à droite, et les densités de « mort » ($\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$), contre les flèches qui mènent de droite à gauche, chacune d'elles est marquée d'un indice de l'état à partir duquel est issue la flèche correspondante.

Pour le schéma de naissance et de mort les probabilités limites des états sont exprimées par les formules:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} p_0, \ \ldots;$$

$$p_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_k} p_0 \quad (k = 0, \ldots, n), \ \ldots;$$

$$p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n} p_0;$$

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 + \mu_n}\right\}^{-1}. \qquad (10.0.23)$$

Attirons l'attention sur la règle de calcul d'une probabilité quelconque de l'état (pour $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$p_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_k} p_0,$$

qui peut être énoncée de la façon suivante : *la probabilité d'un état quelconque dans le schéma de naissance et de mort* (voir figure 10.0.12) *est égale à la fraction dont le numérateur porte le produit de toutes les densités de naissance placées à gauche de s_k, et le dénominateur, le produit de toutes les densités de mort, placées à gauche de s_k, multipliée par la probabilité de l'état gauche extrême p_0.*

Si le processus est décrit par le schéma de naissance et de mort, on peut écrire les équations différentielles de l'espérance mathématique et de la variance

de la fonction aléatoire $X(t)$ qui est le nombre d'unités dans le système à l'instant t:

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, p_k(t); \tag{10.0.24}$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} [\lambda_k + \mu_k + 2k(\lambda_k - \mu_k) - 2m_x(t)(\lambda_k - \mu_k)]\, p_k(t). \tag{10.0.25}$$

Dans ces formules il faut poser $\lambda_n = \mu_0 = 0$. Les densités λ_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ et μ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ peuvent être des fonctions du temps non négatives quelconques.

Pour des valeurs de $m_x(t)$ suffisamment grandes (>20) et l'observation de la condition $0 < m_x(t) \pm 3\sqrt{D_x(t)} < n$ on peut admettre approximativement que la section de la fonction aléatoire $X(t)$ est une variable aléatoire normale de paramètres $m_x(t)$, $\sqrt{D_x(t)}$ obtenus par la résolution des équations (10.0.24), (10.0.25). Ces formules restent vraies pour $n \to \infty$, si la limite supérieure des sommes est remplacée par ∞.

Problèmes et exercices

10.1. On procède à la superposition de deux flux simples: 1) flux I de densité λ_1 et 2) flux II de densité λ_2 (fig. 10.1). Le flux III, résultant de la superposition, sera-t-il simple, et si oui, quelle est sa densité?

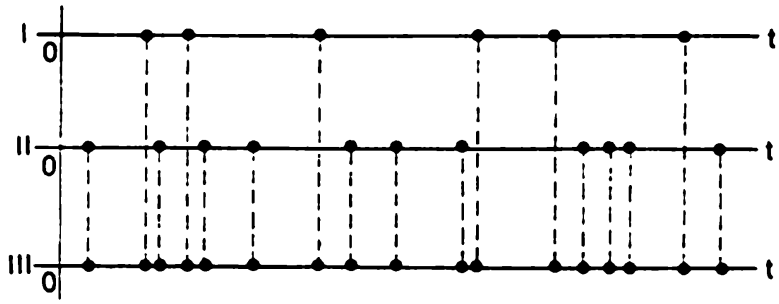


Fig. 10.1

Solution. Il le sera du fait que les propriétés de stationnarité, d'ordinarité et de l'absence de postaction se conservent; la densité du flux III est égale à $\lambda_1 + \lambda_2$.

10.2. On procède à un tamisage aléatoire d'un flux d'événements simple à densité λ; chaque événement, indépendamment des autres, se conserve dans le flux avec une probabilité p et le quitte avec une probabilité $1 - p$ (dans ce qui suit nous donnerons à cette opération le nom de transformation p du flux). Quel est le flux résultant de la transformation p d'un flux simple?

Solution. On obtient un flux simple de densité λp. En effet, dans la transformation p toutes les propriétés d'un flux simple (stationnarité, ordinarité, absence de postaction) se conservent, alors que la densité est multipliée par p.

10.3. L'intervalle de temps T entre les événements d'un flux ordinaire possède la densité

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{pour } t > t_0; \\ 0 & \text{pour } t < t_0. \end{cases} \tag{10.3}$$

Les intervalles entre les événements sont indépendants. 1) Construire le graphique de la densité $f(t)$. 2) Ce flux est-il simple? 3) Est-il un flux de Palma? 4) Quelle est sa densité $\tilde{\lambda}$? 5) Quel est le coefficient de variation v_t de l'intervalle entre les événements?

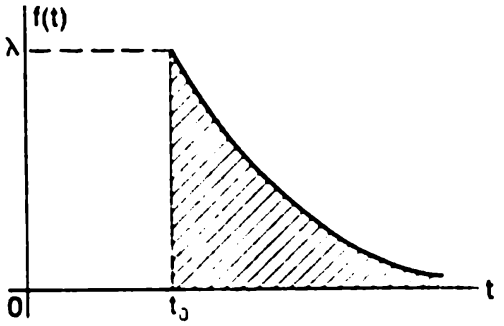


Fig. 10.3

Solution. 1) Voir fig. 10.3; appelons cette forme « répartition exponentielle décalée de t_0 ». 2) Non, elle ne l'est pas, la répartition (10.3) n'étant pas exponentielle. 3) Oui, elle l'est par suite de l'ordinarité du flux, de l'indépendance des intervalles et de leur répartition identique.

4) $\tilde{\lambda} = 1/\mathrm{M}[T]$; $\mathrm{M}[T] = 1/\lambda + t_0$; $\tilde{\lambda} = (1/\lambda + t_0)^{-1} = \lambda/(1+\lambda t_0)$.

5) $\mathrm{D}[T] = \dfrac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_t = \dfrac{1}{\lambda}$; $v_t = \dfrac{\sigma_t}{\mathrm{M}[T]} = \dfrac{1/\lambda}{1/\lambda + t_0} = \dfrac{1}{1+\lambda t_0}$.

10.4. Un flux d'événements simples de densité λ est porté par l'axe Ot. A partir de ce flux on forme un autre de la façon suivante:

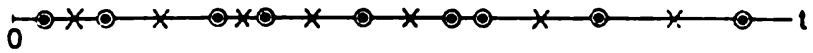


Fig. 10.4

l'intervalle entre chaques deux événements voisins est divisé en deux et au point de division on introduit encore un événement (voir fig. 10.4 où les ronds visualisent les événements principaux, et les croix, les événements insérés). Trouver la densité de probabilité $f(t)$ de l'intervalle T entre les événements voisins du nouveau flux. Ce flux est-il simple? Est-il un flux de Palma? Quel est le coefficient de variation de l'intervalle T entre les événements?

Solution. $T = X/2$, où X est réparti d'après la loi exponentielle de paramètre λ: $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. En utilisant la solution du

problème 8.1 et en posant dans la formule (8.1) $a = 1/2$; $b = 0$, on obtient

$$f(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t} \quad (t > 0). \tag{10.4}$$

Ceci est une répartition exponentielle à coefficient de variation $v_t = 1$. Pour autant, le nouveau flux n'est pas simple, ni même un flux de Palma. Prouvons d'abord que ce n'est pas un flux de Palma. Bien que les intervalles entre les événements soient répartis de la même façon d'après la loi (10.4), ils ne sont pas indépendants. Considérons deux intervalles voisins. Ils sont indépendants avec une probabilité 1/2, avec une probabilité 1/2 ils sont égaux l'un à l'autre, donc dépendants. De la sorte, le nouveau flux d'événements n'est pas un flux de Palma. Naturellement, il n'est pas non plus un flux simple, du fait qu'un tel flux est un cas particulier du flux de Palma.

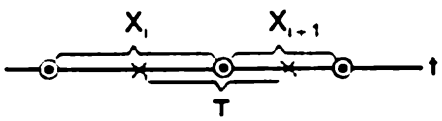


Fig. 10.5

Ainsi, la répartition exponentielle de l'intervalle entre les événements est une condition insuffisante pour que le flux soit simple.

10.5. Même énoncé que celui du problème précédent à cette différence près que le flux transformé se compose seulement des « croix » (milieux des intervalles). Répondre aux mêmes questions que dans le problème précédent.

Solution. Il est clair que la densité du nouveau flux ne change pas par rapport à celle du flux initial et reste égale à λ. L'intervalle entre deux croix voisines (fig. 10.5):

$$T = (X_i + X_{i+1})/2, \tag{10.5}$$

où X_i, X_{i+1} sont deux intervalles voisins du flux initial. Les variables X_i, X_{i+1} sont réparties d'après une loi exponentielle de paramètre λ, et leur demi-somme (10.5) l'est d'après la loi d'Erlang d'ordre 2, puisque l'intervalle T est égal à la somme de deux variables aléatoires réparties suivant la loi exponentielle divisée par deux. Ainsi, la densité de l'intervalle T entre deux croix est $f(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$ $(t > 0)$.

Dans le flux transformé tous les intervalles de temps voisins sont dépendants, du fait que dans la composition de ces intervalles entrent les mêmes variables aléatoires. Cependant, cette dépendance concerne seulement les intervalles de temps *voisins*. Quelquefois les flux de cette sorte sont dits à postaction faible.

Pour la variable aléatoire T le coefficient de variation [voir formule (10.0.7)] $v_t = 1/\sqrt{2} < 1$.

10.6. Le flux de voitures qui se déplacent sur une route dans le même sens constitue un flux simple de densité λ. Un homme s'engage dans la route pour arrêter la première voiture venue qui va dans le sens donné. Trouver la loi de répartition du temps T qu'il faut atten-

dre ; calculer son espérance mathématique m_t et l'écart quadratique moyen σ_t.

Solution. Un flux simple ne possédant pas de postaction, son « avenir » ne dépend pas du « passé », en particulier, du temps écoulé depuis le passage de la dernière voiture. La répartition du temps est exactement la même que celle de l'intervalle de temps entre l'apparition des voitures voisines, c'est-à-dire c'est une répartition exponentielle de paramètre λ : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$; on en tire : $m_t = 1/\lambda$; $D_t = 1/\lambda^2$; $\sigma_t = 1/\lambda = m_t$; $v_t = 1$.

Note. Si la route est à plusieurs voies, on peut considérer le flux de voitures comme la superposition des flux qui correspondent à chaque voie. Si chaque flux est simple, le résultat de la superposition est également un flux simple, puisque dans ce cas les propriétés de stationnarité, d'ordinarité et d'absence de postaction se conservent (voir problème 10.1).

10.7. Un passager arrive à la station d'autobus à un certain instant qui n'est lié d'aucune façon à l'horaire. Les autobus se suivent régulièrement avec un intervalle de temps l. Trouver la loi de répartition du temps que le passager doit attendre pour prendre l'autobus, et exprimer ses caractéristiques m_t, σ_t à l'aide de la densité λ du flux d'autobus.

Solution. L'instant d'arrivée du passager est réparti avec une densité constante dans l'intervalle l entre deux autobus ; la densité de probabilité du temps d'attente T est également constante [répartition uniforme dans l'intervalle $(0, l)$] : $f(t) = 1/l$ $(0 < t < l)$ ou, en introduisant la notation $1/l = \lambda$, $f(t) = \lambda$ $(0 < t < 1/\lambda)$. Pour la répartition uniforme sur le tronçon de longueur $1/\lambda$ on a $m_t = 1/(2\lambda)$; $D_t = 1/(12\lambda^2)$; $\sigma_t = 1/(2\sqrt{3}\lambda)$; $v_t = 1/\sqrt{3}$.

10.8*. L'axe Ot porte un flux de Palma d'événements ; les intervalles entre ces derniers sont répartis avec une densité $f(t)$. Sur l'axe

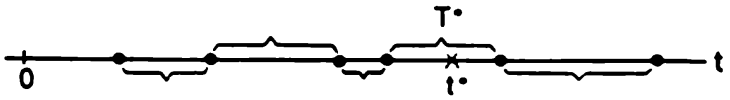


Fig. 10.8

Ot on jette d'une façon aléatoire le point t^* (par exemple : un « inspecteur » arrive pour observer l'apparition des événements, ou un passager se présente à la station d'autobus), l'instant t^* n'étant lié d'aucune façon aux instants d'apparition des événements du flux (fig. 10.8). Trouver la densité de probabilité de l'intervalle T^* sur lequel est tombé le point t^*, son espérance mathématique, sa variance et son écart quadratique moyen.

Solution. A première vue, il peut sembler que cette densité est la même que la densité de probabilité $f(t)$ de tout intervalle T entre les événements ; or, il n'en est rien. Le fait que sur le tronçon

T^* est tombé un point t^* jeté aléatoirement change sa répartition; en effet, si sur l'axe Ot il y a des tronçons différents (grands et petits), alors le point t^* tombe avec une probabilité plus grande sur l'un des grands tronçons.

Cherchons la densité de probabilité $f^*(t)$ du tronçon T^* sur lequel est tombé le point t^*. A cet effet calculons l'élément de probabilité $f^*(t)\,dt$, égal à la probabilité pour que le point t^* tombe dans l'intervalle dont la longueur soit comprise dans les limites $(t, t+dt)$. La valeur approchée de cette probabilité est égale au rapport de la longueur globale de tous les intervalles de ce type dans un intervalle de temps très grand Ω à la longueur totale de cet intervalle.

Supposons que dans un très grand intervalle Ω se sont rangés un grand nombre N d'intervalles entre les événements. Le nombre moyen N d'intervalles dont la longueur repose dans les limites $(t, t+dt)$ est égale à $Nf(t)\,dt$; la longueur moyenne globale de tels intervalles vaut approximativement $tNf(t)\,dt$. Quant à la durée moyenne totale Ω de tous les N intervalles, elle est égale (valeur approchée) à Nm_t, où $m_t = \mathrm{M}[T] = \int_0^\infty tf(t)\,dt$. En divisant l'un par l'autre, on obtient:

$$f^*(t)\,dt \approx \frac{Ntf(d)\,dt}{Nm_t} = \frac{tf(t)}{m_t}\,dt.$$

Cette égalité est observée avec une précision d'autant plus grande que l'intervalle de temps Ω est plus long (que le nombre N est plus grand). A la limite, la loi de répartition de la variable aléatoire T^* s'écrit

$$f^*(t) = \frac{t}{m_t} f(t) \quad (t > 0); \tag{10.8}$$

$$\mathrm{M}[T^*] = \frac{1}{m_t}\int_0^\infty t^2 f(t)\,dt = \frac{1}{m_t}\alpha_2(t) = \frac{1}{m_t}(D_t + m_t^2);$$

$$\mathrm{D}[T^*] = \alpha_2[T^*] - (\mathrm{M}[T^*])^2 = \frac{1}{m_t}\int_0^\infty t^3 f(t)\,dt - (\mathrm{M}[T^*])^2.$$

10.9. Dans l'énoncé du problème 10.8 le flux de Palma est un flux simple de densité λ, c'est-à-dire $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$. Trouver la densité $f^*(t)$ de l'intervalle T^* dans lequel tombe le point t^*.

Solution. Compte tenu que $m_t = 1/\lambda$, la formule (10.8) donne $f^*(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$, ce qui n'est rien d'autre que la *loi d'Erlang d'orde* 2 [voir formule (10.0.3) pour $k = 2$].

10.10*. L'axe Ot porte un flux de Palma d'événements de densité $f(t)$ de l'intervalle T entre les événements voisins. Le point aléatoire

t^* (« inspecteur ») tombe quelque part dans l'intervalle T^* (fig. 10.10) Il le divise en deux intervalles : Q, de l'événement précédent le plus proche à t^*, et H, de t^* à l'événement suivant le plus proche. Trouver la loi de répartition de ces deux intervalles.

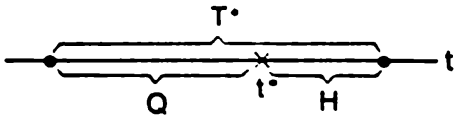


Fig. 10.10

Solution. Supposons que la variable aléatoire T^* ait pris la valeur s : $T^* = s$, et cherchons la loi de répartition conditionnelle de l'intervalle Q sous cette condition. Désignons sa densité par $f_Q(t \mid s)$. Puisque le point t^* est jeté sur l'axe Ot de façon parfaitement aléatoire (sans rapport aux événements du flux), il est clair que sa loi de répartition est uniforme dans les limites de l'intervalle $T^* = s$:

$$f_Q(t \mid s) = 1/s \quad \text{pour} \quad 0 < t < s. \tag{10.10.1}$$

Pour trouver la répartition inconditionnelle $f_Q(t)$ il faut moyenner la densité (10.10.1) avec le « poids » $f^*(s)$. En appliquant la formule (10.8), on obtient

$$f^*(s) = \frac{s}{m_t} f(s); \quad f_Q(t) = \int_0^\infty f_Q(t \mid s) f^*(s)\, ds.$$

Compte tenu que $f_Q(t \mid s)$ diffère de zéro seulement pour $s > t$, on peut écrire

$$f_Q(t) = \int_t^\infty \frac{s}{sm_t} f(s)\, ds = \frac{1}{m_t} \int_t^\infty f(t)\, dt = \frac{1}{m_t} [1 - F(t)],$$

où $F(t)$ est la fonction de répartition de l'intervalle T entre les événements dans le flux de Palma.

Ainsi,

$$f_Q(t) = \frac{1}{m_t} [1 - F(t)]. \tag{10.10.2}$$

Il est clair que l'intervalle de temps $H = T^* - Q$ a la même loi de répartition

$$f_H(t) = \frac{1}{m_t} [1 - F(t)]. \tag{10.10.3}$$

10.11. En utilisant les résultats du problème précédent vérifier la solution du problème 10.6 obtenue à partir d'autres considérations.

Solution. Soit $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$; $mt = 1/\lambda$. D'après la formule (10.10.3)

$$f_H(t) = \lambda[1 - 1 + e^{-\lambda t}] = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

c'est-à-dire la solution du problème 10.6 est correcte.

10.12. Un passager se présente à la station d'autobus à un instant qui d'aucune façon n'est lié à l'horaire. Le flux d'autobus est un flux de Palma à intervalles qui suivent la loi de répartition uniforme

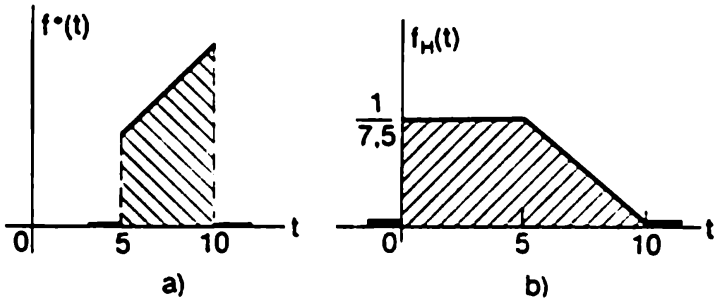


Fig. 10.12

dans les limites de 5 à 10 mn. Trouver: 1) la densité de probabilité de l'intervalle dans lequel est tombé le passager; 2) la densité de probabilité du temps H qu'il a à attendre l'autobus; 3) le temps moyen d'attente de l'autobus.

Solution. Soit $f(t) = 1/5$ pour $t \in (5, 10)$; $m_t = 7{,}5$.

1) D'après la formule (10.8) $f^*(t) = t/37{,}5$ pour $t \in (5, 10)$. Le graphique de la densité $f^*(t)$ est représenté sur la figure 10.12, *a*.

$$2)\ F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 5; \\ (t-5)/5 & \text{pour} \quad 5 < t \leqslant 10; \\ 1 & \text{pour} \quad t > 10. \end{cases}$$

D'après la formule (10.10.3) on en tire

$$f_H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0; \\ 1/7{,}5 & \text{pour} \quad 0 < t < 5; \\ (10-t)/37{,}5 & \text{pour} \quad 5 < t < 10; \\ 0 & \text{pour} \quad t > 10. \end{cases}$$

Le graphique de la densité $f_H(t)$ est représenté sur la figure 10.12, *b*.

3) Le temps d'attente moyen

$$m_H = \int_0^5 \frac{t}{7{,}5}\,dt + \int_5^{10} t\,\frac{10-t}{37{,}5}\,dt \approx 6{,}11 \text{ mn}.$$

10.13. On considère un flux d'Erlang d'ordre k de densité de probabilité de l'intervalle T entre les événements

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \tag{10.13.1}$$

Trouver la fonction de répartition $F_k(t)$ de cet intervalle.

Solution. La formule de la fonction de répartition pourrait s'obtenir d'après la formule usuelle

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(t)\, dt,$$

mais il est plus simple de la calculer en partant directement de la définition de $F_k(t) = \mathrm{P}\{T < t\}$.

Passons à l'événement contraire et calculons $\mathrm{P}\{T > t\}$. Associons l'origine O à l'un des événements du flux d'Erlang et portons à droite de l'origine deux intervalles: T (la distance jusqu'à l'événement suivant du flux d'Erlang) et $t < T$ (fig. 10.13).

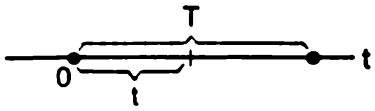


Fig. 10.13

Pour que l'inégalité $T > t$ soit observée il faut que dans l'intervalle t tombe moins que k événements du flux simple de densité λ (soit 0, soit 1, . . ., soit $k - 1$). La probabilité pour que dans l'intervalle t tombe m événements est

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

D'après le théorème des probabilités totales

$$\mathrm{P}\{T > t\} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

d'où

$$F_k(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = 1 - R(k-1,\ \lambda t), \tag{10.13.2}$$

où $1 - R(m, a)$ est une fonction tabulée (voir annexe 2).

10.14*. Le flux de défaillances d'un ordinateur est un flux d'Erlang d'ordre k de densité (10.13.1) de l'intervalle entre les défaillances (le rétablissement de l'ordinateur après la défaillance se produit instantanément). L'« inspecteur » arrive à un instant aléatoire t^* et attend la première défaillance. Trouver la densité de probabilité du temps H durant lequel il attendra la défaillance, et son espérance mathématique m_H.

Solution. D'après la formule (10.10.3)

$$f_H(t) = \frac{1}{m_t}[1 - F_k(t)],$$

où $F_k(t)$ est donnée par la formule (10.13.2), et $m_t = k/\lambda$. On en tire

$$f_H(t) = \frac{\lambda}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t} = \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\lambda(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \qquad (10.14.1)$$

Récrivons la formule (10.14.1) sous la forme

$$f_H(t) = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k}\frac{\lambda(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda t} \quad (t > 0) \qquad (10.14.2)$$

qui rend clair que la variable aléatoire H possède une loi de répartition « mixte » de k répartitions d'Erlang d'ordres différents; avec la même probabilité $1/k$ elle observe la loi de répartition d'Erlang d'ordres 1, 2, . . ., k. L'espérance mathématique d'une telle variable aléatoire se trouve d'après la formule de l'espérance mathématique totale :

$$m_H = \mathrm{M}[H] = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k}\mathrm{M}[H|r], \qquad (10.14.3)$$

où $\mathrm{M}[H \mid r]$ est l'espérance mathématique conditionnelle de la variable aléatoire H sous la condition qu'elle est répartie d'après la loi d'Erlang d'ordre r.

Calculons $\mathrm{M}[H \mid r] = r/\lambda$ d'après la première formule (10.0.4), d'où

$$m_H = \frac{1}{k\lambda}\sum_{r=1}^{k} r = \frac{(k+1)k}{2k\lambda} = \frac{k+1}{2\lambda}. \qquad (10.14.4)$$

10.15*. Un flux de Palma d'événements à densité de probabilité $f(t)$ de l'intervalle entre les événements subit la transformation p (voir problème 10.2). La variable aléatoire V est l'intervalle entre les événements dans le flux transformé. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire V.

Solution. La variable aléatoire V est la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes (voir problème 8.63) : $V = \sum_{k=1}^{Y} T_k$, où Y est une variable aléatoire discrète à loi de répartition géométrique $\mathrm{P}\{Y = m\} = pq^{m-1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$; $q = 1 - p$, et chacune des variables aléatoires T_k possède la loi de répartition $f(t)$.

Alors les intervalles successifs entre les événements du flux ayant subi la transformation p sont

$$V_1 = \sum_{k=1}^{Y_1} T_k; \quad V_2 = \sum_{i=1}^{Y_2} T_{j+Y_1}; \ \ldots,$$

où les variables aléatoires $V_1, V_2, \ldots$ sont indépendantes, et le flux transformé est un flux de Palma. Conformément au problème 8.63

$$m_V = \frac{m_t}{p}; \quad D_V = \frac{D_t}{p} + m_t^2 \frac{q}{p^2},$$

où

$$m_t = \int_0^\infty t f(t)\, dt; \quad D_t = \int_0^\infty (t - m_t)^2 f(t)\, dt.$$

Note. On peut démontrer que par une transformation p multiple d'un flux de Palma on obtient un flux qui s'apparente à un flux simple.

10.16. Trouver la loi de répartition de l'intervalle T entre les événements d'un flux de Palma, si la variable aléatoire T est déterminée par l'expression $T = \sum_{k=1}^{Y} T_k$, c'est-à-dire représente la somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires, où les variables aléatoires T_k sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre λ, alors que la variable aléatoire Y n'en dépend pas et possède une loi de répartition géométrique qui commence par l'unité: $p_n = \mathrm{P}\{Y = n\} = pq^{n-1}$ $(0 < p < 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Solution. Dans le problème 8.62 nous avons montré que la variable aléatoire T obéit à la loi exponentielle de paramètre λp; par conséquent, le flux de Palma considéré est un flux simple de densité λp, qui s'obtient par une transformation p d'un flux simple de densité λ. Ceci confirme que la solution du problème 10.2 est correcte.

10.17. Le flux d'autobus qui arrivent à la station est un flux de Palma; l'intervalle T entre eux a une densité de probabilité $f_T(t)$. L'arrêt de l'autobus à la station dure un temps non aléatoire τ. Un passager, en arrivant à la station à un instant aléatoire t^* (fig. 10.17, *a*) monte dans l'autobus, si celui-ci se trouve à la station, l'attend pendant un temps τ' s'il n'y est pas, et quitte la station et s'en va à pied si pendant ce temps l'autobus n'arrive pas. La loi de répartition $f_T(t)$ est telle que la variable aléatoire T ne peut pas être inférieure à $\tau + \tau'$ (fig. 10.17, *b*). Trouver la probabilité de ce que le passager prend l'autobus.

Solution. Passons à l'événement contraire $\bar{A}$ = {le passager ne prend pas l'autobus}. Cela signifie qu'il arrive à la station à l'instant t^* lorsqu'il n'y a pas d'autobus et que l'autobus suivant

ne vient pas pendant le temps d'attente. Chaque événement « arrivée de l'autobus à la station » est accompagné d'une zone de « capture » du passager; la largeur de cette zone est $\tau' + \tau$ (fig. 10.17, *c*).

L'événement $\bar{A}$ = {le passager n'a pas pris l'autobus} correspond à ce que le point t^* tombe hors des limites de la zone de capture (fig. 10.17, *d*). Le point t^* est réparti suivant la loi uniforme sur

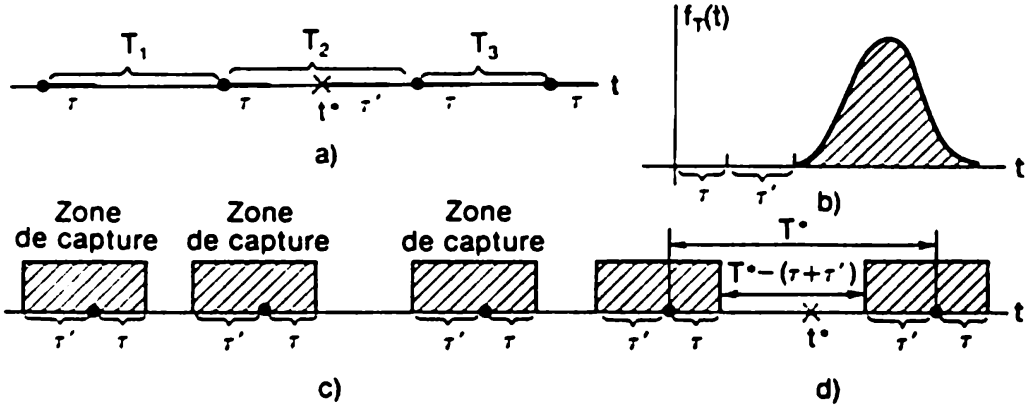


Fig. 10.17

toute la longueur de l'intervalle T^*. La probabilité pour qu'il tombe sur le tronçon $T^* - (\tau + \tau')$, qui ne fait pas partie de la zone de capture, est égale d'après l'intégrale de la probabilité totale:

$$P(\bar{A}) = \int_{\tau+\tau'}^{\infty} \frac{t-(\tau+\tau')}{t} f^*(t)\,dt =$$

$$= \int_{\tau+\tau'}^{\infty} \frac{t-(\tau+\tau')}{t} \frac{t}{m_t} f(t)\,dt = \frac{1}{m_t} \int_{\tau+\tau'}^{\infty} t f(t)\,dt - \frac{\tau+\tau'}{m_t} \int_{\tau+\tau'}^{\infty} f(t)\,dt,$$

où m_t est l'intervalle moyen entre les autobus.

La probabilité pour que le passager prenne l'autobus est égale à $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

10.18. Un flux simple de densité λ subit la transformation suivante. Si l'intervalle T_i entre les événements voisins s'avère plus petit qu'une certaine limite admissible t_0 (« intervalle de sécurité »), l'événement s'écarte de l'événement précédent de l'intervalle t_0; mais si $T_i > t_0$, l'événement garde sa place (fig. 10.18). Le flux transformé constitué par les points Θ_1', Θ_2', . . . sur l'axe $O't'$ est-il simple? Est-ce un flux de Palma?

Solution. Le flux transformé n'est ni l'un ni l'autre, puisqu'il possède une postaction qui va aussi loin que l'on veut. Par exemple, les points Θ_7, Θ_8, Θ_9, Θ_{10} qui se « serrent » sur l'axe $O't'$ repoussent chaque point successif sur l'axe $O't'$ d'un intervalle de temps qui dépend des instants d'arrivée des événements et des intervalles

entre eux dans le passé. Si t_0 est sensiblement plus petit que la distance moyenne entre les événements du flux initial: $t_0 \ll 1/\lambda$, la postaction et la transformation du flux peuvent être négligées.

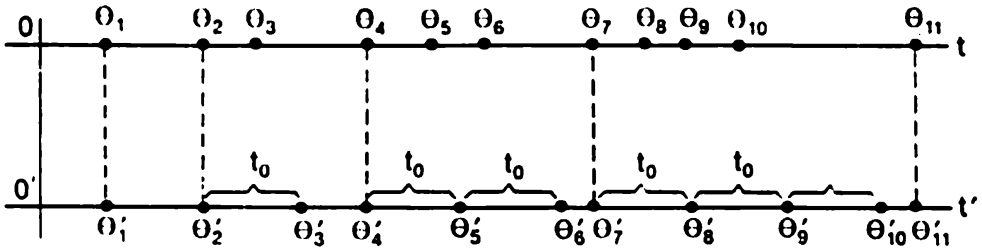


Fig. 10.18

10.19. On observe la superposition de deux flux de Palma indépendants de densités de probabilité de l'intervalle entre les événements $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Le flux résultant est-il un flux de Palma?

Solution. La superposition de deux flux de Palma se présente suivant la figure 10.19. Il est clair que les intervalles T_1, T_2, ... du flux résultant III ne sont pas indépendants, puisque leurs dimensions peuvent être conditionnées par les dimensions d'un seul et

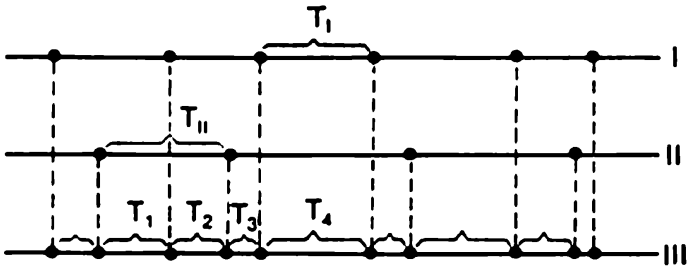


Fig. 10.19

même intervalle sur l'axe I ou II. Par exemple, la somme de T_1 et T_2 donne T_{II}; donc, ils ne sont pas indépendants. Pourtant, cette dépendance s'amortit rapidement à mesure que la distance dans le temps entre les débuts des intervalles augmente.

Note. On peut prouver que lorsque la superposition porte sur un nombre assez grand de flux de Palma indépendants de densités comparables, on obtient un flux proche d'un flux simple.

10.20. Un ordinateur en service peut être envisagé comme un système physique S qui à la suite d'une révision peut se trouver en l'un des états suivants: s_1, l'ordinateur est parfaitement en bon état; s_2, l'ordinateur présente des défaillances négligeables de mémoire active qui ne l'empêchent pas de résoudre les problèmes; s_3, l'ordinateur présente des défaillances importantes qui laissent possible la résolution d'une classe limitée de problèmes; s_4, l'ordinateur est complètement hors service.

A l'instant initial l'ordinateur est parfaitement en bon état (s_1). Sa révision se fait à des instants fixés t_1, t_2, t_3. Le processus qui se déroule dans le système S peut être considéré comme une chaîne de Markov homogène à trois pas (première, deuxième et troisième révisions de l'ordinateur). La matrice des probabilités de transition est de la forme

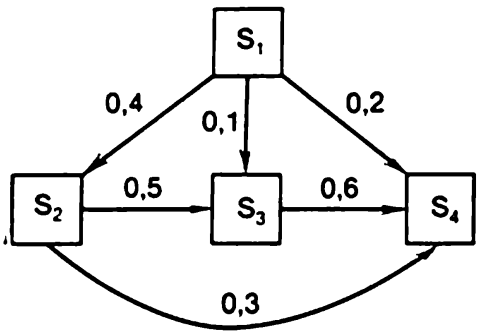


Fig. 10.20

$$\| P_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{Vmatrix}.$$

Déterminer les probabilités des états de l'ordinateur après trois révisions.

Solution. Le graphe des états de l'ordinateur est de la forme représentée sur la figure 10.20. Contre chaque flèche est marquée la probabilité de transition correspondante. Les probabilités initiales des états $p_1(0) = 1$; $p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0$.

D'après la formule (10.0.14), en ne retenant dans la somme des probabilités que ceux des états à partir desquels est possible la transition directe à l'état donné, on trouve

$$p_1(1) = p_1(0)\,P_{11} = 1\cdot 0,3 = 0,3;$$
$$p_2(1) = p_1(0)\,P_{12} = 1\cdot 0,4 = 0,4;$$
$$p_3(1) = p_1(0)\,P_{13} = 1\cdot 0,1 = 0,1;$$
$$p_4(1) = p_1(0)\,P_{14} = 1\cdot 0,2 = 0,2;$$
$$p_1(2) = p_1(1)\,P_{11} = 0,3\cdot 0,3 = 0,09;$$
$$p_2(2) = p_1(1)\,P_{12} + p_2(1)\,P_{22} = 0,3\cdot 0,4 + 0,4\cdot 0,2 = 0,20;$$
$$p_3(2) = p_1(1)\,P_{13} + p_2(1)\,P_{23} + p_3(1)\,P_{33} = 0,27;$$
$$p_4(2) = p_1(1)\,P_{14} + p_2(1)\,P_{24} + p_3(1)\,P_{34} + p_4(1)\,P_{44} = 0,44;$$
$$p_1(3) = p_1(2)\,P_{11} = 0,09\cdot 0,3 = 0,027;$$
$$p_2(3) = p_1(2)\,P_{12} + p_2(2)\,P_{22} = 0,09\cdot 0,4 + 0,20\cdot 0,2 = 0,076;$$
$$p_3(3) = p_1(2)\,P_{13} + p_2(2)\,P_{23} + p_3(2)\,P_{33} = 0,217;$$
$$p_4(3) = p_1(2)\,P_{14} + p_2(2)\,P_{24} + p_3(2)\,P_{34} + p_4(2)\,P_{44} = 0,680.$$

Ainsi, après trois révisions les probabilités des états de l'ordinateur sont: $p_1(3) = 0,027$; $p_2(3) = 0,076$; $p_3(3) = 0,217$; $p_4(3) = 0,680$.

10.21. Le point S se déplace sur l'axe d'abscisses Ox (fig. 10.21, *a*) d'après la loi: à chaque pas il garde sa place avec une probabilité 0,5, saute de l'unité à droite avec une probabilité 0,3, et à gauche, avec une probabilité 0,2. Après k pas l'état du système S est déterminé par une coordonnée (l'abscisse) du point S. La position initiale

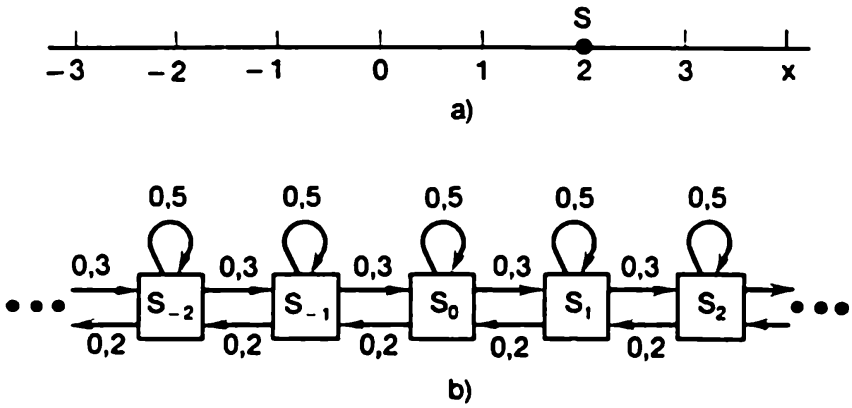


Fig. 10.21

du point est l'origine des coordonnées. En considérant la suite des positions du point S comme une chaîne de Markov, trouver pour lui la probabilité de se trouver après quatre pas pas plus loin qu'à l'unité de l'origine des coordonnées.

Solution. Désignons l'état du système par s_i, où i est la coordonnée de S sur l'axe des abscisses. Le graphe des états marqué est représenté sur la figure 10,21, *b*, où à titre d'illustration sont tracées les « boucles » qui correspondent au séjour de S en position antérieure.

La suite des états forme une chaîne de Markov à nombre d'états infini. Les probabilités de transition P_{ij} ne diffèrent de zéro que dans le cas où $j = i$; $j = i - 1$; $j = i + 1$; $P_{i,i} = 0{,}5$; $P_{i,i+1} = 0{,}3$; $P_{i,i-1} = 0{,}2$. Toutes les autres probabilités de transition sont nulles. La probabilité P cherchée est égale à la somme des probabilités: $p_0(4) + p_1(4) + p_{-1}(4)$. Cherchons-les en appliquant les relations récurrentes (10.0.14).

Soient $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_{-1}(0) = \ldots = 0$. Ensuite

$$p_0(1) = p_0(0)\,P_{0,0} = 0{,}5\,; \quad p_1(1) = p_0(0)\,P_{0,1} = 0{,}3\,;$$

$$p_{-1}(1) = p_0(1)\,P_{0,-1} = 0{,}2;$$

$$p_0(2) = p_0(1)\,P_{0,0} + p_1(1)\,P_{1,0} + p_{-1}(1)\,P_{-1,0} =$$

$$= 0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}37\,;$$

$$p_1(2) = p_0(1)\,P_{0,1} + p_1(1)\,P_{1,1} = 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}30\,;$$

$$p_2(2) = p_1(1)\,P_{1,2} = 0{,}3\cdot 0{,}3 = 0{,}09\,;$$

$$p_{-1}(2) = p_0(1)\,P_{0,-1} + p_{-1}(1)\,P_{-1,-1} = 0{,}5\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}5 = 0{,}20\,;$$

$$p_{-2}(2) = p_{-1}(1)\, P_{-1,-2} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04\,;$$
$$p_0(3) = p_0(2)\, P_{0,0} + p_1(2)\, P_{1,0} + p_{-1}(2)\, P_{-1,0} = 0{,}305\,;$$
$$p_1(3) = p_0(2)\, P_{0,1} + p_1(2)\, P_{1,1} + p_2(2)\, P_{2,1} = 0{,}279\,;$$
$$p_2(3) = p_1(2)\, P_{1,2} + p_2(2)\, P_{2,2} = 0{,}135\,;$$
$$p_3(3) = p_2(2)\, P_{2,3} = 0{,}027\,;$$
$$p_{-1}(3) = p_{-2}(2)\, P_{-2,-1} + p_{-1}(2)\, P_{-1,-1} + p_0(2)\, P_{0,-1} = 0{,}186\,;$$
$$p_{-2}(3) = p_{-2}(2)\, P_{-2,-2} + p_{-1}(2)\, P_{-1,-2} = 0{,}060\,;$$
$$p_{-3}(3) = p_{-2}(2)\, P_{-2,-3} = 0{,}008\,;$$
$$p_0(4) = p_1(3)\, P_{1,0} + p_0(3)\, P_{0,0} + p_{-1}(3)\, P_{-1,0} \approx 0{,}264\,;$$
$$p_1(4) = p_2(3)\, P_{2,1} + p_1(3)\, P_{1,1} + p_0(3)\, P_{0,1} \approx 0{,}257\,;$$
$$p_{-1}(4) = p_0(3)\, P_{0,-1} + p_{-1}(3)\, P_{-1,-1} + p_{-2}(3)\, P_{-2,-1} \approx 0{,}172.$$

La probabilité cherchée

$$p = p_0(4) + p_1(4) + p_{-1}(4) \approx 0{,}693.$$

Ainsi, la probabilité de l'événement A qui consiste en ce qu'après quatre pas le point S se trouve par rapport à l'origine des coordonnées à une distance pas plus grande que l'unité, est égale à 0,693.

10.22. Pour l'énoncé du problème précédent, trouver les probabilités pour qu'en quatre pas le point S ne s'éloigne pas de l'origine des coordonnées à plus d'une unité.

Solution. Désignons par $\tilde{p}_0(k)$, $\tilde{p}_1(k)$, $\tilde{p}_{-1}(k)$ les probabilités des états s_0, s_1, s_{-1} sous la condition que jusqu'au k-ième pas y compris le point S ne s'éloigne aucune fois de l'origine des coordonnées à plus d'une unité.

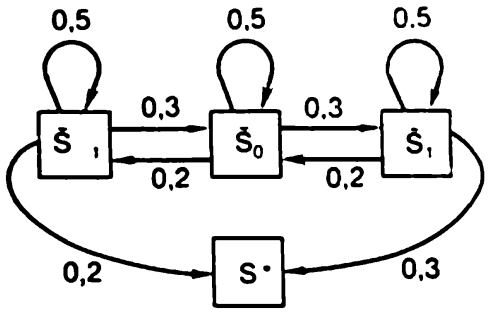


Fig. 10.22

Au premier coup d'œil on établit que le processus n'est pas une chaîne de Markov du fait que les probabilités des états futurs dépendent de la « préhistoire »: le point S a-t-il été au moins une fois plus loin qu'à l'unité de l'origine des coordonnées? Mais on peut le ramener à la chaîne de Markov en introduisant encore un état s^*: le point a été au moins une fois plus loin que de l'unité de l'origine des coordonnées.

Le graphe des états est représenté sur la figure 10.22. Il n'y a transition de l'état s^* en aucun autre état; dans la théorie des chaînes de Markov un tel état est dit « absorbant ». La probabilité de l'événement A = {le point S ne s'éloigne aucune fois en quatre pas de

l'origine des coordonnées à une distance plus grande que l'unité} se calcule comme la somme des probabilités $\tilde{p}_0(4) + \tilde{p}_1(4) + \tilde{p}_{-1}(4)$ pour un système à graphe des états qui correspond à la figure 10.22. Nous proposons au lecteur de calculer ces probabilités lui-même.

10.23. Le système S est une installation technique composée de m ensembles soumis de temps en temps (aux instants $t_1, t_2, \ldots, t_k$) à une révision préventive et à la réparation. Après chaque pas (instants de la révision et de la réparation) le système peut se trouver en l'un des états suivants: s_0, tous les ensembles sont en bon état (aucun d'eux n'a été remplacé par un nouveau); s_1, un ensemble a été remplacé par un nouveau, les autres sont en bon état; s_2, deux ensembles sont remplacés par des nouveaux, les autres sont en bon état; . . . ; s_i, i ensembles ($i < m$) sont remplacés par des nouveaux, les autres sont en bon état; . . . ; s_m, tous les ensembles sont remplacés par des nouveaux.

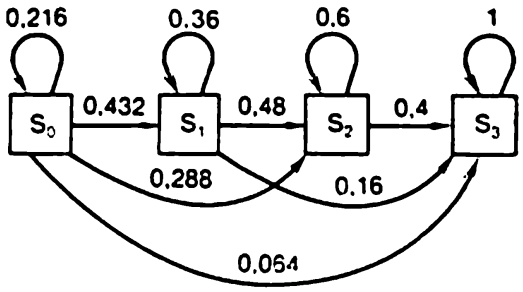


Fig. 10.23

La probabilité pour qu'à l'instant de la révision l'ensemble soit remplacé par un nouveau est égale à p (indépendamment de l'état des autres ensembles). En considérant les états du système S comme une chaîne de Markov, trouver les probabilités de transition et calculer pour $m = 3$; $p = 0{,}4$ les probabilités des états du système après trois pas (à l'instant initial tous les ensembles sont en bon état).

Solution. En introduisant la notation $q = 1 - p$, écrivons les probabilités de transition de la chaîne. Pour tout état s_i du système la probabilité P_{ij} est nulle pour $j < i$; la probabilité P_{ii} est égale à la probabilité pour qu'au pas donné aucun ensemble ne soit remplacé par un nouveau, c'est-à-dire qu'il reste encore dans l'installation $m - i$ ensembles non remplacés: $P_{ii} = q^{m-i}$. Pour $i < j$, la probabilité de la transition P_{ij} est égale à la probabilité pour qu'au pas donné, des $m - i$ ensembles non remplacés encore, $j - i$ doivent être remplacés par des nouveaux. En appliquant la répartition binomiale, on trouve: $P_{ij} = C_{m-i}^{j-i} p^{j-i} q^{m-j+i}$. L'état s_m est un état absorbant. Pour $m = 3$, $p = 0{,}4$, le graphe des états du système est de la forme représentée sur la figure 10.23:

$$\| P_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0.216 & 0{,}432 & 0{,}288 & 0{,}064 \\ 0 & 0{,}36 & 0{,}48 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{Vmatrix}.$$

Soient: $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$. Voici les probabilités des états après un, deux, trois pas:

$$p_0(1) = 0{,}216; \quad p_1(1) = 0{,}432;$$
$$p_2(1) = 0{,}288; \quad p_3(1) = 0{,}064;$$
$$p_1(2) = p_1(1)P_{11} + p_0(1)P_{01} \approx 0{,}249;$$
$$p_2(2) = p_2(1)P_{22} + p_0(1)P_{02} + p_1(1)P_{12} \approx 0{,}442;$$
$$p_3(2) = p_3(1)P_{33} + p_2(1)P_{23} + p_1(1)P_{13} + p_0(1)P_{03} \approx \approx 0{,}262;$$
$$p_0(3) = p_0(2)P_{00} \approx 0{,}010;$$
$$p_1(3) = p_1(2)P_{11} + p_0(2)P_{01} \approx 0{,}110;$$
$$p_2(3) = p_2(2)P_{22} + p_0(2)P_{02} + p_1(2)P_{12} \approx 0{,}398;$$
$$P_3(3) = p_3(2)P_{33} + p_0(2)P_{03} + p_1(2)P_{13} + + p_2(2)P_{23} \approx 0{,}482.$$

10.24. La révision d'un ordinateur est réalisée aux instants t_1, t_2, t_3. Ses états possibles: s_0, complètement en bon état; s_1, défaillances négligeables qui laissent possible son service; s_2, défaillances importantes qui laissent pourtant possible la résolution d'un nombre limité de problèmes; s_3, complètement hors service.

La matrice des probabilités de transition est de la forme

$$\|P_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Construire le graphe des états. Trouver les probabilités des états de l'ordinateur après une, deux, trois révisions, si au début (à $t = 0$) il était complètement en bon état.

Solution. Le graphe des états est représenté sur la figure 10.24.

$$p_0(1) = p_0(0)P_{00} = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5;$$
$$p_1(1) = p_0(0)P_{01} = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3;$$
$$p_2(1) = p_0(0)P_{02} = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2;$$
$$p_0(2) = p_0(1)P_{00} = 0{,}25; \quad p_1(2) = p_0(1)P_{01} + + p_1(1)P_{11} = 0{,}27;$$
$$p_2(2) = p_0(1)P_{02} + p_1(1)P_{12} + p_2(1)P_{22} = 0{,}28;$$
$$p_3(2) = p_2(1)P_{23} + p_1(1)P_{13} = 0{,}20;$$
$$p_0(3) = p_0(2)P_{00} = 0{,}125;$$

$$p_1(3) = p_0(2)P_{01} + p_1(2)P_{11} = 0{,}183;$$
$$p_2(3) = p_0(2)P_{02} + p_1(2)P_{12} + p_2(2)P_{22} = 0{,}242;$$
$$p_3(3) = p_1(2)P_{13} + p_2(2)P_{23} + p_3(2)P_{33} = 0{,}450.$$

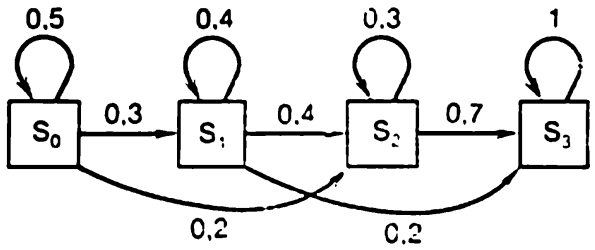


Fig. 10.24

10.25. On considère le processus du fonctionnement d'un ordinateur. Le flux de ses défaillances en service est un flux simple de densité λ. Si l'ordinateur tombe en panne, celle-ci est localisée sur-le-champ, et le personnel s'attaque à l'élimination de la défaillance (à la réparation). Le temps de réparation obéit à la loi de répartition exponentielle de paramètre μ: $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$ $(t > 0)$. A l'instant initial $(t = 0)$ l'ordinateur est en bon état. Trouver 1) la probabilité pour qu'à l'instant t l'ordinateur fonctionne; 2) la probabilité pour qu'en un temps $(0, t)$ il subit au moins une défaillance; 3) les probabilités limites des états de l'ordinateur.

Solution. 1) Le système S (l'ordinateur) peut se trouver en états suivants: s_0, l'ordinateur est en bon état et fonctionne bien; s_1,

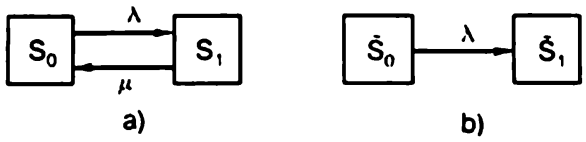


Fig. 10.25

l'ordinateur est en panne et subit la réparation. Le graphe des états marqué est donné par la figure 10.25, *a*.

Les équations de Kolmogorov des probabilités des états $p_0(t)$ et $p_1(t)$ sont de la forme

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - \lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 - \mu p_1. \qquad (10.25.1)$$

L'une quelconque de ces équations peut être rejetée, puisque pour un instant quelconque t on a $p_0 + p_1 = 1$. En portant dans la pre-

mière des équations (10.25.1) $p_1 = 1 - p_0$, on obtient une équation différentielle en p_0:

$$dp_0/dt = \mu - (\lambda + \mu) p_0.$$

En résolvant cette équation pour la condition initiale $p_0(0) = 1$, on obtient

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda - \mu}\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right], \qquad (10.25.2)$$

d'où

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}]. \qquad (10.25.3)$$

2) La probabilité $\tilde{p}(t)$ pour qu'en un temps t l'ordinateur enregistre au moins une défaillance s'obtient en introduisant de nouveaux états du système S: $\tilde{s}_0$, aucune défaillance, $\tilde{s}_1$, au moins une défaillance. L'état $\tilde{s}_1$ est un état « absorbant » (voir fig. 10.25, *b*).

En résolvant l'équation de Kolmogorov $dp_0/dt = -\lambda\tilde{p}_0$ avec la condition initiale $\tilde{p}_0(0) = 1$, on obtient $\tilde{p}_0(t) = e^{-\lambda t}$, d'où $\tilde{p}_1(t) = 1 - \tilde{p}_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Ainsi, la probabilité pour que pendant le temps t l'ordinateur subisse au moins une défaillance est égale à $\tilde{p}_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Dans le cas considéré cette probabilité pourrait être calculée d'une façon plus simple, comme la probabilité pour qu'en un temps t dans le flux de défaillances simple de densité λ apparaisse au moins un événement (défaillance).

3) Avec $t \to \infty$ on obtient des équations (10.25.2), (10.25.3) les probabilités limites des états $p_0 = \mu/(\lambda + \mu)$; $p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$ qui pourraient d'ailleurs être obtenues directement sur le graphe des états, en utilisant le schéma de naissance et de mort (laissons au lecteur le soin de le faire lui-même).

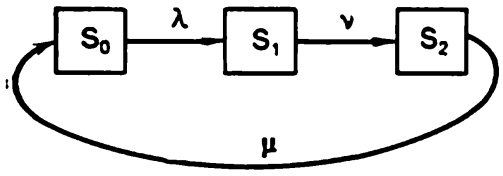


Fig. 10.26

10.26. Dans l'énoncé du problème précédent (10.25) la défaillance de l'ordinateur est établie non pas sur-le-champ, mais après un certain temps réparti d'après la loi exponentielle de paramètre ν. Ecrire et résoudre les équations de Kolmogorov pour les probabilités des états. Trouver les probabilités limites des états (directement d'après le graphe des états).

Solution. Les états du système: s_0, l'ordinateur est en bon état; s_1, il est en panne, mais ceci n'est pas encore établi; s_2, il est en réparation. Le graphe des états est donné par la figure 10.26.

Les équations de Kolmogorov des probabilités des états s'écrivent

$$\frac{dp_0}{dt}=\mu p_2-\lambda p_0;\quad \frac{dp_1}{dt}=\lambda p_0-\nu p_1;\quad \frac{dp_2}{dt}=\nu p_1-\mu p_2. \qquad (10.26.1)$$

Ce système est résolu à l'aide de la transformation de Laplace. Compte tenu des conditions initiales des transformées π_i des probabilités p_i, les équations (10.26.1) se mettent sous la forme:

$$s\pi_0=\mu\pi_2-\lambda\pi_0+1;\ s\pi_1=\lambda\pi_0-\nu\pi_1;\ s\pi_2=\nu\pi_1-\mu\pi_2.$$

En résolvant ce système d'équations algébriques, on obtient les équations suivantes des transformées

$$\pi_1=\frac{\lambda}{s+\nu}\pi_0;\quad \pi_2=\frac{\nu}{s+\mu}\pi_1=\frac{\nu\lambda}{(s+\nu)(s+\mu)}\pi_0;$$

$$\pi_0=\frac{(s+\nu)(s+\mu)}{s(s^2+s(\mu+\nu+\lambda)+\nu\lambda+\nu\mu+\lambda\mu)}.$$

Introduisons les notations:

$$a=-\frac{\mu+\nu+\lambda}{2}+\sqrt{\frac{(\mu+\nu+\lambda)^2}{4}-\nu\lambda-\nu\mu-\lambda\mu};$$

$$b=-\frac{\mu+\nu+\lambda}{2}-\sqrt{\frac{(\mu+\nu+\lambda)^2}{4}-\nu\lambda-\nu\mu-\lambda\mu}.$$

Alors, les expressions des probabilités s'écrivent

$$p_0(t)=\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}+(\nu+\mu)\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}+\mu\nu\left[\frac{1}{ab}+\frac{be^{at}-ae^{bt}}{ab(a-b)}\right];$$

$$p_1(t)=\lambda\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}+\lambda\mu\left[\frac{1}{ab}+\frac{be^{at}-ae^{bt}}{ab(a-b)}\right];$$

$$p_2(t)=\nu\lambda\left[\frac{1}{ab}+\frac{be^{at}-ae^{bt}}{ab(a-b)}\right].$$

Pour calculer les probabilités limites on peut utiliser aussi bien les transformées que les probabilités elles-mêmes:

$$p_0=\lim_{t\to\infty}p_0(t)=\lim_{s\to 0}s\pi_0(s)=\frac{\mu\nu}{\lambda\mu+\lambda\nu+\nu\mu};$$

$$p_1=\frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+\lambda\nu+\nu\mu};\quad p_2=1-p_0-p_1=\frac{\lambda\nu}{\lambda\mu+\lambda\nu+\nu\mu}. \qquad (10.26.2)$$

Les probabilités limites des états peuvent également s'obtenir directement d'après le graphe de la figure 10.26:

$$\mu p_2=\lambda p_0;\quad \lambda p_0=\nu p_1;\quad \nu p_1=\mu p_2.$$

L'une quelconque de ces équations peut être rejetée (par exemple, la dernière). En exprimant p_2 par l'intermédiaire de p_0 et p_1: $p_2 = 1-p_0-p_1$, on obtient deux équations:

$$\mu(1-p_0-p_1)=\lambda p_0;\quad \lambda p_0=\nu p_1.$$

Leur résolution donne encore les résultats (10.26.2).

10.27. Un dispositif électronique se compose de deux ensembles identiques qui peuvent remplacer l'un l'autre. Pour le fonctionnement du dispositif il suffit que fonctionne au moins un ensemble. Lorsque l'un des ensembles est mis hors service le fonctionnement du dispositif reste normal grâce au travail de l'autre ensemble. Le flux de défaillances de chaque ensemble est un flux simple de paramètre λ.

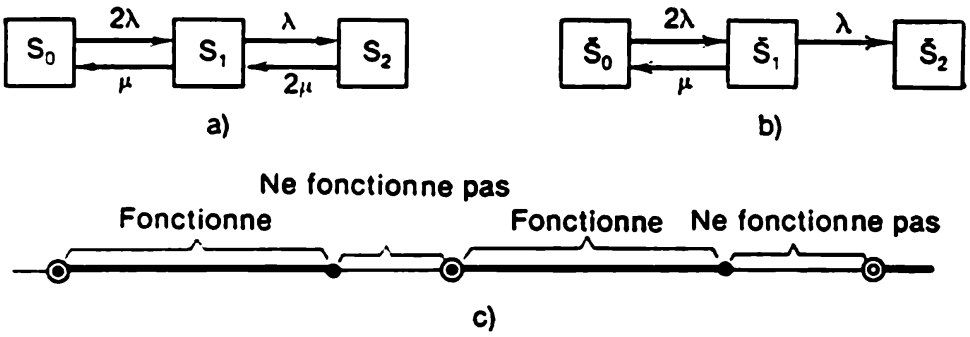


Fig. 10.27

Dès l'apparition d'une panne un ensemble est mis sur-le-champ en réparation. Le temps de réparation d'un ensemble est réparti d'après la loi exponentielle de paramètre μ. A l'instant initial (pour $t = 0$) les deux ensembles fonctionnent bien. Trouver les caractéristiques suivantes du service du dispositif:

1) Les probabilités des états comme fonctions du temps; s_0, les deux ensembles sont en bon état; s_1 un ensemble est en bon état, l'autre subit la réparation; s_2, les deux ensembles sont en réparation, le dispositif chôme.

2) La probabilité $p(t)$ pour que pendant le temps t le dispositif ne cesse aucune fois de fonctionner.

3) Les probabilités limites des états du dispositif.

4) Le temps moyen relatif pendant lequel le dispositif fonctionne sous un régime limite (stationnaire).

5) Pour le même régime limite le temps moyen $\overline{t}_p$ de fonctionnement sans défaillance du dispositif (depuis le branchement après la réparation jusqu'à la mise hors service suivante).

Solution. Le graphe des états du dispositif est représenté sur la figure 10.27, *a* (au-dessus de la flèche supérieure gauche il est écrit 2λ du fait que deux ensembles fonctionnent simultanément et peuvent chacun être mis hors service; pour la même raison il est écrit 2μ au-dessous de la flèche inférieure droite, du fait que les deux ensembles sont en réparation).

1) Les équations de Kolmogorov sont de la forme:

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - 2\lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = 2\lambda p_0 + 2\mu p_2 - (\lambda + \mu) p_1;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda p_1 - 2\mu p_2. \qquad (10.27.1)$$

Il faut encore que soit observée la condition: $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. En résolvant ce système d'équations sous les conditions initiales $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_2(0) = 0$, on obtient

$$p_0(t) = \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} + (\lambda + 3\mu)\frac{e^{at} - e^{bt}}{a+b} + 2\mu^2\left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a-b)}\right],$$

où

$$a = -(\lambda + \mu); \quad b = -2(\lambda + \mu);$$

$$a - b = \lambda + \mu; \quad ab = 2(\lambda + \mu)^2;$$

$$p_1(t) = \frac{a^2e^{at} - b^2e^{bt}}{\mu(a-b)} + \frac{(\lambda + 3\mu)(ae^{at} - be^{bt})}{\mu(a-b)} + \frac{2\mu(e^{at} - e^{bt})}{a-b} + \frac{2\lambda}{\mu} p_0(t).$$

Les expressions obtenues permettent de tirer:

$$p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t); \quad p_2(0) = 0.$$

2) Pour calculer la probabilité $\tilde{p}(t)$ rendons absorbant ($\tilde{s}_2$) l'état s_2 [(le dispositif ne fonctionne plus (fig. 10.27, *b*)]. Les équations de Kolmogorov pour les probabilités des états du dispositif sont:

$$d\tilde{p}_0/dt = \mu\tilde{p}_1 - 2\lambda\tilde{p}_0; \quad d\tilde{p}_1/dt = 2\lambda\tilde{p}_0 - (\lambda + \mu)\tilde{p}_1;$$

$$d\tilde{p}_2/dt = \lambda\tilde{p}_1.$$

En résolvant les deux premières équations pour les conditions initiales $\tilde{p}_0(0) = 1$; $p_1(0) = 0$, on obtient

$$\tilde{p}_0(t) = \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu)\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta},$$

où

$$\alpha = \frac{-(3\lambda + \mu) + \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}; \quad \beta = \frac{-(3\lambda + \mu) - \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}$$

(les grandeurs α et β sont négatives pour toutes les valeurs positives de λ et μ). Ensuite

$$\tilde{p}_1(t) = \frac{1}{\mu}\frac{d\tilde{p}_0}{dt} + \frac{2\lambda}{\mu}\tilde{p}_0 =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{\alpha^2e^{\alpha t} - \beta^2e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu)\frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta}\right] + \frac{2\lambda}{\mu}\tilde{p}_0(t).$$

La probabilité cherchée $\tilde{p}(t) = \tilde{p}_0(t) + \tilde{p}_1(t)$. Notons que la fonction $\tilde{p}(t)$ est monotone décroissante; de plus $\tilde{p}(0) = 1$; $p(\infty) = 0$.

3) Les probabilités limites des états s'obtiennent d'après le graphe de la figure 10.27, *a*, et les formules générales (10.0.23) du processus de naissance et de mort

$$p_1 = \frac{2\lambda}{\mu} p_0; \quad p_2 = \frac{2\lambda^2}{2\mu^2} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0; \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1;$$

$$p_0 = [1 + 2\lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2]^{-1} = \mu^2/(\lambda+\mu)^2.$$

4) Le temps moyen relatif du fonctionnement du dispositif:

$$1 - p_2 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2.$$

5) La grandeur $\bar{t}_f$ est l'espérance mathématique du temps T_f entre le branchement du dispositif et l'instant de sa défaillance suivante.

Représentons le fonctionnement du dispositif en régime permanent comme composé d'une série de cycles: « fonctionne », « ne fonctionne pas » (voir fig. 10.27, *c*, où les tronçons « fonctionne » sont visualisés par des lignes en traits gras. Le temps moyen $\bar{t}_{nf}$ pendant lequel le dispositif ne fonctionne pas (espérance mathématique de la durée de la période de chômage) est évidemment égal à $1/(2\mu)$ (du fait qu'à l'état « ne fonctionne pas » le dispositif subit avec une densité 2μ le flux de transitions à l'état « fonctionne ».

Ensuite, le rapport du temps moyen du travail sans défaillance $\bar{t}_f$ au temps moyen de « ne fonctionne pas » $\bar{t}_{nf}$ est égal au rapport de la probabilité finale $1 - p_2$ pour que le dispositif travaille, à la probabilité p_2 pour qu'il ne travaille pas: $\bar{t}_f/\bar{t}_{nf} = (1 - p_2)/p_2$. On en tire, compte tenu que $\bar{t}_{nf} = 1/(2\mu)$:

$$\bar{t}_f = \bar{t}_{nf} \cdot \frac{1-p_2}{p_2} = \frac{1}{2\mu} \frac{1-p_2}{p_2}.$$

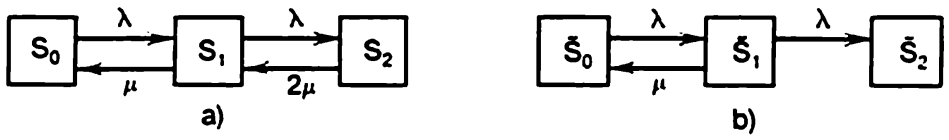


Fig. 10.28

10.28. L'énoncé et les questions sont les mêmes que pour le problème 10.27 à cette différence près que tant qu'un ensemble fonctionne, l'autre se trouve en « réserve passive » et de ce fait ne peut pas être mis hors service. Lorsque l'ensemble de réserve est engagé, il commence sur-le-champ à travailler et subit le flux de défaillances de densité λ.

Solution. Le graphe des états du dispositif électronique est de la forme représentée sur la figure 10.28, *a*, le graphe à « état absorbant », sur la figure 10.28, *b*. Réponses aux questions:

$$1)\ p_0(t)=\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}+(\lambda+3\mu)\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}+2\mu^2\left[\frac{1}{ab}+\frac{be^{at}-ae^{bt}}{ab(a-b)}\right];$$

$$p_1(t)=\frac{a^2e^{at}-b^2e^{bt}}{\mu(a-b)}+\frac{(\lambda+3\mu)}{\mu(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})+$$

$$+\frac{2\mu}{a-b}[e^{at}-e^{bt}]+\frac{\lambda}{\mu}p_0(t);$$

$$p_2(t)=1-p_0(t)-p_1(t);$$

$$a=\frac{-(2\lambda+3\mu)+\sqrt{4\mu\lambda+\mu^2}}{2};\quad b=\frac{-(2\lambda+3\mu)-\sqrt{4\mu\lambda+\mu^2}}{2};$$

$$2)\ \tilde{p}_0(t)=\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}+(\lambda+\mu)\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta};$$

$$\tilde{p}_1(t)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\alpha^2e^{\alpha t}-\beta^2e^{\beta t}}{\alpha-\beta}+(\lambda+\mu)\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}\right]+\frac{\lambda}{\mu}\tilde{p}_0(t);$$

$$\tilde{p}_2(t)=1-\tilde{p}_0(t)-\tilde{p}_1(t);$$

$$\alpha=\frac{-(2\lambda+\mu)+\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}}{2};\quad \beta=\frac{-(2\lambda+\mu)-\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}}{2};$$

$$\tilde{p}(t)=1-\tilde{p}_2(t);$$

$$3)\ p_1=\frac{\lambda}{\mu}p_0;\quad p_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2p_0;\quad p_0=\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]^{-1};$$

$$4)\ 1-p_2;\quad 5)\ \bar{t}_f=\frac{1}{2\mu}\,\frac{1-p_2}{p_2}.$$

10.29. L'énoncé du problème 10.27 est modifié de façon que l'ensemble qui ne fonctionne pas se trouve en « réserve allégée » et peut subir une défaillance avec une densité $\lambda' < \lambda$. 1) Construire le graphe des états du dispositif, écrire les équations de Kolmogorov des probabilités des états. 2) Sans résoudre ces équations trouver les probabilités limites des états; calculer-les pour $\lambda = 1$; $\lambda' = 0{,}5$; $\mu = 2$. 3) Trouver pour les mêmes données numériques le temps moyen $\bar{t}_f$ de fonctionnement sans défaillance du dispositif.

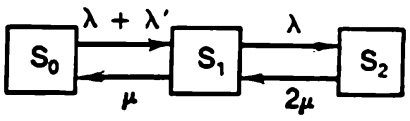


Fig. 10.29

Solution. 1) Le graphe des états est donné par la figure 10.29. Les équations de Kolmogorov:

$$\frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \lambda')\, p_0 + \mu p_1;$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \mu)\, p_1 + (\lambda + \lambda')\, p_0 + 2\mu p_2;$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

2) Les probabilités limites se trouvent à l'aide des formules générales (10.0.23) du schéma de naissance et de mort:

$$p_1 = \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} p_0; \quad p_2 = \frac{(\lambda + \lambda')}{2\mu^2} p_0; \quad p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} + \frac{(\lambda + \lambda')\lambda}{2\mu^2}\right\}^{-1}.$$

En y portant $\lambda = 1$; $\lambda' = 0{,}5$; $\mu = 2$, on obtient

$$p_0 = \left\{1 + \frac{1{,}5}{2} + \frac{1 + 5 \cdot 1}{8}\right\}^{-1} \approx 0{,}516; \quad p_1 \approx 0{,}387; \quad p_2 \approx 0{,}097.$$

3) $\bar{t}_f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - p_2}{p_2} \approx 2{,}32.$

10.30. Un ordinateur compte quatre mémoires à disques magnétiques. L'entretien préventif de chaque disque est assuré par une équipe de quatre personnes. Pour toute l'équipe le flux global des

Fig. 10.30

instants de la fin des réparations est un flux poissonien de densité $\lambda(t)$. Après l'entretien le disque est vérifié; avec une probabilité p il s'avère apte au travail (la durée du contrôle est petite devant celle de l'entretien préventif et peut être négligée). Si le disque est défectueux, on procède de nouveau à sa réparation (le temps nécessaire à cet effet ne dépend pas du fait si des entretiens préventifs ont eu précédemment lieu), et ainsi de suite. A l'instant initial toutes les mémoires ont besoin d'être soumises à l'entretien préventif.

Construire le graphe des états du système S (quatre mémoires), écrire les équations différentielles des probabilités des états. Trouver M_τ, l'espérance mathématique du nombre de disques ayant subi avec succès l'entretien préventif vers l'instant τ.

Solution. s_0, toutes les quatre mémoires ont besoin d'un entretien préventif; s_1, une mémoire a subi avec succès l'entretien, les trois autres demandent d'être réparées; s_2, deux mémoires ont subi avec succès la réparation, les deux autres doivent être soumises à l'entretien préventif; s_3, trois mémoires ont passé avec succès la révision, et

une mémoire impose d'être réparée; s_4, toutes les quatre mémoires ont subi avec succès l'entretien préventif.

Le fait que chaque entretien soit couronné de succès avec une probabilité p est équivalent à la transformation p du flux des fins de réparations, après laquelle le flux reste poissonien, mais sa densité devient $p\lambda(t)$.

Le graphe des états est représenté sur la figure 10.30. Les équations de Kolmogorov

$$dp_0/dt = -p\lambda(t)\,p_0;\quad dp_1/dt = p\lambda(t)\,(p_0 - p_1);$$
$$dp_2/dt = p\lambda(t)\,(p_1 - p_2);\quad dp_3/dt = p\lambda(t)\,(p_2 - p_3); \tag{10.30.1}$$
$$dp_4/dt = p\lambda(t)\,p_3.$$

Les conditions initiales: $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = \ldots = p_4(0) = 0$.

L'espérance mathématique du nombre de disques qui ont subi avec succès l'entretien vers l'instant τ est égale à

$$M_\tau = \sum_{i=1}^{4} i p_i(\tau). \tag{10.30.2}$$

Lorsque la densité λ est constante les solutions des équations (10.30.1) sont

$$p_0(t) = e^{-\lambda pt};\quad p_1(t) = \lambda pt e^{-\lambda pt};\quad p_2(t) = \frac{(\lambda pt)^2}{2} e^{-\lambda pt};$$
$$p_3(t) = \frac{(\lambda pt)^3}{3!} e^{-\lambda pt};\quad p_4(t) = 1 - \sum_{i=0}^{3} p_i(t).$$

10.31. Dans l'énoncé du problème précédent, à chaque membre de l'équipe est réservée sa mémoire, dont il assure la réparation.

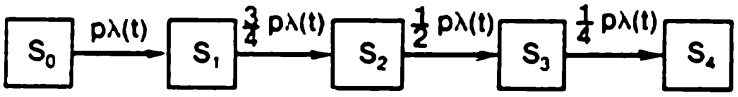


Fig. 10.31

Le flux des achèvements de l'entretien revenant à un membre de l'équipe est de densité $\lambda(t)/4$. Répondre aux questions du problème précédent.

Solution. Le graphe des états est donné par la figure 10.31. Les équations de Kolmogorov

$$dp_0/dt = -p\lambda(t)\,p_0;\quad dp_1/dt = p\lambda(t)\,(p_0 - (3/4)\,p_1);$$
$$dp_2/dt = p\lambda(t)\,((3/4)\,p_1 - (1/2)\,p_2);$$
$$dp_3/dt = p\lambda(t)\,((1/2)\,p_2 - (1/4)\,p_3);$$
$$dp_4/dt = (1/4)\,p\lambda(t)\,p_3.$$

L'expression de M_τ demeure celle de (10.30.2).

10.32. Un dispositif subit le flux simple de défaillances de densité λ. Une défaillance n'est pas établie sur-le-champ, mais après un temps aléatoire à loi de répartition exponentielle de paramètre ν. Dès que la défaillance est établie, on procède à la révision du dispositif, après quoi il est envoyé pour la réparation (avec une probabilité p), ou bien est remplacé par un dispositif nouveau. Le temps de révision obéit à la loi de répartition exponentielle de paramètre γ, le temps de réparation, à la loi exponentielle de paramètre μ,

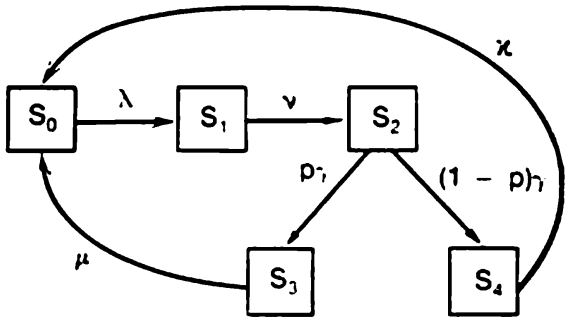


Fig. 10.32

le temps de remplacement du dispositif rebuté par un nouveau, par la loi exponentielle de paramètre $\varkappa$. Trouver les probabilités limites des états de l'installation. Déterminer: 1) la part moyenne du temps de fonctionnement normal; 2) la part moyenne du temps que le dispositif travaille avec une défaillance non établie (produit du rebut); 3) quel est le coût moyen de ses réparations et remplacements par unité de temps, si le coût moyen de la réparation est r, et le prix d'une nouvelle installation est c? 4) quelle est la valeur moyenne des pertes par unité de temps occasionnées par une installation fonctionnant avec une défaillance non découverte, si le dommage dû au travail d'une telle installation est l?

Solution. Etats du dispositif: s_0, en bon état, travaille sans défaillance; s_1, défectueux, mais la défaillance n'est pas découverte, produit du rebut; s_2, la défaillance est découverte, le dispositif est soumis à la révision; s_3, en réparation; s_4, est remplacé par un nouveau. Le graphe des états est représenté sur la figure 10.32.

Les équations algébriques linéaires des probabilités limites des états:

$$\lambda p_0 = \mu p_3 + \varkappa p_4; \quad \lambda p_0 = \nu p_1; \quad \nu p_1 = \gamma p_2;$$

$$p\gamma p_2 = \mu p_3; \quad (1-p)\gamma p_2 = \varkappa p_4.$$

La condition de normalisation: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. En résolvant ces équations, on obtient

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{p\lambda}{\mu} + \frac{(1-p)\lambda}{\varkappa}\right]^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\nu} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda}{\gamma} p_0; \quad p_3 = \frac{p\lambda}{\mu} p_0; \quad p_4 = \frac{(1-p)\lambda}{\varkappa} p_0.$$

1) La part du temps de fonctionnement normal du dispositif est égale à p_0; 2) p_1; 3) la part moyenne du temps pendant lequel le dispositif est en réparation est p_3; chaque réparation dure en moyenne $1/\mu$; la densité du flux des dispositifs réparés sortants de l'état s_3 est μp_3; le coût moyen des réparations par unité de temps est $r\mu p_3$. D'une façon analogue, le prix moyen des dispositifs nouveaux par unité de temps est $c\varkappa p_4$; le coût moyen total des réparations et remplacements est égal à $r\mu p_3 + c\varkappa p_4$; 4) le dommage moyen par unité de temps dû au fonctionnement d'une installation défectueuse est égal à $l\nu p_1$.

10.33. On considère le stockage de l'information dans les bases de données conservées dans un ordinateur. La densité d'arrivée des bits d'information dans les bases de données est égale à $\lambda(t)$ et ne dépend pas de la quantité déjà stockée. Chaque bit d'information consigné dans les bases des données y est conservé sans délai. Trouver les caractéristiques $m_x(t)$; $D_x(t)$ de la fonction aléatoire $X(t)$ qui est le nombre de bits d'information stockés sous l'hypothèse que le flux de leurs arrivées est poissonien de densité $\lambda(t)$ et à l'instant initial $t = 0$ la fonction aléatoire $X(0) = 0$.

Solution. Dans ce problème il s'agit du processus de « naissance pure » sans limitation du nombre d'états ($n \to \infty$). Toutes les den-

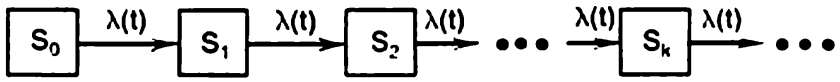


Fig. 10.33

sités de « naissance » $\lambda_k = \lambda(t)$ (fig. 10.33), alors que les densités de « mort », $\mu_k = \mu_k(t) \equiv 0$.

Dans notre cas les équations différentielles (10.0.24) et (10.0.25) s'écrivent

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(t)\, p_k(t) = \lambda(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda(t) + 2k\lambda(t) - 2m_x(t)\,\lambda(t)]\, p_k(t) = \lambda(t),$$

étant donné que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = m_x(t).$$

En résolvant ces équations pour les conditions initiales $m_x(0) = D_x(0) = 0$, on obtient

$$m_x(t) = D_x(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau.$$

On pourrait s'attendre à ce résultat: il peut s'obtenir directement d'après la théorie des flux. On peut démontrer que pour un instant t quelconque la variable aléatoire $X(t)$ suit la loi de Poisson de caractéristiques obtenues $m_x(t) = D_x(t)$.

10.34. Même énoncé que dans le problème précédent, à cette exception près que le bit d'information stocké dans les bases de données y est conservé un certain temps pour être effacé d'après un indice défini. Pour chaque bit d'information le flux des suppressions est poissonien de densité $\mu(t)$.

Solution. Ce problème donne lieu au processus de naissance et de mort du nombre de bits d'information stockés dans les bases de données de l'ordinateur. La densité de mort $\mu_k(t) = k\mu(t)$, puisqu'à l'état s_k dans les bases de données sont stockés k bits d'information et chaque bit subit l'action du flux des suppressions de densité $\mu(t)$.

Les équations différentielles des fonctions $m_x(t)$ et $D_x(t)$ sont de la forme

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(t) - k\mu(t))\, p_k(t) = \lambda(t) - \mu(t)\, m_x(t); \qquad (10.34.1)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda(t) + k\mu(t) + 2k\lambda(t) - 2k^2\mu(t) - 2m_x(t)\lambda(t) +$$
$$+ 2m_x(t)\, k\mu(t)]\, p_k(t) = \lambda(t) + \mu(t)\, m_x(t) - 2\mu(t)\, D_x(t), \qquad (10.34.2)$$

du fait que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = m_x(t);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(t) = \alpha_{2x}(t) = D_x(t) + m_x^2(t).$$

Pour les conditions initiales $m_x(0) = m_0$; $D_x(0) = D_0$ et les densités constantes de stockage et de suppression des bits d'information $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$, les solutions de ces équations sont

$$m_x(t) = m_0 e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) = \frac{\lambda}{\mu} + e^{-\mu t}\left(m_0 - \frac{\lambda}{\mu}\right);$$

$$D_x(t) = \lambda\left[\frac{1}{\mu} + \frac{e^{-2\mu t} - 2e^{-\mu t}}{\mu}\right] +$$

$$+ (\lambda + \mu D_0 + \mu m_0)\frac{e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}}{\mu} + D_0(2e^{-2\mu t} - e^{-\mu t}) =$$

$$= m_x(t) + (D_0 - m_0)e^{-2\mu t}.$$

Pour les conditions initiales $m_0 = D_0 = 0$ on obtient $m_x(t) = D_x(t) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$. On peut prouver que pour ces conditions initiales le processus de stockage de l'information $X(t)$ est réparti d'après la loi de Poisson pour tout instant t et pour toute forme de la fonction $\lambda(t)$ (densité de l'arrivée de l'information), mais à cet effet la densité de suppression μ des bits d'information doit être constante.

Avec λ et μ constants et $t \to \infty$, dans le système s'établit un régime stationnaire de stockage d'information qui, naturellement, ne dépend pas des conditions initiales $m_x = D_x = \lambda/\mu$.

10.35. On considère la fabrication des ordinateurs d'un type défini. La densité de cette fabrication $\lambda(t)$ est visualisée sur le graphique de la figure 10.35, *a*. Pendant la première année de fabrication cette densité croît linéairement de 0 à 1000 par an, puis pendant trois ans la production reste au niveau de 1000 ordinateurs par an, après quoi leur production cesse. La longévité moyenne d'un ordinateur est de 5 ans. En admettant que tous les flux d'événements sont simples, déterminer pour un instant t quelconque l'espérance mathématique et la variance du nombre d'ordinateurs en exploitation.

Solution. La densité de la fabrication des ordinateurs

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ kt & \text{pour } 0 \leqslant t < 1, \\ \lambda & \text{pour } 1 \leqslant t < 4, \\ 0 & \text{pour } t \geqslant 4, \end{cases}$$

où $k = 1000$ 1/an^2; $\lambda = 1000$ 1/an.

Cherchons les solutions des équations (10.34.1) et (10.34.2) pour l'intervalle de temps $0 \leqslant t < 1$ et sous la condition que $\mu = 0{,}2$ 1/an pour tout intervalle $t > 0$. Dans ces conditions, l'équation (10.34.1) se met sous la forme

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = kt - \mu m_x(t).$$

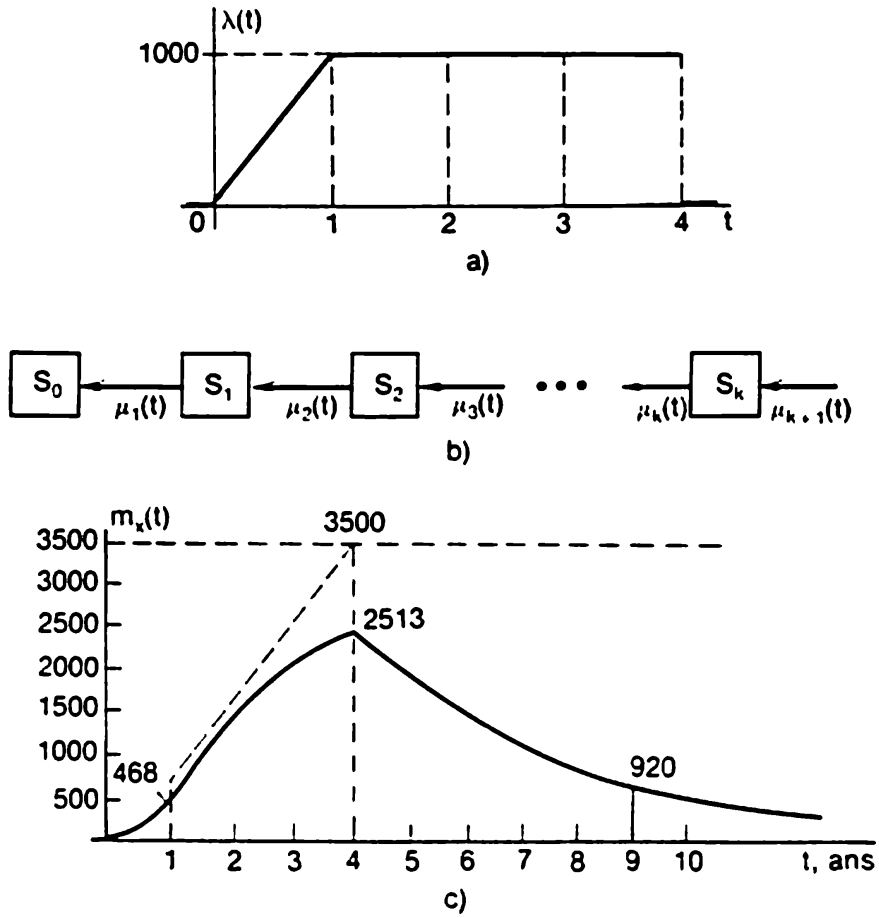


Fig. 10.35

En résolvant cette équation pour la condition initiale $m_x(0) = 0$, on obtient

$$m_x(t) = \frac{k}{\mu^2}(e^{-\mu t} - 1 + \mu t) = 25\,000\left(e^{-t/5} - 1 + \frac{t}{5}\right).$$

Après un an on compte en service en moyenne $m_x(1) = 25\,000\,(e^{-1/5} - 1 + 0{,}2) = 468$ ordinateurs. Si la longévité des ordinateurs était illimitée, vers la fin de la première année de leur service on en compterait 500 unités.

Sous ces mêmes conditions l'équation (10.34.2) s'écrit

$$dD_x(t)/dt = 1000t + 0{,}2m_x(t) - 0{,}4D_x(t).$$

En la résolvant pour la condition initiale $D_x(0) = 0$ on obtient $D_x(t) = m_x(t) = 25\,000\,(e^{-t/5} - 1 + t/5)$. Après un an la variance du nombre d'ordinateurs en service devient $D_x = 468$; $\sigma_x = 21{,}6$. Au bout d'un an le nombre d'ordinateurs en exploitation obéit d'une façon approchée à la loi normale de caractéristiques $m_x = 468$; $\sigma_x = 21{,}6$.

Dans l'intervalle de temps $1 \leqslant t < 4$ les équations correspondantes sont

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \lambda - \mu m_x(t); \quad \frac{dD_x(t)}{dt} = \lambda + \mu m_x(t) - 2\mu D_x(t).$$

Il faut les résoudre pour les conditions initiales: $m_x(1) = D_x(1) = 468$. La solution de ces équations est donnée par le problème 10.34, d'où l'on tire

$$m_x(t) = m_x(1)\,e^{-\mu(t-1)} + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu(t-1)} \quad (1 \leqslant t < 4);$$

$$D_x(t) = m_x(t).$$

Cherchons la valeur de $m_x(t)$ pour $t = 4$:

$$m_x(4) = m_x(1)\,e^{-3\mu} + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-3\mu}) = 2513.$$

De la sorte, vers la fin de la quatrième année de fabrication le nombre moyen d'ordinateurs en exploitation sera égal à 2513. Portons notre attention sur le fait que vers cette époque on a fabriqué 3500 ordinateurs. Par conséquent, en quatre ans on a éliminé de l'exploitation en moyenne 987 ordinateurs.

Dans l'intervalle de temps $t > 4$ on observe le « processus de mort pure » dont le graphe des états est de la forme représentée sur la figure 10.35, *b*.

Les équations différentielles de l'espérance mathématique et de la variance du « processus de mort pure » sont dans le cas général de la forme

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(t)\,p_k(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [k\mu_k(t) - 2k^2\mu_k(t) + 2m_x(t)\,k\mu_k(t)]\,p_k(t).$$

Pour notre cas, $\mu_k(t) = k\mu$; donc, on obtient l'équation

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{\infty} k\mu p_k(t) = -\mu m_x(t),$$

qu'il faut résoudre pour la condition initiale $m_x(4) = 2513$. La solution de cette équation est de la forme

$$m_x(t) = m_x(4)\,e^{-\mu(t-4)} \quad (t > 4).$$

Puisque $D_x(4) = m_x(4)$ et $\mu = \text{const}$, dans l'intervalle de temps $t > 4$, $D_x(t) = m_x(t)$.

La figure 10.35, *c* visualise la relation entre $m_x(t)$, nombre moyen d'ordinateurs en exploitation, et le temps t. Sur ce même graphique la ligne interrompue traduit la dépendance vis-à-vis du temps t du nombre moyen d'ordinateurs fabriqués jusqu'à l'instant t.

10.36. On considère le processus de stockage des termes dans un dictionnaire dynamique (tesaurus) dans le fonctionnement d'une banque de données automatisée. Le processus consiste en ce que les termes sont enregistrés dans le dictionnaire à mesure de leur apparition dans l'information introduite dans la banque. Par exemple, dans une banque de termes du système de gestion automatisé peuvent être enregistrées comme termes les dénominations des administrations avec lesquelles l'entreprise donnée est en rapports de production. Le dictionnaire dynamique des dénominations de telles organisations sera stocké dans la banque de données du système d'automatisation de l'entreprise à mesure de l'apparition de ces dénominations dans les bits d'information introduits dans la banque.

Chaque bit d'information arrivé dans la banque de données compte en moyenne $\varkappa$ termes de dictionnaire, et la densité d'amenée de ces bits est $\tilde{\lambda}(t)$. Par conséquent, la densité du flux de termes du dictionnaire dans l'information introduite dans la banque est $\lambda(t) = \varkappa\tilde{\lambda}(t)$. On suppose que le flux de termes de dictionnaire est poissonien. Le nombre de termes n est fini et non aléatoire, bien qu'il se peut qu'il ne soit pas connu à l'avance. Tous les termes du dictionnaire peuvent se trouver dans le bit d'information avec la même probabilité, alors que dans le dictionnaire sont naturellement retenus seulement ceux des termes qui ne se présentaient pas jusque-là dans les bits d'information. Trouver l'espérance mathématique et la variance du nombre de termes stockés dans le dictionnaire dynamique.

Solution. Désignons par $X(t)$ le nombre de termes stockés dans le dictionnaire dynamique. Il est clair que le processus aléatoire $X(t)$ est un « processus de naissance pure » à nombre d'états n fini, dont

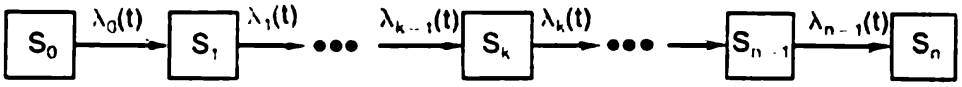


Fig. 10.36

le graphe des états est représenté sur la figure 10.36. Pour trouver la densité $\lambda_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ introduisons l'hypothèse d'après laquelle le processus se trouve à l'état s_k ; par définition, la probabilité de cette hypothèse est $p_k(t)$. En supposant que cette hypothèse ait lieu, la densité du flux des termes nouveaux non portés encore sur le dictionnaire est

$$\lambda_k(t) = \lambda(t)\,\frac{n-k}{n} = \lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Les équations différentielles (10.0.24), (10.0.25) deviennent

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \lambda(t)\left(1-\frac{k}{n}\right) p_k(t) = \lambda(t) - \frac{m_x(t)\lambda(t)}{n}; \qquad (10.36.1)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \left[\lambda(t)\left(1-\frac{k}{n}\right) + 2k\lambda(t)\left(1-\frac{k}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - 2m_x(t)\lambda(t)\left(1-\frac{k}{n}\right)\right] p_k(t) = \lambda(t) - \lambda(t)\frac{m_x(t)}{n} - 2\lambda(t)\frac{D_x(t)}{n}. \qquad (10.36.2)$$

Cherchons la solution de ces équations pour le cas le plus simple où $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, $n = \text{const}$, $m_x(0) = D_x(0) = 0$.

$$m_x(t) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t}\right); \quad \lim_{t\to\infty} m_x(t) = n; \qquad (10.36.3)$$

$$D_x(t) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t}\right) e^{-\frac{\lambda}{n}t} = m_x(t)\, e^{-\frac{\lambda}{n}t},$$

$$\lim_{t\to\infty} D_x(t) = 0. \qquad (10.36.4)$$

Portons notre attention sur le fait que la fonction $m_x(t)$ est monotone croissante et tend à la limite vers n, alors que la fonction $D_x(t)$ est nulle pour $t = 0$ et $t \to \infty$, et atteint le maximum avec une certaine valeur t_m qui peut s'obtenir à la condition $dD_x(t)/dt = 0$ $(t > 0)$.

On en tire

$$0{,}5 = e^{-\frac{\lambda}{n}t_m} \to t_m \approx 0{,}7\, n/\lambda.$$

Avec cette valeur de t_m, la variance maximale $\max\limits_t D_x(t) \approx n\left(1 - e^{-0{,}7}\right) e^{-0{,}7} = n \cdot 0{,}25$; $\sigma_x(t_m) = 0{,}5\sqrt{n}$, et la valeur maximale du coefficient de variation $\sigma_x(t_m)/m_x(t_m) = 1/\sqrt{n}$.

Si on connaît la densité λ du flux de termes du dictionnaire en bits d'information arrivés dans la bande de données et le nombre total de termes n, on peut déterminer avec une précision suffisante le temps moyen t_{st} nécessaire pour stocker 95 % du volume du dictionnaire dynamique :

$$1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t_{st}} = 0{,}95, \text{ d'où } t_{st} \approx 3n/\lambda.$$

Si n est inconnu, ce qui a lieu le plus souvent dans la pratique, son évaluation $\bar{n}$ s'obtient de la façon suivante. Pour les instants $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_l$ $(\tau_i < \tau_{i+1})$ on détermine les quantités réelles des termes stockés dans le dictionnaire $m_1, m_2, \ldots, m_l$. On admet

que ces grandeurs sont approximativement égales aux quantités moyennes de termes stockés: $m_i = n\ (1 - e^{-\lambda\tau_i/n})$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. En résolvant cette équation par rapport à n, trouvons l valeurs n_1, $n_2, \ldots, n_l$ des couples des valeurs correspondantes (m_1, τ_1); (m_2, τ_2); ...; $(m_l\tau_l)$. L'évaluation $\bar{n}$ s'obtient d'après la formule

$$\bar{n} = \left(\sum_{i=1}^{l} n_i\right) \Big/ l.$$

10.37. Pour l'énoncé du problème précédent trouver le temps t_{st} du remplissage du dictionnaire à 95 % et la probabilité pour que deux ans après le début du stockage il contient au moins 90 % de tous les termes, si le nombre total de termes $n = 100\,000$, on introduit dans la banque de données 100 000 documents par an et chaque document compte en moyenne 1,5 terme.

Solution. Cherchons la densité du flux de termes du dictionnaire en bits d'information introduits dans la banque de données automatisée:

$$\lambda = 100\,000 \cdot 1{,}5 = 150\,000 \text{ 1/an.}$$

La quantité t_{st} est déterminée par l'expression $t_{st} = 3\ n/\lambda = 3 \cdot 100\,000/150\,000 = 2$ ans. Le calcul de la probabilité pour que deux ans après le début du stockage le dictionnaire contient au moins 90 % de tous les termes impose tout d'abord le calcul de $m_x(2)$ et $D_x(2)$ [voir formules (10.36.3) et (10.36.4)]: $m_x(2) = 100\,000 \times (1 - e^{-1{,}5 \cdot 2}) = 0{,}95 \cdot 100\,000 = 95\,000$; $D_x(2) = 95\,000 \cdot 0{,}05 = 4750$; $\sigma_x(2) = 68{,}9$. Notons que la variance maximale $D_x(t_m) = 0{,}25n = 25\,000$; $\sigma_x(t_m) = 158$.

A l'instant $t = 2$ ans le nombre de termes du dictionnaire est une variable aléatoire $X(2)$ à répartition approchée d'après la loi normale de caractéristiques obtenues ci-dessus; donc $P\{X(2) > 0{,}9n\} \approx 1$, puisque $m_x - 3\sigma_x > 0{,}9n$.

10.38. On considère un cas plus général du fonctionnement d'un dictionnaire dynamique d'une banque de données automatisée. Par rapport à l'énoncé du problème 10.36, la première complication consiste dans le fait que le nombre maximal de termes du dictionnaire n'est pas constant et dépend du temps t: $n(t)$ (dans le cas d'un dictionnaire dynamique des noms des utilisateurs cela signifie que le nombre total d'utilisateurs change avec le temps en augmentant ou diminuant).

Par ailleurs, les termes introduits dans le dictionnaire après un certain temps aléatoire y sont effacés du fait que le terme lui-même vieillit. On suppose que le flux de ces suppressions est poissonien de densité $\mu(t)$, la même pour tous les termes du dictionnaire.

Dans ce cas les densités des flux de « naissance » et de « mort » sont de la forme

$$\lambda_k(t) = \lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n(t)}\right); \quad \mu_k(t) = \mu(t)\,k, \tag{10.38.1}$$

alors que les équations (10.0.24) et (10.0.25) s'écrivent (pour abréger la dépendance du temps t des fonctions $m_x(t)$, $D_x(t)$, $n(t)$, $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $p_k(t)$ est omise) :

$$\begin{aligned} dm_x/dt &= \lambda - m_x(\lambda/n + \mu); \\ dD_x/dt &= \lambda - m_x(\lambda/n - \mu) - 2(\lambda/n + \mu)\,D_x. \end{aligned} \tag{10.38.2}$$

Si les quantités λ, n, μ sont constantes (ne dépendent pas du temps), alors, avec $t \to \infty$, il existe un régime stationnaire de travail tel que $dm_x/dt = dD_x/dt = 0$, d'où

$$m_x = n\left(1 + \frac{\mu n}{\lambda}\right)^{-1}; \quad D_x = m_x\left(1 + \frac{\lambda}{\mu n}\right)^{-1}.$$

CHAPITRE XI

THÉORIE DES PHÉNOMÈNES D'ATTENTE

11.0. On appelle *système d'attente* tout système prévu pour satisfaire certaines demandes présentées à des instants aléatoires. Exemples: central téléphonique; atelier de réparation; guichet à billets; coiffeur; ordinateur. La théorie des phénomènes d'attente a pour objet l'étude des processus aléatoires qui se déroulent dans les systèmes d'attente. (Dans ce chapitre, on utilise le terme système pour désigner le système d'attente.)

Tout dispositif qui a pour tâche immédiate de satisfaire les demandes s'appelle *canal de service* ou *station*. Les systèmes d'attente peuvent être aussi bien à canal unique qu'à canaux multiples. L'exemple d'un système à canal unique est donné par un guichet desservi par un caissier: celui d'un système à canaux multiples, est donné par ce même guichet mais desservi par plusieurs caissiers.

On distingue les systèmes *à demandes refusées* et *à files d'attente*. Dans les premiers, la demande arrivée à l'instant où tous les canaux sont occupés, est refusée et quitte le système pour ne plus participer à son travail. Dans les systèmes à file d'attente la demande arrivée à l'instant où tous les canaux sont occupés, ne quitte pas le système, mais prend place dans la file pour attendre la disponibilité d'un canal. Le nombre m d'unités dans la file peut être aussi bien limité qu'illimité. Avec $m = 0$ le système à file se transforme en système à demandes refusées. Une file peut être limitée non seulement suivant le nombre de demandes (longueur de la file), mais encore suivant le temps d'attente (de tels systèmes s'appellent « systèmes à clients impatients »).

Les systèmes à files d'attente se distinguent non seulement par les limites de la file, mais encore par la *discipline d'attente*: les demandes peuvent être servies dans l'ordre d'arrivée, ou dans un ordre aléatoire, ou encore certaines demandes sont servies sans observer l'ordre (le système est dit alors « prioritaire »). La priorité peut présenter plusieurs gradations ou rangs.

L'étude analytique d'un système d'attente est la plus simple si tous les flux d'événements qui font passer un système d'un état en un autre sont simples (poissoniens stationnaires). Cela signifie que dans les flux les intervalles de temps entre les événements sont répartis d'après la loi exponentielle de paramètre égal à la densité du flux correspondant. Pour les systèmes d'attente cette hypothèse signifie que les flux sont simples aussi bien pour les demandes que pour les services. Par *flux de services* on entend le flux de demandes servies l'une après l'autre par un canal occupé en permanence. Ce flux s'avère simple seulement si le temps de service d'une demande T_{ser} est une variable aléatoire à loi de répartition exponentielle. Le paramètre μ de cette répartition est une grandeur inverse au temps moyen de service: $\mu = 1/\overline{t}_{ser}$, où $\overline{t}_{ser} = M[T_{ser}]$. Au lieu de « le flux de services est un flux simple » on dit souvent que « la durée ou le temps de service obéit à la loi exponentielle ». Convenons de dire pour abréger « système d'attente *simple* » pour tout système d'attente où tous les flux sont simples. Dans le présent chapitre nous examinerons donc surtout les systèmes d'attente simples.

Si tous les flux d'événements sont simples, le processus qui marche dans le système d'attente est un processus aléatoire de Markov à états discrets et à temps continu. Si certaines conditions sont observées, il existe pour ce processus un régime permanent limite tel que les probabilités des états, aussi bien que d'autres caractéristiques du processus ne dépendent pas du temps.

La tâche de la théorie des systèmes d'attente consiste à calculer les probabilités de divers états du système, ainsi qu'à établir les relations entre les paramètres donnés (nombre de canaux n, densité du flux de demandes λ, loi de répartition du temps de service, etc.) et les *caractéristiques de l'efficacité* du fonctionnement du système d'attente. Parmi ces caractéristiques on peut envisager par exemple:

le nombre moyen de demandes A servies par le système par unité de temps, ou le *débit absolu* du système;

la probabilité Q pour une demande arrivée d'être servie, ou le *débit relatif* du système: $Q = A/\lambda$;

la probabilité du refus P_{ref}, c'est-à-dire la probabilité pour que la demande présentée ne soit pas servie, soit refusée: $P_{\text{ref}} = 1 - Q$;

le nombre moyen de demandes dans le système d'attente (servies ou en file d'attente) $\bar{z}$;

le nombre moyen de demandes dans la file $\bar{r}$;

la durée moyenne de séjour de la demande dans le système d'attente (dans la file ou en cours de service) $\bar{t}_{\text{sys}}$;

le temps moyen de présence de la demande dans la file $\bar{t}_f$;

le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$.

Dans le cas général, toutes ces caractéristiques dépendent du temps. Mais de nombreux systèmes d'attente travaillent assez longtemps dans des conditions invariables, et c'est pourquoi leur régime a le temps de s'apparenter à un régime permanent. Dans ce qui suit, sans mention spéciale, en calculant pour un système d'attente les probabilités limites des états et les caractéristiques limites de l'efficacité, nous les envisagerons par rapport au régime permanent, limite du fonctionnement du système.

Pour tout système d'attente ouvert *) la durée moyenne $\bar{t}_{\text{sys}}$ de la présence de la demande sous le régime stationnaire limite est exprimée par le nombre moyen de demandes dans le système à l'aide de la *formule de Little*:

$$\bar{t}_{\text{sys}} = \bar{z}/\lambda, \tag{11.0.1}$$

où λ est la densité du flux de demandes.

Une formule analogue, appelée également formule de Little, associe la durée moyenne de la présence de la demande dans la file $\bar{t}_f$ et le nombre moyen $\bar{r}$ de demandes dans la file:

$$\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda. \tag{11.0.2}$$

Les formules de Little sont très utiles, car elles permettent de calculer non pas les deux caractéristiques de l'efficacité (durée moyenne de la présence et nombre moyen de demandes), mais seulement l'une quelconque d'entre elles.

Insistons spécialement que les formules (11.0.1) et (11.0.2) sont vraies *pour tout système d'attente ouvert* (monocanal, multicanal, quel que soit le flux de demandes et de services); l'unique impératif que doivent satisfaire les flux de demandes et de services est qu'ils soient stationnaires.

---

*) On dit ouvert pour un système d'attente où la densité du flux de demandes arrivées ne dépend pas de l'état du système lui-même.

D'une façon analogue, la formule qui exprime le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$ par l'intermédiaire du débit absolu A

$$\bar{k} = A/\mu, \tag{11.0.3}$$

où $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$ est la densité du flux de services, est d'une importance universelle pour les systèmes d'attente ouverts.

Un grand nombre de problèmes de la théorie des systèmes d'attente sont résolus à l'aide du schéma de naissance et de mort (voir chapitre 10). Si le graphe

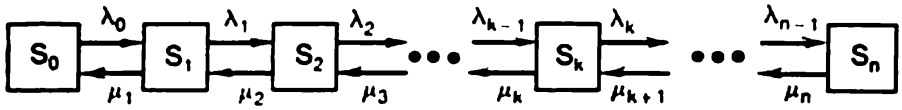


Fig. 11.0.1

des états peut être mis sous la forme représentée sur la figure 11.0.1, les probabilités limites des états sont exprimées par les formules (10.0.23)

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left\{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_k} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}\right\}^{-1}; \\
p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \\
p_2 &= \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} p_0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_k &= \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_k} p_0 \quad (0 \leqslant k \leqslant n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n &= \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n} p_0.
\end{aligned} \tag{11.0.4}$$

Pour déduire les formules du nombre moyen de demandes (dans la file ou le système) on recourt largement à la dérivation des séries. Si $x < 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = x \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

et finalement

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{11.0.5}$$

Ci-dessous nous donnons sans les déduire plusieurs formules qui expriment les probabilités limites des états et les caractéristiques de l'efficacité pour certains types fréquents des systèmes d'attente. D'autres exemples de systèmes d'attente seront examinés sous la forme de problèmes.

1. Système d'attente simple à demandes refusées (problème d'Erlang). Un système d'attente à n canaux à demandes refusées reçoit un flux simple de demandes de densité λ; le temps de service obéit à la loi exponentielle de paramètre $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$. Les états du système sont numérotés d'après le nombre de

demandes dans le système (du fait de l'absence d'une file, il coïncide avec le nombre de canaux occupés) :

s_0, aucun canal n'est occupé ;

s_1, un seul canal est occupé, les autres sont disponibles ;

. . . . . .

s_k, k canaux sont occupés, les autres disponibles ($1 \leqslant k \leqslant n$) ;

. . . . . .

s_n, tous les canaux sont occupés.

Les probabilités limites des états sont exprimées par les formules d'Erlang

$$p = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.0.6}$$

où $\rho = \lambda/\mu$.

Les caractéristiques de l'efficacité

$$A = \lambda(1 - p_n); \quad Q = 1 - p_n; \quad P_{\text{réf}} = p_n, \quad \bar{k} = \rho(1 - p_n). \tag{11.0.7}$$

Pour de grandes valeurs de n il est commode de calculer les probabilités des états (11.0.6) à l'aide des fonctions tabulées :

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad \text{(répartition de Poisson)} \tag{11.0.8}$$

et

$$R(m, a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{11.0.9}$$

(voir annexes 1 et 2), dont la première peut être exprimée par l'intermédiaire de la deuxième

$$P(m, a) = R(m, a) - R(m - 1, a). \tag{11.0.10}$$

Si on utilise ces fonctions, les formules d'Erlang (11.0.6) peuvent se récrire sous la forme

$$p_k = P(k, \rho)/R(n, \rho) \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{11.0.11}$$

2. Système d'attente simple à un canal à file illimitée. Un système d'attente à un canal reçoit un flux simple de demandes de densité λ. Le temps de service obéit à la loi exponentielle de paramètre $\mu = 1/\bar{t}_{\text{ser}}$. La longueur de la file n'est pas limitée. Les probabilités limites existent seulement pour $\rho = \lambda/\mu < 1$ (pour $\rho \geqslant 1$ la file croît indéfiniment). Les états du système sont numérotés d'après le nombre de demandes faisant partie de la file ou servies :

s_0, aucun canal n'est occupé ;

s_1, le canal est occupé ; pas de file ;

s_2, le canal est occupé, une demande dans la file ; ... ;

s_k, le canal est occupé, $k - 1$ demandes dans la file ; ...

Les probabilités limites des états sont exprimées par les formules

$$p_1 = 1 - \rho; \quad p_k = \rho^k(1 - \rho) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11.0.12}$$

où $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Les caractéristiques de l'efficacité du système d'attente :

$$A = \lambda; \quad Q = 1; \quad P_{\text{réf}} = 0; \tag{11.0.13}$$

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \quad \bar{t}_{\text{sys}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}; \quad \bar{t}_f = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}, \tag{11.0.14}$$

le nombre moyen de canaux occupés (ou la probabilité pour que le canal soit occupé) :

$$\bar{k} = \lambda/\mu = \rho. \tag{11.0.15}$$

3. Système d'attente simple à un canal à longueur de file limitée. Le système d'attente à un canal reçoit un flux simple de demandes de densité λ ; le temps de service obéit à la loi exponentielle de paramètre $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$. La file compte m unités. Si la demande arrive à l'instant où toutes les unités sont occupées, elle reçoit un refus et quitte le système. Les états du système :

s_0, aucun canal n'est occupé ;
s_1, le canal est occupé, pas de file ;
s_2, le canal est occupé, une demande dans la file ;
. . . . . .
s_k, le canal est occupé, $k - 1$ demandes dans la file ;
. . . . . .
s_{m+1}, le canal est occupé, m demandes dans la file.

Les probabilités limites des états existent quel que soit $\rho = \lambda/\mu$; elles s'écrivent

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \quad p_k = \rho^k p_0 \quad (k = 1, \ldots, m+1). \tag{11.0.16}$$

Les caractéristiques de l'efficacité du système :

$$A = \lambda (1 - p_{m+1}); \quad Q = 1 - p_{m+1}; \quad P_{ref} = p_{m+1}.$$

Le nombre moyen de canaux occupés (la probabilité pour que le canal soit occupé)

$$\bar{k} = 1 - p_0. \tag{11.0.17}$$

Le nombre moyen de demandes dans la file

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}. \tag{11.0.18}$$

Le nombre de demandes dans le système d'attente :

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}. \tag{11.0.19}$$

D'après la formule de Little :

$$\bar{t}_{sys} = \bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_f = \bar{r}/\lambda. \tag{11.0.20}$$

4. Système d'attente simple à canaux multiples à file illimitée. Le système d'attente à n canaux reçoit un flux simple de demandes de densité λ ; le temps de service d'une demande obéit à la loi exponentielle de paramètre $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$. Les probabilités limites existent seulement pour $\rho/n = \varkappa < 1$, où $\rho = \lambda/\mu$. Les états du système sont numérotés d'après le nombre de demandes dans le système :

s_0, aucun canal n'est occupé ;
s_1, un canal est occupé ;
. . . . . .
s_k, k canaux sont occupés $(1 \leqslant k \leqslant n)$;
. . . . . .
s_n, tous les n canaux sont occupés ;
} pas de file ;
s_{n+1}, tous les n canaux sont occupés, une demande dans la file ;
. . . . . .
s_{n+r}, tous les n canaux sont occupés, r demandes dans la file ;
. . . . . .

Les probabilités limites des états sont exprimées par les formules:

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\frac{1}{1-\varkappa}\right\}^{-1};$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0 \quad (1\leqslant k\leqslant n); \quad p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0 \quad (r\geqslant 1). \qquad (11.0.21)$$

A l'aide des fonctions $P(m, a)$ et $R(m, a)$ les formules (10.0.21) peuvent être ramenées à la forme

$$p_k=\frac{P(k, \rho)}{R(n, \rho)+P(n, \rho)\left(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)} \quad (k=0, \ldots, n); \qquad (11.0.22)$$

$$p_{n+r}=\varkappa^r p_n \quad (r=1, 2, \ldots).$$

Les caractéristiques de l'efficacité du système d'attente:

$$\bar{r}=\rho^{n+1}p_0/[n\cdot n!\,(1-\varkappa)^2]=\varkappa p_n/(1-\varkappa)^2; \qquad (11.0.23)$$

$$\bar{z}=\bar{r}+\bar{k}=\bar{r}+\rho; \qquad (11.0.24)$$

$$\bar{t}_{\text{sys}}=\bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_f=\bar{r}/\lambda. \qquad (11.0.25)$$

5. **Système d'attente simple à canaux multiples à longueur de file limitée.** Les conditions et la numérotation des états sont les mêmes que pour le point 4, à cette différence près que le nombre m d'unités dans la file est limité. Les probabilités limites des états existent quels que soient λ et μ et sont exprimées par les formules:

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\frac{1-\varkappa^m}{1-\varkappa}\right\}^{-1};$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0 \quad (1\leqslant k\leqslant n);$$

$$p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0 \quad (1\leqslant r\leqslant m), \qquad (11.0.26)$$

où $\varkappa=\rho/n=\lambda/(n\mu)$.

Les caractéristiques de l'efficacité du système d'attente:

$$A=\lambda(1-p_{n+m}); \quad Q=1-p_{n+m}; \quad P_{\text{ref}}=p_{n+m}; \quad \bar{k}=\rho(1-p_{n+m}); \qquad (11.0.27)$$

$$\bar{r}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!}\frac{1-(m+1)\varkappa^m+m\varkappa^{m+1}}{(1-\varkappa)^2}; \qquad (11.0.28)$$

$$\bar{z}=\bar{r}+\bar{k}; \qquad (11.0.29)$$

$$\bar{t}_f=\bar{r}/\lambda; \quad \bar{t}_{\text{sys}}=\bar{z}/\lambda. \qquad (11.0.30)$$

6. **Système d'attente à canaux multiples à demandes refusées pour un flux simple de demandes et un temps de service quelconque.** Les formules d'Erlang (11.0.6) restent vraies également lorsque le flux de demandes est simple et le temps de service T_{ser} obéit à la loi de répartition arbitraire d'espérance mathématique $\bar{t}_{\text{ser}}=1/\mu$.

7. **Système d'attente à un canal à file illimitée avec flux de demandes simple et temps de service arbitraire.** Si un système d'attente à un canal reçoit un flux de demandes simple de densité λ, alors que le temps de service T_{ser} est réparti d'après une loi arbitraire d'espérance mathématique $1/\mu$ et de coefficient de

variation v_μ, alors le nombre moyen de demandes dans la file est exprimé par la *formule de Pollaczek-Khintchine*:

$$\bar{r} = \rho^2 (1 + v_\mu)^2 / [2 (1 - \rho)], \tag{11.0.31}$$

où $\rho = \lambda/\mu$, et le nombre moyen de demandes dans le système

$$\bar{z} = \{\rho^2 (1 + v_\mu)^2 / [2 (1 - \rho)]\} + \rho. \tag{11.0.32}$$

On tire de (11.0.31) et (11.0.32) pour obtenir d'après la formule de Little

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^2 (1 + v_\mu)^2}{2\lambda (1 - \rho)}, \quad \bar{t}_{sys} = \frac{\rho^2 (1 + v_\mu^2)}{2\lambda (1 - \rho)} + \frac{1}{\mu}. \tag{11.0.33}$$

8. Système d'attente à un canal à flux de demandes arbitraire (de Palma) et temps de service arbitraire. Pour ce cas il n'existe pas de formules exactes, l'évaluation approchée de la longueur de la file peut être donnée par la formule

$$\bar{r} \approx \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2 (1 - \rho)], \tag{11.0.34}$$

où v_λ est le coefficient de variation de l'intervalle entre les événements dans le flux d'arrivée; $\rho = \lambda/\mu$; λ est la grandeur inverse à l'espérance mathématique de cet intervalle; $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$, la grandeur inverse au temps de service moyen; v_μ, le coefficient de variation du temps de service. Le nombre moyen de demandes liées au système d'attente:

$$\bar{z} \approx \{\rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2 (1 - \rho)]\} + \rho, \tag{11.0.35}$$

alors que les temps moyens de la présence de la demande dans la file et dans le système d'attente sont égaux respectivement à

$$\bar{t}_f \approx \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2\lambda (1 - \rho)], \tag{11.0.36}$$

$$\bar{t}_{sys} \approx \{\rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2\lambda (1 - \rho)]\} + 1/\mu. \tag{11.0.37}$$

9. Système d'attente simple à phases multiples à file. L'analyse des systèmes d'attente à phases multiples est rendue difficile par le fait que le flux d'entrée de chaque phase successive est le flux de sortie de la phase précédente et dans le cas général il possède une postaction. Pourtant, *si à l'entrée d'un système d'attente à file illimitée arrive un flux de demandes simple, alors que le temps de service obéit à la loi exponentielle, à la sortie de ce système il y a un flux simple de même densité λ que celle du flux d'entrée.* Il s'ensuit qu'un système d'attente à phases multiples à file illimitée avant chaque phase, à flux de demandes simple à l'entrée et à temps de service suivant la loi exponentielle dans chaque phase, peut être analysé comme une série simple des systèmes d'attente simples.

Si la file à la phase est limitée, le flux de sortie de cette phase cesse d'être simple et le procédé mentionné ne peut être appliqué que comme un moyen approché.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations des caractéristiques de l'efficacité des systèmes d'attente données page 419, et introduirons, lorsque se présentera la nécessité, certaines autres notations. En donnant la densité $f(x)$ par des formules différentes sur des tronçons différents de l'axe Ox, nous n'indiquerons pas non plus les valeurs de $f(x)$ aux extrémités des tronçons.

Si l'unité de mesure du temps n'est pas fixée, nous désignerons pour abréger la densité des flux simplement par les lettres λ, μ, . . . (sans indiquer les dimensions). Ceci se rapporte également au temps $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_{ser}$, $\bar{t}_f$. Mais si l'unité de temps est fixée (heure, minute, année, etc.), les unités de mesure seront indiquées.

Dans le présent chapitre il nous sera commode d'écrire la loi de répartition d'une variable aléatoire mixte T non pas sous la forme d'une fonction de répartition $F(t)$, mais sous la forme de densité « généralisée » $f(t)$ définie de la façon suivante

$$f(t) = F'_{\text{cont}}(t) + \sum_i p_i \delta(t - t_i),$$

où $F'_{\text{cont}}(t)$ est la dérivée de la fonction de répartition sur ses intervalles de continuité : $p_i = P\{T = t_i\}$; $\delta(x)$, la fonction delta dont les propriétés sont données dans l'annexe 6.

Problèmes et exercices

11.1. A l'entrée d'un système d'attente à un canal à demandes refusées arrive un flux de demandes simple de densité λ ; le temps de service obéit à la loi exponentielle de paramètre μ. A l'instant initial $t = 0$ le canal est disponible. Construire le graphe marqué des états du système. Ecrire et résoudre les équations différentielles de Kolmogorov pour leurs probabilités. Trouver les probabilités limites des états et, pour le régime permanent, les caractéristiques de l'efficacité du système : A, Q, P_{ref}, $\bar{k}$.

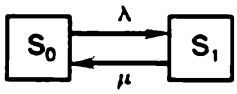


Fig. 11.1

Solution. Les états du système d'attente : s_0, disponible ; s_1, le canal est occupé. Le graphe des états est représenté sur la figure 11.1. Les équations de Kolmogorov

$$dp_0/dt = -\lambda p_0 + \mu p_1 ; \quad dp_1/dt = \lambda p_0 - \mu p_1. \qquad (11.1.1)$$

Etant donné que pour tout t, $p_0 + p_1 = 1$, on peut exprimer p_1 à l'aide de p_0 : $p_1 = 1 - p_0$ et obtenir l'équation de p_0 :

$$dp_0/dt = -(\lambda + \mu) p_0 + \mu. \qquad (11.1.2)$$

En la résolvant on obtient p_0 en tant que fonction de t :

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right],$$

d'où

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}].$$

Pour $t \to \infty$ on obtient les probabilités limites :

$$p_0 = \mu/(\lambda + \mu), \quad p_1 = \lambda/(\lambda + \mu), \qquad (11.1.3)$$

qui pourraient se calculer d'une façon bien plus simple en résolvant les équations algébriques des probabilités limites des états :

$$\lambda p_0 = \mu p_1, \quad p_0 + p_1 = 1.$$

Si l'on introduit la notation $\rho = \lambda/\mu$, les formules (11.1.3) pourraient s'écrire sous une forme plus condensée

$$p_0 = 1/(1 + \rho); \quad p_1 = \rho/(1 + \rho).$$

Les caractéristiques de l'efficacité du système

$$A = \lambda p_0 = \frac{\lambda}{1+\rho}; \quad Q = \frac{1}{1+\rho}; \quad P_{\text{réf}} = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho};$$

$$\bar{k} = 1 - p_0 = \frac{\rho}{1+\rho}. \qquad (11.1.4)$$

11.2. Un système d'attente à un canal à demandes refusées est une ligne téléphonique qui reçoit à l'entrée un flux simple d'appels de densité $\lambda = 0{,}4$ appel/mn. La durée moyenne d'une communication $\bar{t}_{\text{ser}} = 3$ mn; la durée de la communication obéit à une loi exponentielle. Trouver les probabilités limites des états du système p_0 et p_1, ainsi que A, Q, $P_{\text{réf}}$, $\bar{k}$. Comparer le débit du système avec la valeur nominale qu'aurait le système si une communication durait exactement 3 mn, alors que les demandes se suivraient régulièrement l'une après l'autre sans interruption.

Solution. $\lambda = 0{,}4$; $\mu = 1/\bar{t}_{\text{ser}} = 1/3$; $\rho = \lambda/\mu = 1{,}2$. D'après les formules (11.1.3):

$$p_0 \approx 1/2{,}2 \approx 0{,}455; \quad p_1 \approx 0{,}545;$$

$$Q \approx 0{,}455; \quad A = \lambda Q \approx 0{,}182; \quad \bar{k} = p_1 \approx 0{,}545.$$

De la sorte, la ligne assure en moyenne le service de 0,455 demande reçue, c'est-à-dire 0,182 communication par minute. Le débit nominal du canal, les demandes étant reçues et servies régulièrement, serait $A_{\text{nom}} = 1/\bar{t}_{\text{ser}} = 1/3 \approx 0{,}333$ communication/mn, ce qui est presque deux fois plus grand que le débit réel A.

11.3. Soit un système d'attente à un canal à demandes refusées. Le flux de demandes simple a une densité λ. Le temps de service n'est pas aléatoire et vaut exactement $t_{\text{ser}} = 1/\mu$. Trouver le débit relatif et absolu du système en régime permanent limite.

Solution. Considérons sur l'axe Ot un flux de demandes simple de densité λ (fig. 11.3). Marquons par des ronds toutes les demandes ser-

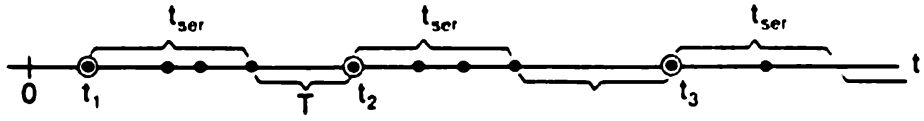


Fig. 11.3

vies. Supposons qu'une demande arrivée à l'instant t_1 est admise au service. Alors, toutes les demandes arrivées après elle pendant le temps t_{ser} sont refusées; la demande servie suivante est celle qui

arrive à l'instant t_2, tel que $t_2 - t_1 > t_{ser}$. Considérons l'intervalle T entre l'instant de la fin de service de la première demande et l'instant t_2 de l'arrivée de la demande suivante la plus proche qui sera servie. L'absence de postaction dans un flux simple fait que la répartition de l'intervalle est parfaitement la même que celle de l'intervalle entre les demandes en général, c'est-à-dire qu'elle obéit à la loi exponentielle de paramètre λ. La longueur moyenne de l'intervalle T est égale à $m_t = 1/\lambda$.

Ainsi, sur l'axe Ot alternent les intervalles non aléatoires des canaux occupés de longueur $t_{ser} = 1/\mu$ et les intervalles aléatoires disponibles de longueur $1/\lambda$. La part des demandes qui tombent dans les premiers intervalles est égale à

$$\frac{1/\mu}{1/\mu + 1/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

et celle qui tombent dans les deuxièmes,

$$\mu/(\lambda + \mu) = 1/(1 + \rho), \quad \text{où} \quad \rho = \lambda/\mu.$$

Cette grandeur est justement le débit relatif du système

$$Q = 1/(1 + \rho), \tag{11.3.1}$$

d'où

$$A = \lambda Q = \lambda/(1 + \rho). \tag{11.3.2}$$

Notons que les formules (11.3.1) et (11.3.2) coïncident avec celles de (11.1.4) qui correspondent à la loi de répartition exponentielle du temps de service. Ceci n'est que très naturel, puisque les formules d'Erlang restent vraies quelle que soit la loi de répartition du temps de service à valeur moyenne égale à $1/\mu$.

11.4. Utiliser la formule (11.0.5) pour démontrer que dans un système d'attente simple à un canal à file illimitée le nombre moyen de demandes présentes dans le système est égal à $\bar{z} = \rho/(1 - \rho)$, où $\rho = \lambda/\mu$, alors que le nombre moyen de demandes dans la file est $\bar{r} = \rho^2/(1 - \rho)$.

Solution. D'après les formules (11.0.12), $p_0 = 1 - \rho$; $p_k = \rho^k (1 - \rho)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Désignons par Z le nombre de demandes réel (aléatoire) dans le système

$$\bar{z} = \mathrm{M}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k (1-\rho) = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k.$$

D'après la formule (11.0.5), pour $\rho < 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

d'où $\bar{z} = \rho/(1 - \rho)$. Le nombre moyen de demandes dans la file est égal à $\bar{z}$ moins le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k} = A/\mu = \lambda/\mu = \rho$, c'est-à-dire que $\bar{r} = [\rho/(1 - \rho)] - \rho = \rho^2/(1 - \rho)$.

11.5. Une bosse de triage des chemins de fer sur laquelle arrive un flux simple de trains de densité $\lambda = 2$ trains par heure, est un système d'attente à un canal à file illimitée. Le temps de service (de triage) d'un train sur la bosse obéit à la loi exponentielle à valeur moyenne $\bar{t}_{ser} = 20$ mn. Trouver les probabilités limites des états du système, le nombre moyen $\bar{z}$ de trains liés à la bosse, le nombre moyen $\bar{r}$ de trains dans la file, le temps moyen $\bar{t}_{sys}$ de séjour des trains dans le système, le temps moyen $\bar{t}_f$ d'attente des trains dans la file.

Solution. $\lambda = 2$ trains/h ; $\bar{t}_{ser} = 1/3$ h ; $\mu = 3$ trains/h ; $\rho = \lambda/\mu = 2/3$. D'après les formules (11.0.12)

$$p_0 = 1 - 2/3 = 1/3\,;$$
$$p_1 = (2/3)(1/3) = 2/9\,;$$
$$p_2 = (2/3)^2(1/3) = 4/27\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_k = (2/3)^k(1/3)\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'après les formules (11.0.13), (11.0.14) on obtient $\bar{z} = \rho/(1 - \rho) = 2$ trains ; $\bar{r} = 4/3$ train ; $\bar{t}_{sys} = 1$ h ; $\bar{t}_f = 2/3$ h.

11.6. L'énoncé du problème précédent est compliqué par le fait que le faisceau de réception de la bosse de triage peut admettre simultanément pas plus de 3 trains (y compris le train servi). Si un train arrive à l'instant où le faisceau de réception est déjà occupé par trois trains, il doit attendre son tour sur les voies de garage. Pour une heure de présence du train sur les voies de garage la gare paye une amende de a roubles. Déterminer l'amende quotidienne moyenne qu'il faut payer pour l'attente des trains sur les voies de garage.

Solution. Calculons le nombre moyen $\bar{z}_e$ des trains qui se trouvent garés sur les voies extérieures :

$$\bar{z}_e = 1 \cdot p_4 + 2p_5 + \ldots = \sum_{k=4}^{\infty} kp_k = \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k p_0 = p_0 \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k\,;$$

$$\sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k = p \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k =$$

$$= \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{k=4}^{\infty} \rho^k = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^4}{1-\rho} = \frac{\rho^4(4-3\rho)}{(1-\rho)^2}\,;$$

$$\bar{z} = p_0 \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho^4(4-3\rho)}{1-\rho} \approx 1{,}18.$$

D'après la formule de Little le temps moyen de séjour d'un train sur les voies de garage $\bar{t}_e \approx 1{,}18/\lambda = 1{,}18/2 = 0{,}59$ h. Pendant les 24 h en moyenne $24\lambda = 48$ trains arrivent à la gare. L'amende moyenne quotidienne est $48 \cdot 0{,}59\ a = 28{,}3\ a$.

11.7. Calculer directement d'après le graphe des états, en utilisant le schéma de naissance et de mort, les probabilités limites des états d'un système d'attente simple à deux canaux ($n = 2$), à trois

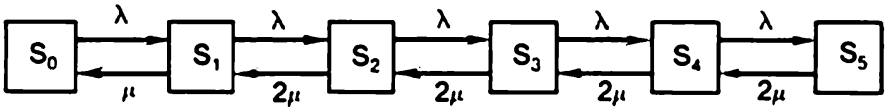


Fig. 11.7

unités dans la file ($m = 3$) pour $\lambda = 0{,}6$; $\mu = 0{,}2$; $\rho = \lambda/\mu = 3$. Trouver pour ce système les caractéristiques $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_f$ sans utiliser les formules (11.0.26) directement d'après les probabilités limites, et les comparer avec celles qui s'obtiennent à l'aide des formules (11.0.26).

Solution. Le graphe des états du système est représenté sur la figure 11.7. En introduisant la notation $\lambda/\mu = \rho$, on obtient d'après le schéma de naissance et de mort

$$p_0 = \left\{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^3} + \frac{\rho^5}{2^4}\right\}^{-1} = (40{,}58)^{-1} \approx 0{,}025\,;$$

$$p_1 = \frac{3}{40{,}58} \approx 0{,}074\,; \quad p_2 = \frac{4{,}5}{40{,}58} \approx 0{,}111\,;$$

$$p_3 = \frac{6{,}75}{40{,}58} \approx 0{,}165\,; \quad p_4 = \frac{10{,}15}{40{,}58} \approx 0{,}250\,;$$

$$p_5 = \frac{15{,}18}{40{,}58}\ 0{,}375\,;$$

$$\bar{z} = 1 \cdot 0{,}074 + 2 \cdot 0{,}111 + 3 \cdot 0{,}165 + 4 \cdot 0{,}250 + 5 \cdot 0{,}375 \approx 3{,}67\,;$$

$$\bar{r} = 1 \cdot 0{,}165 + 2 \cdot 0{,}250 + 3 \cdot 0{,}375 \approx 1{,}79\,;$$

$$\bar{t}_{sys} = \bar{z}/0{,}6 \approx 6{,}11\,; \quad \bar{t}_f = \bar{r}/0{,}6 \approx 2{,}98.$$

11.8. La formule de $\bar{r}$ (11.0.28) est vraie pour tout $\varkappa < 1$ ou $\varkappa > 1$. Pour $\varkappa = 1$ elle perd le sens (donne une indétermination de la forme 0/0). Utiliser directement le schéma de naissance et de mort pour déduire pour ce cas les probabilités des états $p_0, p_1, \ldots, p_{n+m}$ et trouver les caractéristiques de l'efficacité du système A, Q, P_{ref}, k, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_f$, $\bar{t}_{sys}$.

Solution. Le graphe des états du système est de la forme représentée sur la figure 11.8. En utilisant les formules générales de naissance et de mort et en introduisant la notation $\lambda/\mu = \rho$, on obtient

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \cdots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]\right\}^{-1}.$$

Pour $\varkappa = \rho/n = 1$,

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m\rho^n}{n!}\right\}^{-1}; \qquad (11.8.1)$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n); \quad p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (1 \leqslant r \leqslant m); \quad (11.8.2)$$

$$P_{\text{réf}} = p_{n+m}; \quad Q = 1 - p_{n+m} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$A = \lambda Q = \lambda\left[1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right]; \quad \bar{k} = A/\mu = \rho\left[1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right];$$

$$\bar{r} = \sum_{r=1}^{m} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{m} r \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{r=1}^{m} r = \frac{\rho^n}{n!} \frac{m(m+1)}{2} p_0; \quad (11.8.3)$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}, \quad \bar{t}_{\text{sys}} = \bar{z}/\lambda, \quad \bar{t}_f = \bar{r}/\lambda.$$

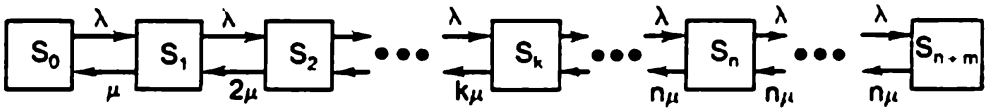


Fig. 11.8

11.9. Une station-service possède deux postes d'essence ($n = 2$); l'aire devant elle admet l'attente simultanée de quatre voitures au plus ($m = 4$). Les voitures qui arrivent à la station forment un flux simple de densité $\lambda = 1$ voiture/mn. Le temps de service d'une voiture suit la loi de répartition exponentielle à valeur moyenne $\bar{t}_{\text{ser}} = 2$ mn. Trouver les probabilités limites des états de la station-service et ses caractéristiques A, Q, $P_{\text{réf}}$, $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{sys}}$, $\bar{t}_f$.

Solution. $\lambda = 1$; $\mu = 1/2$; $\rho = 2$; $\varkappa = \rho/n = 1$.

D'après les formules (11.8.1) à (11.8.3) on a

$$p_0 = \left\{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot 4\right\}^{-1} = \frac{1}{13}; \; p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{2}{13};$$

$$P_{\text{réf}} = 2/13; \; Q = 1 - P_{\text{réf}} = 11/13; \quad A = \lambda Q =$$

$$= 11/13 \approx 0{,}85 \text{ voiture/mn};$$

$$\bar{k} = A/\mu = 22/13 \approx 1{,}69 \text{ poste};$$

$$\bar{r} = \frac{2^2}{2!} \frac{4(4+1)}{2} \cdot \frac{1}{13} \approx 1{,}54 \text{ voiture}; \quad \bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 3{,}23 \text{ voitures}.$$

11.10. Soit un système d'attente simple à deux canaux à demandes refusées. A son entrée arrive un flux de demandes de densité $\lambda = 4$ demandes/h. Le temps de service moyen d'une demande $\bar{t}_{ser} = 0{,}8$ h. Chaque demande servie rapporte $c = 4$ roubles. L'entretien de chaque canal coûte 2 roubles/h. L'augmentation du nombre de canaux jusqu'à trois présente-elle un avantage dans le sens économique?

Solution. D'après les formules d'Erlang (11.0.6)

$$p_0 = \left\{1 + 3{,}2 + \frac{3{,}2^2}{2!}\right\}^{-1} = (9{,}32)^{-1} \approx 0{,}107\,; \quad p_2 \approx \frac{5{,}12}{9{,}32} \approx 0{,}550\,;$$

$$Q = 1 - p_2 \approx 0{,}450\,; \quad A = 4Q \approx 1{,}8 \text{ demande/h}.$$

Le revenu apporté par le système dans la variante proposée est égal à $D = A \cdot c \approx 7{,}2$ roubles/h.

Calculons les mêmes caractéristiques pour un système à trois canaux, en les affectant d'en haut d'un prime:

$$p_0' = \left\{1 + 3{,}2 + \frac{3{,}2^2}{2!} + \frac{3{,}2^3}{3!}\right\}^{-1} \approx 0{,}0677\,; \quad p_3' \approx 5{,}48 \cdot 0{,}0677 \approx 0{,}371\,;$$

$$Q' = 1 - p_3' \approx 0{,}629\,; \quad A' = 4Q' \approx 2{,}52\,; \quad D' = A' \cdot c \approx 10{,}08 \text{ roubles/h}.$$

Le revenu augmente alors de $D' - D = 2{,}88$ roubles/h; les frais deviennent plus grands de 2 roubles/h; on voit donc que le passage de $n = 2$ à $n = 3$ est économiquement avantageux.

11.11. Considérons un système d'attente simple à nombre de canaux pratiquement illimité ($n \to \infty$). A l'entrée du système arrive un flux de demandes de densité λ; la densité du flux de services (pour un canal) est égale à μ. Trouver les probabilités limites des états du système et le nombre moyen $\bar{k}$ de canaux occupés.

Solution. Le système donné ne refuse pas les demandes ni forme des files; on peut l'envisager comme le cas limite du système à demandes refusées pour $n \to \infty$. Les formules d'Erlang (11.0.6) donnent:

$$p_0 = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}\right\}^{-1} = e^{-\rho}, \quad \text{où } \rho = \frac{\lambda}{\mu}\,;$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = P(k, \rho),$$

(voir annexe 1). Pour un nombre illimité de canaux $A = \lambda$; $\bar{k} = \lambda/\mu = \rho$.

11.12. On considère un système d'attente à un canal à demandes refusées; à son entrée arrive un flux simple de demandes de densité λ. Le temps de service obéit à la loi exponentielle de paramètre $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$. Le canal occupé peut de temps en temps subir une défaillance: les défaillances du canal forment un flux simple de densité ν. La réparation du canal défectueux commence immédiatement.

après sa défaillance ; le temps de réparation T_r obéit à la loi exponentielle de paramètre $\gamma = 1/\bar{t}_r$. La demande traitée à l'instant de la défaillance du canal quitte le système sans être servie.

Trouver les probabilités limites des états du système : s_0, canal disponible ; s_1, canal occupé, en bon état ; s_2, canal en réparation, ainsi que les caractéristiques du système A et Q.

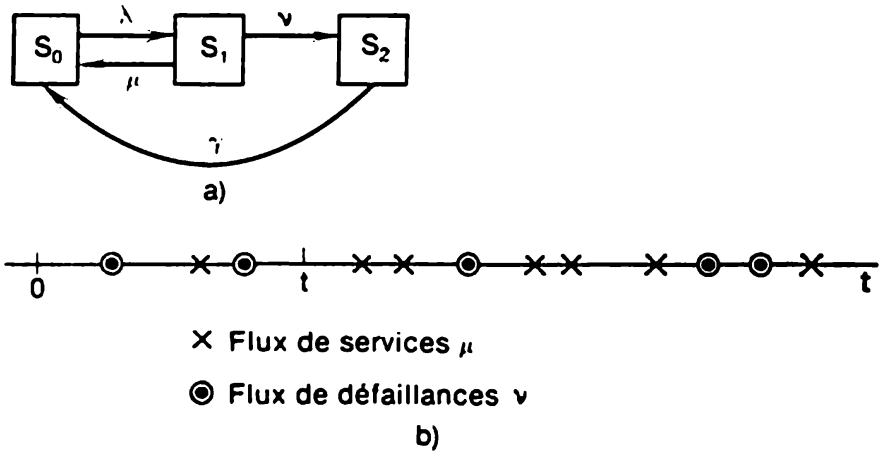


Fig. 11.12

Solution. Le graphe des états du système est donné par la figure 11.12, *a*. Les équations algébriques des probabilités limites des états

$$\lambda p_0 = \mu p_1 + \gamma p_2; \quad (\mu + \nu)\, p_1 = \lambda p_0; \quad \nu p_1 = \gamma p_2; \qquad (11.12.1)$$

on y ajoute la condition de normalisation :

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1. \qquad (11.12.2)$$

Exprimons les probabilités p_1, p_2 de (11.12.1) à l'aide de p_0 :

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\nu}\, p_0; \qquad p_2 = \frac{\nu}{\gamma}\, p_1 = \frac{\lambda\nu}{\gamma(\mu+\nu)}\, p_0.$$

En portant p_1 et p_2 dans (11.12.2), on obtient

$$p_0 = \{1 + \lambda/(\mu + \nu) + \lambda\nu/[\gamma\,(\mu + \nu)]\}^{-1}. \qquad (11.12.3)$$

Pour trouver le débit relatif Q, il faut multiplier la probabilité p_0 pour que la demande soit admise au service par la probabilité conditionnelle p' pour que la demande admise au service soit réellement servie (que le canal ne subisse pas une défaillance au cours du service de la demande). Cherchons cette probabilité conditionnelle d'après l'intégrale de la probabilité totale. Faisons l'hypothèse que le temps de service tombe dans l'intervalle de t à $t + dt$; la probabilité approchée de cette hypothèse est $f(t)\,dt$, où $f(t)$ est la densité de probabilité du temps de service : $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ $(t > 0)$. La probabilité

conditionnelle pour que le canal ne soit pas mis hors service pendant le temps t est égale à $e^{-\nu t}$; on en tire

$$p' = \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} e^{-\nu t}\, dt = \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\nu)t}\, dt = \frac{\mu}{\mu+\nu}\,.$$

Cette probabilité peut s'obtenir aussi d'une façon plus simple: elle est égale à la probabilité pour que le service une fois commencé se termine avant que le canal soit mis hors service. Représentons sur l'axe Ot la superposition du flux de services de densité μ (visualisé par des croix) et du flux de refus du canal de densité ν (visualisé par des ronds). Fixons un point quelconque t sur l'axe Ot et cherchons la probabilité pour que la première croix après ce point survienne avant qu'un rond. Il est clair qu'elle est égale au rapport de la densité du flux de croix à la densité globale du flux de croix et de ronds $\mu/(\mu+\nu)$. De la sorte,

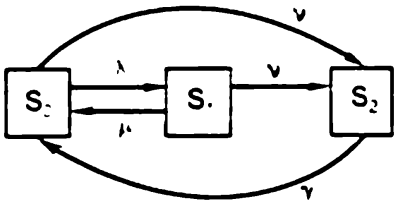


Fig. 11.13

$$Q = p_0 p' = \left(\frac{\mu}{\mu+\nu}\right) \Big/ \left(1 + \frac{\lambda}{\mu+\nu} + \frac{\lambda\nu}{\gamma(\mu+\nu)}\right) = \frac{\mu}{\mu+\nu+\lambda(1+\nu/\gamma)}\,.$$

$$A = \lambda Q. \qquad (11.12.4)$$

11.13. L'énoncé du problème 11.12 est repris à cette différence près que le canal peut être aussi mis hors service à l'état non occupé (avec une densité $\nu' < \nu$).

Solution. Le graphe des états du système est donné par la figure 11.13. Les équations

$$(\lambda + \nu')\, p_0 = \mu p_1 + \gamma p_2\,; \quad (\mu + \nu)\, p_1 = \lambda p_0\,; \quad \gamma p_2 = \nu p_1 + \nu'\, p_0\,;$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

permettent de trouver les probabilités limites:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda}{\mu+\nu} + \frac{\lambda\nu + \mu\nu' + \nu\nu'}{\gamma(\mu+\nu)}\right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\nu}\, p_0\,; \quad p_2 = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' + \nu\nu'}{\gamma(\mu+\nu)}\, p_0\,;$$

$$Q = p_0 \frac{\mu}{\mu+\nu}\,; \quad A = \lambda Q = p_0 \frac{\lambda\mu}{\mu+\nu}\,.$$

11.14. On considère un système d'attente simple à un canal à file limitée $m = 2$; il se peut que le canal occupé soit parfois mis hors service. La demande servie à l'instant de la défaillance du canal prend place dans la file s'il y a encore des unités disponibles, sinon,

elle quitte le système sans être servie. La densité du flux de demandes est λ, du flux de services, μ, du flux de défaillances du canal, ν, du flux de réparations, γ. Dénombrer les états du système et trouver

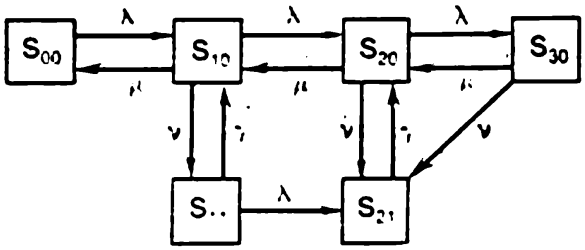


Fig. 11.14

leurs probabilités limites, ainsi que les caractéristiques de l'efficacité A, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_f$ pour $\lambda = 2$; $\mu = 1$; $\nu = 0{,}5$; $\gamma = 1$.

Solution. Etats du système:

s_{00}, le système est libre, le canal est en bon état;

s_{10}, le canal est occupé et en bon état, pas de file;

s_{11}, le canal est hors service, en réparation; le système comporte une demande qui attend son tour;

s_{20}, le canal est occupé et en bon état; une demande est servie, une autre attend son tour;

s_{21}, le canal est hors service, en réparation; deux demandes dans la file attendent leur tour;

s_{30}, le canal est occupé et en bon état; deux demandes attendent leur tour, une est servie.

Le graphe des états du système est représenté sur la figure 11.14. Les équations des probabilités limites des états sont:

$$\mu p_{10} = \lambda p_{00};\ \mu p_{20} + \gamma p_{11} + \lambda p_{00} = (\mu + \lambda + \nu)\, p_{10};$$
$$\mu p_{30} + \gamma p_{21} + \lambda p_{10} = (\mu + \lambda + \nu)\, p_{20};$$
$$\lambda p_{20} = (\mu + \nu)\, p_{30};\quad \nu p_{20} = (\mu + \nu)\, p_{30};$$
$$\nu p_{10} = (\gamma + \lambda)\, p_{11};\quad \lambda p_{11} + \nu p_{20} + \nu p_{30} = \gamma p_{21};$$
$$p_{00} + p_{10} + p_{11} + p_{20} + p_{21} + p_{30} = 1.$$

En les résolvant pour $\lambda = 2$; $\mu = 1$; $\nu = 0{,}5$; $\gamma = 1$, on obtient

$$p_{00} = 3/61 \approx 0{,}049;\quad p_{10} = 6/61 \approx 0{,}098;\quad p_{20} = 14/61 \approx \approx 0{,}230;$$
$$p_{30} = 56/183 \approx 0{,}306;\quad p_{11} = 1/61 \approx 0{,}016;$$
$$p_{21} = 55/183 \approx 0{,}301.$$

On en tire

$$\bar{z} = 1\,(p_{10} + p_{11}) + 2\,(p_{20} + p_{21}) + 3p_{30} = 383/183 \approx 2{,}09\,;$$

$$\bar{r} = 1\,(p_{20} + p_{11}) + 2\,(p_{21} + p_{30}) = 89/61 \approx 1{,}46\,;$$

$$\bar{k} = 1\,(p_{10} + p_{20} + p_{30}) = 116/183 \approx 0{,}63.$$

Le débit absolu A d'un système à canaux sans demandes refusées pourrait s'obtenir en multipliant $\bar{k}$ par μ ; dans notre cas la productivité d'un canal (nombre moyen de demandes servies par unité de temps) peut s'obtenir en multipliant $\bar{k}$ par la probabilité $\mu/(\mu + \nu)$ pour que le service commencé soit mené à bon terme : $A = \bar{k}\mu \cdot \mu/(\mu + \nu) = \bar{k}\mu^2/(\mu + \nu) \approx 0{,}42$.

11.15. Un cabinet de dentiste compte trois fauteuils ($n = 3$), alors que dans l'antichambre il y a trois sièges ($m = 3$) prévues pour les patients qui attendent leur tour. Le flux de patients est simple de densité $\lambda = 12$ patients/h. Le temps de service (réception d'un patient) suit la loi exponentielle à valeur moyenne $\bar{t}_{ser} = 20$ mn. Si les trois sièges de l'antichambre sont occupés, le patient ne prend pas la file. Déterminer le nombre moyen de patients dont le cabinet assure le service par heure, la part moyenne de clients servis parmi ceux qui sont arrivés, le nombre moyen de sièges occupés dans l'antichambre, le temps moyen $\bar{t}_{sys}$ que le patient passe dans l'antichambre et dans le cabinet ; le même temps moyen à condition que le patient sera servi.

Solution. $\rho = 12/3 = 4$; $\varkappa = \rho/3 = 4/3$; $n = 3$; $m = 3$. D'après les formules (11.0.26) à (11.0.30) on trouve

$$p_0 = \left\{1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{3\cdot 6}\cdot\frac{1-(4/3)^3}{1-4/3}\right\}^{-1} \approx 0{,}01218 \approx 0{,}012\,;$$

$$p_1 = 4\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}049\,; \qquad p_2 = 8\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}097\,;$$

$$p_3 = \frac{32}{3}\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}130\,; \qquad p_{3+1} = \frac{4^4}{36}\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}173\,;$$

$$p_{3+2} = \frac{4}{3}\,p_{3+1} \approx 0{,}231\,; \qquad p_{3+3} = \frac{4}{3}\,p_{3+2} \approx 0{,}307\,.$$

La part moyenne de patients servis :

$$Q = 1 - P_{ref} = 1 - p_{3+3} \approx 1 - 0{,}307 = 0{,}693.$$

La part moyenne des patients servis par le cabinet en une heure

$$A = \lambda Q \approx 12\cdot 0{,}693 \approx 8{,}32.$$

La part moyenne des canaux (fauteuils) occupés [d'après la formule (11.0.27)]

$$\bar{k} = 4\,(1 - p_{3+3}) \approx 2{,}78.$$

Le nombre moyen de patients dans la file [d'après la formule (11.0.28)]

$$\bar{r} = \frac{4^4 \cdot 0{,}01218}{3 \cdot 6} \frac{1 - 4 \cdot (4/3)^3 + 3\,(4/3)^4}{(1 - 4/3)^2} \approx 1{,}56\,;$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 4{,}34\,; \quad \bar{t}_f = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}13\,\text{h}\,; \quad \bar{t}_{sys} = \bar{z}/\lambda \approx 0{,}362\,\text{h}.$$

Les faibles valeurs de $\bar{t}_{sys}$ et $\bar{t}_f$ sont dues au fait que certains patients s'en vont sans prendre la file. Le temps moyen conventionnel passé par le patient dans le système sous la condition qu'il serait servi est égal à $\tilde{\bar{t}}_{sys} = \bar{t}_{sys}/Q \approx 0{,}52$ h, et le temps moyen conditionnel de sa présence dans la file (sous la même condition) $\tilde{\bar{t}}_f = \bar{t}_f/Q \approx$ $\approx 0{,}19$ h.

11.16. Les formules (11.0.26), (11.0.28) amènent pour $\varkappa = 1$ l'indétermination de la forme 0/0. Lever cette indétermination et écrire pour ce cas les formules valides.

Solution. D'après la règle de L'Hospital

$$\lim_{\varkappa \to 1} \frac{1 - \varkappa^m}{1 - \varkappa} = \frac{-m\varkappa^{m-1}}{-\varkappa} = m\,;$$

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1} m}{n \cdot n!}\right\}^{-1}; \tag{11.16.1}$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n)\,; \tag{11.16.2}$$

$$p_{n+1} = p_{n+2} = \ldots = p_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{11.16.3}$$

c'est-à-dire que toutes les probabilités depuis p_n et terminant par p_{n+m} sont égales entre elles.

Les formules de A, Q, P_{ref}, $\bar{k}$ restent les mêmes.

En levant l'indétermination de la formule (11.0.28), on obtient

$$\lim_{\varkappa \to 1} \frac{1 - (m+1)\varkappa^m + m\varkappa^{m+1}}{(1 - \varkappa)^2} = \frac{m\,(m+1)}{2}\,; \quad \bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0 m\,(m+1)}{2n \cdot n!}\,. \tag{11.16.4}$$

Les formules (11.0.29), (11.0.30) restent les mêmes.

Les formules (11.16.1) à (11.16.3) pourraient également se déduire sans lever l'indétermination, directement du schéma de naissance et de mort.

11.17. 1) Calculer les caractéristiques de l'efficacité A, Q, P_{ref}, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_f$, $\bar{t}_{sys}$ pour un système d'attente simple à un canal à trois unités dans la file ($m = 3$) sous les conditions $\lambda = 4$ demandes/h; $\bar{t}_{ser} = 1/\mu = 0{,}5$. 2) Etablir comment changent ces caractéristiques si le nombre d'unités dans la file augmente jusqu'à $m = 4$.

Solution. 1) $\mu = 2$; $\rho = \lambda/\mu = 2$; d'après les formules (11.0.12) à (11.0.16) pour $m = 3$ on a: $p_0 = 1/31$; $p_4 = 16/31$; $Q \approx 0{,}484$; $A = \lambda Q \approx 1{,}93$ demande/h; $\bar{k} = \rho Q \approx 0{,}968$; $\bar{r} \approx 2{,}19$ demandes; $\bar{z} \approx 3{,}16$ demandes; $\bar{t}_f \approx 0{,}55$ h; $\bar{t}_{sys} \approx 0{,}79$ h.

2) Pour $m = 4$ on a: $p_0 = 1/63 \approx 0{,}0158$; $p_5 = 32/63 \approx 0{,}507$; $Q \approx 0{,}493$; $A \approx 1{,}96$ demande/h; $\bar{r} \approx 3{,}11$ demandes; $\bar{z} = 4{,}09$ demandes; $\bar{t}_f \approx 0{,}78$ h; $\bar{t}_{sys} \approx 1{,}02$ h.

De la sorte, en augmentant jusqu'à quatre au lieu de trois le nombre d'unités on obtient une augmentation négligeable du débit absolu (et relatif) accompagnée d'une certaine augmentation du nombre de demandes dans la file et le système, ainsi que des temps moyens correspondants. Ceci n'est que très naturel, puisque certaines demandes refusées dans la première variante prennent quand même la file dans la deuxième.

11.18. Comment changent les caractéristiques de l'efficacité du système d'attente du problème précédent si λ et μ restent les mêmes, $m = 3$, mais le nombre de canaux de service augmente jusqu'à $n = 2$?

Solution. $\varkappa = 1$; d'après les formules (11.16.1), (11.16.2) on a: $p_0 = 1/11$; $p_1 = \ldots = p_5 = 2/11$; $Q = 1 - 2/11 \approx 0{,}818$; $A \approx 3{,}27$ demandes/h; $\bar{r} = 12/11 \approx 1{,}09$ demande; $\bar{k} = A/\mu \approx 1{,}64$; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2{,}73$ demandes; $\bar{t}_f \approx 0{,}27$ h; $\bar{t}_{sys} \approx 0{,}68$ h.

11.19. Le système d'attente est une caisse à guichet de billets unique ($n = 1$) et file illimitée. Le guichet distribue les billets jusqu'aux points A et B; en 20 mn il se présente en moyenne trois passagers désireux d'acheter un billet jusqu'au point A et deux, jusqu'au point B. On peut admettre que le flux de passagers est simple. Le caissier dessert en moyenne trois passagers en 10 mn. Le temps de service obéit à la loi exponentielle. Etablir si les états du système possèdent des probabilités limites et si oui, calculer les premières trois d'entre elles: p_0, p_1, p_2. Trouver les caractéristiques de l'efficacité du système: $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_f$.

Solution. $\lambda_A = 3/20 = 0{,}15$ demande/mn; $\lambda_B = 2/20 = 0{,}10$ demande/mn. Densité générale du flux de demandes: $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0{,}25$ demande/mn; $\mu = 3/10 = 0{,}3$ demande/mn; $\rho = \lambda/\mu \approx 0{,}833 < 1$, les probabilités limites existent. D'après les formules (11.0.12) à (11.0.14): $p_0 \approx 0{,}167$; $p_1 \approx 0{,}139$; $p_2 \approx 0{,}116$; $\bar{z} \approx 0{,}833/0{,}167 \approx 4{,}99$ demandes; $\bar{r} = 0{,}833^2/0{,}167 \approx 4{,}16$ demandes; $\bar{t}_{sys} \approx 4{,}99/0{,}25 \approx 20{,}0$ mn; $\bar{t}_f \approx 4{,}16/0{,}25 \approx 16{,}7$ mn.

11.20. Le système d'attente à un canal est un ordinateur sur lequel arrivent des demandes de calculs. Le flux de demandes est simple, à intervalle moyen entre les demandes $\bar{t} = 10$ mn. Le temps de service $\bar{t}_{ser}$ est réparti suivant la loi d'Erlang d'ordre 3 d'espérance

mathématique $\bar{t}_{ser} = 8$ mn. Déterminer le nombre moyen $\bar{z}$ de demandes dans le système et le nombre moyen $\bar{r}$ de demandes dans la file, ainsi que le temps moyen de séjour de la demande dans le système $\bar{t}_{sys}$ et dans la file $\bar{t}_f$.

Solution. Les caractéristiques du système d'attente peuvent s'obtenir d'après les formules (11.0.31) et (11.0.32). Soit: $\lambda = 0{,}1$ demande/mn; $\mu = 0{,}125$ demande/mn; $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8$.

Pour la loi d'Erlang d'ordre 3 le coefficient de variation du temps de service est égal à $1/\sqrt{3}$. D'après la formule (11.0.31), $\bar{r} = 0{,}64\,(1 + 1/3)/(2 \cdot 0{,}2) \approx 2{,}13$. D'après la formule (11.0.32), $\bar{z} = \bar{r} + 0{,}8 \approx 2{,}93$. D'après la formule de Little, $\bar{t}_f \approx 21{,}3$ mn; $\bar{t}_{sys} \approx 29{,}3$ mn.

11.21. L'énoncé du problème précédent est modifié de la façon suivante: le flux de demandes n'est déjà plus simple, mais celui de Palma, l'intervalle entre les événements dans le flux étant réparti d'après la loi d'Erlang généralisée d'ordre 2 (voir problème 8.38) de paramètres $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. Trouver d'après les formules (11.0.34) à (11.0.37) les valeurs approchées des caractéristiques de l'efficacité du système d'attente.

Solution. La variable aléatoire T répartie d'après la loi d'Erlang généralisée d'ordre 2 est la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 réparties d'après la loi exponentielle de paramètres $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. On en tire $M[T] = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 = 10$ mn; $D[T] = D[T_1] + D[T_2] = 2^2 + 8^2 = 68$; $v_\lambda^2 = 68/10^2 = 0{,}68$; $v_\mu^2 = 1/3$. Par conséquent $\bar{r} = 1{,}62$ demande; $\bar{z} = 2{,}42$ demandes; $\bar{t}_f = 16{,}2$ mn; $\bar{t}_{sys} = 24{,}2$ mn.

11.22. Une installation peut de temps en temps être mise hors service. Le flux de ses défaillances est un flux simple de densité $\lambda = 1{,}6$ défaillance par jour. Le temps T_{rep} de réparation de l'installation possède une répartition uniforme dans l'intervalle de 0 à 24 h. Trouver pour le régime permanent limite la part moyenne R du temps pendant lequel l'installation travaille.

Solution. Les états de l'installation: s_0, l'installation travaille; s_1, elle est en réparation. Le graphe des états est donné par la figure 11.22, où $\mu = 1/M[T_{rep}] = 1/0{,}5 = 2$. Ce graphe coïncide exactement avec le graphe d'un système d'attente à un canal à demandes refusées. Nous savons que si le flux de demandes arrivant au système est simple, et le temps de service est réparti arbitrairement, les formules d'Erlang (11.0.6) sont vérifiées; dans notre cas $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8$; $p_0 = \{1 + \rho/1!\}^{-1} = 1/1{,}8 \approx 0{,}556$; $p_1 = 1 - 0{,}556 \approx 0{,}444$. Ainsi, $R \approx 0{,}556$, c'est-à-dire que l'installation travaille un peu plus que la moitié du temps total, le temps restant elle est en réparation.

11.23. Dans l'énoncé du problème précédent l'installation est doublée par une autre installation exactement identique, qui peut

tomber en panne seulement à l'état de travail; λ, μ sont les mêmes que dans le problème 11.22. Trouver la valeur de R, ainsi que le nombre moyen $\bar{k}$ d'installations défectueuses.

Solution. Les états du système: s_0, les deux installations sont en bon état (une d'elles travaille, alors que l'autre chôme); s_1, une installation travaille, l'autre est en réparation; s_2, les deux installations sont en réparation. Le graphe des états est représenté sur la

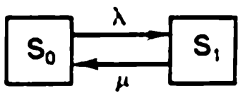


Fig. 11.22

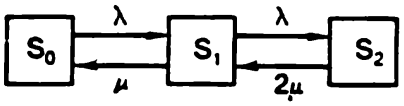


Fig. 11.23

figure 11.23. Ce graphe coïncide exactement avec le graphe des états d'un système d'attente à deux canaux à demandes refusées. D'après la formule d'Erlang (11.0.6)

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!}\right\}^{-1} = \{1 + 0.8 + 0.64/2\}^{-1} \approx 0,472;$$

$$p_1 \approx 0.8 \cdot 0.472 = 0.378; \quad R = p_0 + p_1 \approx 0,850;$$

$$p_2 = 0,150; \quad \bar{k} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 0,678.$$

Il est clair que le même procédé (réduction à un système d'attente à demandes refusées) peut être appliqué également lorsque le nombre d'installations doubleurs est supérieur à un.

11.24. Le système d'attente est un magasin de chaussures où chaque acheteur passe par trois phases de service: 1) choix et essayage des chaussures; 2) passage par la caisse pour payer et 3) réception de l'achat au contrôle. Les acheteurs qui se présentent au magasin forment un flux simple de densité $\lambda = 45$ personnes/h.

Dans la section d'essayage il y a quatre chaises, en les occupant l'acheteur peut lui-même choisir et essayer les chaussures. Le temps moyen de choix et d'essayage $\bar{t}_1 = 5$ mn. Une fois le choix fait, l'acheteur se dirige vers la caisse où il prend une deuxième fois la file (il n'y a qu'une caisse dans le magasin). Le temps moyen qu'il met à payer à la caisse $\bar{t}_2 = 1$ mn. Après la caisse l'acheteur se présente au contrôle, où il prend de nouveau la file pour recevoir l'achat. Au contrôle travaillent trois vendeurs: pour remettre l'achat ils ont besoin en moyenne $\bar{t}_3 = 2$ mn. Tous les flux d'événements sont simples.

Considérons le magasin comme un système d'attente à trois phases. Trouver les caractéristiques de son efficacité:

$\bar{r}_1$ ($\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$), le nombre moyen d'acheteurs dans la file de la première (deuxième, troisième) phase de service;

$\bar{z}_1(\bar{z}_2, \bar{z}_3)$, le nombre moyen d'acheteurs dans la file de la première (deuxième, troisième) phase de service;

$\bar{t}_f^{(1)}$ $(\bar{t}_f^{(2)}, \bar{t}_f^{(3)})$, le temps moyen d'attente dans la file de la première (deuxième, troisième) phase;

$\bar{t}_{sys}^{(1)}$ $(\bar{t}_{sys}^{(2)}, \bar{t}_{sys}^{(3)})$, le temps moyen de la présence de l'acheteur dans la première (deuxième, troisième) phase de service;

$\bar{r}$, le nombre total moyen d'acheteurs dans toutes les trois files;

$\bar{z}$, le nombre total moyen d'acheteurs dans le magasin;

$\bar{t}_f$, le temps total moyen de la présence de l'acheteur dans les files;

$\bar{t}_{sys}$, le temps total moyen employé par le client pour acheter des chaussures dans le magasin.

Répondre encore aux questions suivantes: 1) Dans quelle phase et comment peut-on réduire le temps de service des acheteurs? Comment pourrait-on prendre en considération le fait que tous les acheteurs ne trouvent pas les chaussures à leur goût et quelle est la part d'entre eux qui s'en vont sans faire un achat ($0 < \alpha < 1$)?

Solution. Puisque tous les flux d'événements sont simples, les flux de sortie de toutes les trois phases sont simples eux aussi, et on peut considérer les trois phases successives comme trois systèmes d'attente indépendants avec leurs caractéristiques.

1. *Première phase.* Puisque dans la section d'essayage il y a quatre chaises, le nombre de canaux $n_1 = 4$. Ensuite on a $\bar{t}_1 = 1/\mu_1 = 5$ mn $= 1/12$ h; $\rho_1 = 45/12 = 15/4 \approx 3{,}75$; $\varkappa_1 = \rho_1/n_1 = 15/16 < 1$. D'après les formules (11.0.21) à (11.0.25) on trouve

$$p_0^{(1)} = \left\{1 + 3{,}75 + \frac{(3{,}75)^2}{2} + \frac{(3{,}75)^3}{2\cdot 3} + \frac{(3{,}75)^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{(3{,}75)^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 4(1-15/16)}\right\}^{-1} \approx$$
$$\approx (151{,}58)^{-1} \approx 0{,}0066;$$

$$\bar{k}_1 = 3{,}75; \quad \bar{r}_1 = \frac{(3{,}75)^5}{4\cdot 4!}\,\frac{p_0^{(1)}}{(1-\varkappa_1)^2} \approx 13{,}01; \quad \bar{z}_1 = 16{,}76.$$

$$\bar{t}_f^{(1)} = \bar{r}_1/\lambda \approx 0{,}289 \text{ h} \approx 17{,}3 \text{ mn}; \quad \bar{t}_{sys}^{(1)} = \bar{z}_1\lambda \approx 0{,}372 \text{ h} \approx 22{,}3 \text{ mn}.$$

2. *Deuxième phase.* $\lambda = 45$; $n_2 = 1$; $\rho_2 = 0{,}75 < 1$. D'après les formules (11.0.12) à (11.0.14) on obtient

$$\bar{r}_2 = \rho_2^2/(1-\rho_2) = 9/4 = 2{,}25; \quad \bar{z}_2 = \rho_2/(1-\rho_2) = 3;$$
$$\bar{t}_f^{(1)} = \bar{r}_2/\mu = 0{,}05 \text{ h} = 3 \text{ mn}; \quad \bar{t}_{sys}^{(1)} = 1/15 \text{ h} = 4 \text{ mn}.$$

3. *Troisième phase.* $n_3 = 3$; $\lambda = 45$; $\rho_3 = 3/2$; $\varkappa_3 = 0{,}5 < 1$. D'après les formules (11.0.21) à (11.0.25) on trouve

$$p_0^{(3)} \approx 0{,}210, \quad \bar{r}_3 \approx 0{,}237; \quad \bar{z}_3 \approx 1{,}737,$$
$$\bar{t}_f^{(3)} \approx 0{,}316 \text{ mn}; \quad \bar{t}_{sys}^{(3)} \approx 2{,}316 \text{ mn}.$$

En additionnant les nombres moyens des trois files, on obtient le nombre total moyen de la file

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 \approx 15{,}5.$$

D'une façon analogue, on trouve le nombre moyen d'acheteurs dans le magasin $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 \approx 21{,}5$.

Le temps moyen d'attente dans la file

$$\bar{t}_f = \bar{t}_f^{(1)} + \bar{t}_f^{(2)} + \bar{t}_f^{(3)} \approx 20{,}6 \text{ mn}.$$

Le temps moyen passé par les acheteurs dans le magasin:

$$\bar{t}_{sys} = \bar{t}_{sys}^{(1)} + \bar{t}_{sys}^{(2)} + \bar{t}_{sys}^{(3)} \approx 28{,}6 \text{ mn}.$$

1) Le service peut être amélioré en réduisant la présence de l'acheteur dans la première phase, qui constitue le plus faible maillon du système d'attente. Le plus simple est de l'obtenir en augmentant le nombre n_1 de chaises dans la section d'essayage, c'est-à-dire le nombre de canaux de service de la première phase. Par exemple, la simple augmentation du nombre de chaises d'une unité (c'est-à-dire en passant de $n_1 = 4$ à $n_1 = 5$) donne un gain de temps important. En effet, avec $n_1 = 5$, on obtient pour la première phase: $\rho_1 = 3{,}75$; $\varkappa_1 = 3{,}75/5 = 0{,}75$; $p_0^{(1)} = \{59{,}71\}^{-1}$; $\bar{r}_1 \approx 2{,}08$; $\bar{z}_1 \approx 5{,}13$; $\bar{t}_f^{(1)} \approx 1{,}84$ mn; $\bar{t}_{sys}^{(1)} \approx 6{,}84$ mn.

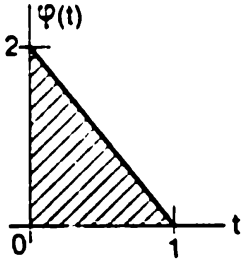


Fig. 11.25

2) La part α des acheteurs qui quittent le magasin sans faire d'achat est prise en considération en multipliant la densité du flux d'entrée de la deuxième et de la troisième phases par $(1 - \alpha)$.

11.25. Un flux de trains de densité $\lambda = 1{,}2$ train/h *) (flux d'Erlang d'ordre 10) arrive à la gare de triage de chemin de fer. Le temps de service T_{ser} d'un train est réparti dans l'intervalle de 0 à 1 h d'après la loi de densité $\varphi(t)$ visualisée sur la figure 11.25. Evaluer les valeurs approchées [d'après les formules (11.0.34) à (11.0.37)] des caractéristiques de l'efficacité de la gare: le nombre moyen $\bar{z}$ de trains dans la gare, le nombre moyen $\bar{r}$ de trains attendant dans la file; le temps moyen $\bar{t}_{sys}$ de la présence d'un train dans la gare; $\bar{t}_f$, le temps moyen d'attente par un train de son tour d'être servi.

*) Insistons sur le fait que là λ est précisément la densité d'un flux d'Erlang, et non pas d'un flux simple obtenu par tamisage d'un flux d'Erlang.

Solution. Pour la loi $\varphi(t)$ on a $\bar{t}_{ser} = 1/3$; $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8 < 1$. Pour le flux d'Erlang d'ordre 10 $v_\lambda^2 = (1/\sqrt{k})^2 = 0{,}1$; v_μ^2 est déterminé en divisant la variance D $[T_{ser}]$ par le carré de l'espérance mathématique $v_\mu^2 = 1/2 = 0{,}5$.

Calculons les caractéristiques du système d'attente:

$$\bar{r} = \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2)/[2(1-\rho)] = 0{,}8^2(0{,}1+0{,}5)/(2\cdot 0{,}2) = 0{,}96;$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho \approx 0{,}96 + 0{,}8 = 1{,}76;$$

$$\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}8\ \text{h}; \quad \bar{t}_{sys} = \bar{t}_f + 1/\mu \approx 1{,}13\ \text{h}.$$

11.26. Montrer que pour un système d'attente simple à n canaux à nombre d'unités illimité dans la file, le nombre moyen de demandes présentes dans la file ne dépasse pas les limites

$$\frac{\varkappa^{n+1}}{1-\varkappa}\,\frac{n}{\varkappa^n(n-1)+1} < \bar{r} < \frac{\varkappa^{n+1}}{1-\varkappa}.$$

Solution. Ecrivons l'expression de $\bar{r}$ sous la forme [voir formules (11.0.23), (11.0.21)]:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\,\frac{p_0}{(1-\varkappa)^2} = \frac{\varkappa}{(1-\varkappa)^2}\,p_n, \quad \text{où } p_n = \frac{\rho^n}{n!}\,p_0.$$

Donc

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\,\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\frac{n}{\rho}+\frac{n(n-1)}{\rho^2}+\cdots+\frac{n!}{\rho^n}+\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} >$$

$$> \left(1+\frac{n}{\rho}+\frac{n^2}{\rho^2}+\cdots+\frac{n^n}{\rho^n}+\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} = \varkappa^n(1-\varkappa).$$

D'autre part,

$$p_n < \left(1+\frac{1}{\rho}+\frac{n}{\rho^2}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{\rho^n}+\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} = \frac{\varkappa^n(1-\varkappa)\,n}{\varkappa^n(n-1)+1}.$$

Etant donné que $[\varkappa^n(1-\varkappa)\,n]/[\varkappa^n(n-1)+1] < p_n < \varkappa^n(1-\varkappa)$, l'inégalité indiquée par l'énoncé est observée elle aussi. Notons que la dernière égalité peut être utilisée pour le calcul approché de toutes les caractéristiques du système d'attente envisagé.

11.27. Une caisse de chemin de fer a deux guichets, dans chacun se vendent des billets à deux villes, Léningrad et Kiev. Les flux de passagers qui achètent les billets à Léningrad et à Kiev sont de même densité égale à $\lambda_0 = 0{,}45$ passager/mn. Le temps moyen de service d'un passager (la vente d'un billet) $\bar{t}_{ser} = 2$ mn.

Afin de réduire les files on a proposé de spécialiser les deux guichets de façon que l'un d'entre eux vend les billets seulement à Léningrad, et l'autre, seulement à Kiev. En considérant en première approxi-

mation que tous les flux d'événements sont simples, vérifier si cette proposition présente un avantage.

Solution. 1) Calculons les caractéristiques de la file pour un système d'attente à deux canaux (variante en vigueur). La densité du flux de demandes $\lambda = 2\lambda_0 = 0{,}9$ passager/mn; $\mu = 1/\bar{t}_{ser} = 0{,}5$ passager/mn; $\rho = \lambda/\mu = 1{,}8$; $\varkappa = \rho/2 = 0{,}9 < 1$. Les probabilités limites existent. D'après la formule (11.0.21):

$$p_0 = \left\{1 + 1{,}8 + \frac{1{,}8^2}{2}\frac{1}{1-0{,}9}\right\}^{-1} \approx 0{,}0525;$$

d'après la formule (11.0.23)

$$\bar{r} = \frac{1{,}8^3 \cdot 0{,}0525}{2 \cdot 2 \cdot 0{,}01} \approx 7{,}7 \text{ passagers}; \quad \bar{t}_f = \frac{7{,}7}{0{,}9} \approx 8{,}56 \text{ mn}.$$

2) Dans la deuxième variante (proposée) il y a deux systèmes d'attente à un canal: $\rho = \lambda_0/\mu = 0{,}45/0{,}5 = 0{,}9 < 1$.

La longueur moyenne de la file à un guichet [d'après la formule (11.0.13)] est égale à $\bar{r} = \rho^2/(1-\rho) = 0{,}9^2/0{,}1 = 8{,}1$ passagers. La longueur globale des files aux deux guichets est $2\bar{r} = 16{,}2$ passagers.

D'après la formule (11.0.14) le temps d'attente dans la file est $\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda = 8{,}1/4{,}5 = 18$ mn, ce qui est presque deux fois supérieur au temps correspondant de la variante en vigueur, qui est de 9,3 mn.

Conclusion. La proposition de « rationnalisation » doit être rejetée du fait qu'elle réduit sensiblement l'efficacité du système. La brusque altération des caractéristiques lors du passage de deux canaux (variante en vigueur) à un canal (variante proposée) s'explique par le fait qu'en établissant deux guichets spécialisés nous avons empêchés les caissiers de remplacer l'un l'autre.

11.28*. *Système d'attente simple à canaux multiples à demandes « impatientes » et à nombre d'unités illimité dans la file.* Soit un sys-

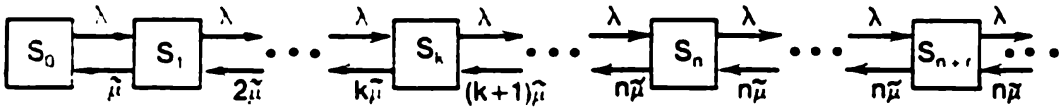


Fig. 11.28

tème d'attente simple à n canaux à file; la densité du flux de demandes est λ, du flux de services, $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$. Le temps que la demande se trouve dans la file est limitée par un certain delai aléatoire T, réparti d'après la loi exponentielle de paramètre ν (à chaque demande présente dans la file agit le « flux de sorties » de densité ν).

Ecrire les formules des probabilités limites des états, trouver le débit relatif du système Q, la longueur moyenne de la file $\bar{r}$, le temps

moyen $\overline{t}_f$ d'attente dans la file, le nombre moyen $\overline{z}$ de demandes dans le système et le temps moyen $\overline{t}_{sys}$ de la présence de la demande dans le système.

Solution. Les états du système sont encore numérotés d'après le nombre de demandes. Le graphe des états est représenté sur la figure 11.28. En utilisant les formules générales du schéma de naissance et de mort et en introduisant les notations $\rho = \lambda/\mu$; $\beta = \nu/\mu$, on obtient

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n+\beta} + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)} + \cdots\right]\right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n); \tag{11.28.1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho}{n+\beta} p_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)} p_0 \quad (r \geqslant 1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dans la première formule (11.28.1) figure la somme infinie qui n'est pas une progression géométrique, mais ses termes décroissent plus vite que les termes de cette dernière. On peut prouver que l'erreur qui apparaît lorsqu'on rejette tous les termes de la somme infinie à partir du r-ième est plus petite que $\frac{\rho^n}{n!}\frac{(\rho/\beta)^r}{r!} e^{-\rho/\beta}$.

Supposons que les probabilités $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots, p_{n+r}, \ldots$ sont calculées et montrons comment on peut trouver les caractéristiques du système d'attente donné (le débit relatif Q, le nombre moyen de demandes dans la file $\overline{r}$, etc.). Calculons d'abord Q. Toutes les demandes sont servies sauf celles qui quittent la file avant terme. Calculons combien de demandes quittent par unité de temps la file avant terme. La densité des flux de sortie qui revient à une demande présente dans la file est égale à ν, alors que la densité globale moyenne du flux de sorties qui revient à toutes les demandes attendant dans la file est égale à $\nu\overline{r}$. Donc, le débit absolu du système

$$A = \lambda - \nu\bar{r}, \tag{11.28.2}$$

et le débit relatif

$$Q = A/\lambda = 1 - \nu\bar{r}/\lambda. \tag{11.28.3}$$

De la sorte, pour trouver Q il faut d'abord connaître $\bar{r}$ qui peut se calculer directement d'après la formule $r = 1p_{n+1} + 2p_{n+2} + \ldots$ $\ldots + rp_{n+r} + \ldots$ Mais cette formule ne convient pas du fait qu'elle compte un nombre infini de termes. Ceci peut être évité si on utilise l'expression du nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$ à l'aide de A : $\bar{k} = A/\mu$, ou, en tenant compte de (11.28.2):

$$\bar{k} = (\lambda - \nu\bar{r})/\mu = \rho - \beta\bar{r}. \tag{11.28.4}$$

La formule (11.28.4) permet de tirer

$$\bar{r} = (\rho - \bar{k})/\beta, \tag{11.28.5}$$

et le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$ peut se calculer comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire K (nombre de canaux occupés) avec les valeurs possibles 0, 1, 2, ..., n et les probabilités correspondantes $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, [1 - (p_0 + p_1 + \ldots$ $\ldots + p_{n-1})]$:

$$\bar{k} = 1p_1 + 2p_2 + \ldots + (n-1)\,p_{n-1} + \\ + n\,[1 - (p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1})]. \tag{11.28.6}$$

Ensuite, d'après la formule (11.28.5) on calcule $\bar{r}$. La grandeur $\bar{t}_f$ s'obtient à l'aide de la formule de Little

$$\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda. \tag{11.28.7}$$

Le nombre moyen de demandes dans le système d'attente

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}, \tag{11.28.8}$$

et le temps moyen de la présence de la demande dans le système

$$\bar{t}_{sys} = \bar{z}/\lambda. \tag{11.28.9}$$

Note. On peut prouver que pour le système d'attente à demandes « impatientes » examiné, si seulement $\beta > 0$, les probabilités limites existent toujours. Ceci est confirmé par le fait que la série de la première formule (11.28.1) converge quels que soient ρ et β positifs et signifie, au fond, que la croissance de la file ne peut être illimitée: plus la longueur de la file est grande, plus la sortie des demandes présentes dans la file est intense.

11.29. On considère un système d'attente simple à deux canaux à demandes « impatientes » (voir problème 11.28). La densité du flux de demandes $\lambda = 3$ demandes/h; le temps de service moyen

d'une demande $\bar{t}_{ser} = 1/\mu = 1$ h; le temps moyen pendant lequel la demande « patiente » dans la file est égal à 0,5 h. Calculer les probabilités limites des états en se bornant à ceux qui ne sont pas inférieurs à 0,001. Trouver les caractéristiques de l'efficacité du système d'attente: Q, A, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_f$, $\bar{t}_{sys}$.

Solution. Soient $\lambda = 3$; $\mu = 1$; $\nu = 2$; $\rho = 3$; $\beta = 2$; $n = 2$. D'après les formules du problème 11.28, on obtient

$$p_0 = \left\{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{3^2}{4\cdot 6} + \frac{3^3}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{3^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{3^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \frac{3^7}{4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}\right]\right\}^{-1} \approx 0{,}0692,$$

d'où

$$p_1 = 3p_0 \approx 0{,}208; \quad p_2 = \frac{3}{2}p_1 \approx 0{,}311; \quad p_3 = \frac{3}{4}p_2 \approx 0{,}234;$$

$$p_4 = \frac{3}{6}p_3 \approx 0{,}117; \quad p_5 = \frac{3}{8}p_4 \approx 0{,}044; \quad p_6 = \frac{3}{10}p_5 \approx 0{,}013;$$

$$p_7 = \frac{3}{12}p_6 \approx 0{,}003; \quad p_8 = \frac{3}{14}p_7 \approx 0{,}001.$$

Le nombre moyen de canaux occupés (11.28.6) $\bar{k} = 1p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) \approx 1{,}654$; la longueur moyenne de la file (11.28.5): $\bar{r} = (\rho - \bar{k})/\beta = (3 - 1{,}654)/2 \approx 0{,}673$; le débit absolu $A = \bar{k}\mu \approx 1{,}654$ demande/h; le débit relatif $Q = A/\lambda \approx 0{,}551$ et ensuite $\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}224$ h; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2{,}327$; $\bar{t}_{sys} = \bar{z}/\lambda \approx 0{,}776$ h.

11.30. *Système d'attente simple à « erreurs ».* Soit un système d'attente à n canaux à file illimitée. A son entrée arrive un flux de demandes simple de densité λ; le temps de service suit la loi exponentielle de paramètre μ. Le service est fourni sans assurer la qualité: avec une probabilité p la demande est servie, et avec une probabilité $q = 1 - p$, elle ne l'est pas, pour arriver une deuxième fois dans le système où elle est soit servie sur-le-champ, s'il n'y a pas de file, soit prend la file, si celle-ci existe. Enoncer les états du système en les numérotant d'après le nombre de demandes dans le système; trouver les probabilités limites des états et les caractéristiques de l'efficacité du système. Trouver le nombre moyen de réclamations présentées par unité de temps, si chaque demande mal servie en présente une avec une probabilité R.

Solution. Les états du système:

s_0, le système est disponible;
s_1, un canal est occupé; } pas de file;
. . . . . .
s_k, k canaux sont occupés $(1 \leqslant k \leqslant n)$;
. . . . . .
s_n, tous les n canaux sont occupés;

s_{n+r}, tous les n canaux sont occupés, r demandes se trouvent dans la file ($r = 1, 2, \ldots$).

Le graphe des états est représenté sur la figure 11.30, où $\tilde{\mu} = \rho\mu$. Ce graphe montre que le système donné est équivalent à un autre

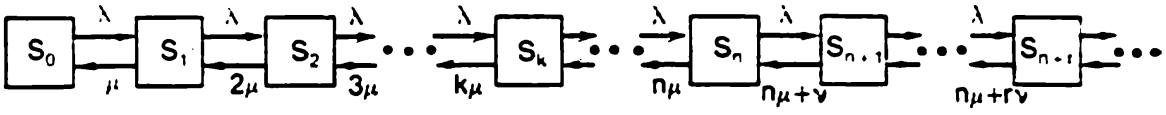


Fig. 11.30

système à garantie totale de la qualité de service, mais avec une densité de flux de services égale à $\tilde{\mu} = p\mu$; pour ce système $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu} = \lambda/(p\mu)$. Les formules (11.0.21) à (11.0.25) restent vraies, mais en remplaçant ρ par $\tilde{\rho}$ et μ par $\tilde{\mu}$.

11.31. *Système d'attente simple fermé à un canal.* Un opérateur dessert m machines-outils qui de temps en temps tombent en panne (imposent un réglage). La densité du flux de défaillances d'une

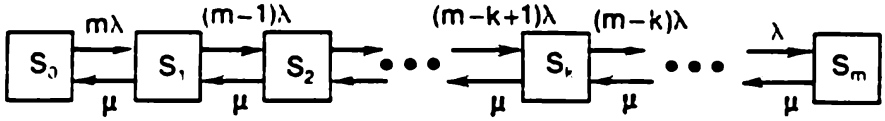


Fig. 11.31

machine-outil est égale à λ. Si à l'instant où se produit la défaillance l'ouvrier est libre, il s'attaque sur-le-champ au réglage, si ce n'est pas le cas, la machine-outil est mise dans la file pour le réglage. Le flux de défaillances est simple, le temps de réglage obéit à la loi exponentielle de paramètre $\mu = 1/\bar{t}_{ser}$. Enoncer les états du système en les numérotant d'après le nombre de machines-outils défectueuses; trouver les probabilités limites des états du système et les caractéristiques de l'efficacité suivantes: A, le nombre moyen de machines-outils réglées par unité de temps; $\bar{w}$, le nombre moyen de machines-outils défectueuses; $\bar{r}$, le nombre moyen de machines-outils qui attendent leur tour de réglage; P_{oc}, la probabilité pour que l'opérateur soit occupé.

Solution. Etats du système:

s_0, toutes les machines-outils sont en bon état (l'opérateur est libre);

s_1, une machine-outil est en panne (l'opérateur s'occupe de son réglage);

. . . . . .

s_k, k machines-outils sont en panne, l'une d'entre elles subit le réglage, $k-1$ attendent leur tour;

s_m, toutes les m machines-outils sont en panne; l'une d'entre elles subit le réglage, $m-1$ attendent leur tour.

Le graphe des états est représenté sur la figure 11.31.

D'après les formules générales du schéma de naissance et de mort, en introduisant la notation $\rho = \lambda/\mu$, on obtient

$$p_0 = \{1 + m\rho + m(m-1)\rho^2 + \ldots + m(m-1)\ldots \\ \ldots (m-k+1)\rho^k + \ldots + m!\,\rho^n\}^{-1};$$

$$p_1 = m\rho p_0;$$

$$p_2 = m(m-1)\rho^2 p_0; \qquad (11.31.1)$$

. . . . . .

$$p_k = m(m-1)\ldots(m-k+1)\rho^k p_0 \; (1 \leqslant k \leqslant n);$$

. . . . . .

$$p_m = m!\,\rho^m p_0.$$

Pour déterminer le débit absolu A, cherchons d'abord la probabilité pour que l'opérateur soit occupé:

$$P_{oc} = 1 - p_0. \qquad (11.31.2)$$

Si l'ouvrier est occupé il assure le réglage de μ machines-outils par unité de temps; donc

$$A = (1 - p_0)\,\mu. \qquad (11.31.3)$$

Le nombre moyen $\bar{w}$ de machines-outils défectueuses peut être exprimé par l'intermédiaire de A en raisonnant de la façon suivante. Chaque machine-outil en marche engendre un flux de défaillances de densité λ; en moyenne $m - \bar{w}$ machines-outils travaillent simultanément; le flux de défaillances qu'elles engendrent est d'une densité $(m - \bar{w})\,\lambda$; toutes ces défaillances sont éliminées par l'ouvrier; donc $(1 - p_0)\,\mu = (m - \bar{w})\,\lambda$, d'où

$$\bar{w} = m - (1 - p_0)/\rho. \qquad (11.31.4)$$

Le nombre moyen $\bar{r}$ de machines-outils dans la file se calcule de la façon suivante:

$$\bar{w} = \bar{r} + \bar{k}, \qquad (11.31.5)$$

où $\bar{k}$ est le nombre moyen de machines-outils servies (autrement dit, le nombre moyen de canaux de service occupés). Dans notre cas, le

nombre de canaux occupés est nul si l'ouvrier est libre, et 1, s'il est occupé: $\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1\,(1 - p_0) = 1 - p_0$. Par conséquent,

$$\bar{r} = m - (1 - p_0)/\rho - (1 - p_0) \text{ ou } \bar{r} = \\ = m - (1 - p_0)\,(1 + 1/\rho). \qquad (11.31.6)$$

11.32*. Trouver pour l'énoncé du problème 11.31 le temps moyen $\bar{t_f}$ que la machine-outil en panne choisie arbitrairement devra attendre pour être réglée.

Solution. La formule de Little utilisée dans ce qui précède convient seulement pour des systèmes d'attente ouverts, où la densité du flux de demandes ne dépend pas de l'état du système. Pour les systèmes fermés elle ne convient pas. Le temps $\bar{t_f}$ se trouve par des raisonnements suivants. Supposons qu'à un certain moment arrive une demande (défaillance de la machine-outil). Cherchons la probabilité pour qu'à cet instant le système se trouve à l'état s_k ($k = 0, \ldots, m - 1$) (il est clair qu'il ne pouvait pas se trouver à l'état s_m). Considérons m hypothèses:

H_0: à l'instant de l'apparition de la demande le système se trouve à l'état s_0;

H_1: à l'instant de l'apparition de la demande le système se trouve à l'état s_1;

. . . . . .

H_k: à l'instant de l'apparition de la demande le système se trouve à l'état s_k;

. . . . . .

H_{m-1}: à l'instant de l'apparition de la demande le système se trouve à l'état s_{m-1}.

Les probabilités *a priori* de ces hypothèses sont $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_{m-1}$.

Maintenant cherchons leurs probabilités *a posteriori* sous la condition que l'événement A = {dans l'intervalle de temps élémentaire $(t, t + dt)$ apparaît une défaillance de la machine-outil} a été observé. Sous les hypothèses $H_0, H_1, \ldots, H_{m-1}$ les probabilités conditionnelles de cet événement sont

$$\mathrm{P}(A|H_0) = m\lambda\, dt;$$
$$\mathrm{P}(A|H_1) = (m - 1)\,\lambda\, dt;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{P}(A|H_k) = (m - k)\,\lambda\, dt;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{P}(A|H_{m-1}) = \lambda\, dt.$$

D'après les formules de Bayes cherchons les probabilités *a posteriori* des hypothèses à condition que l'événement A a eu lieu. En

désignant ces probabilités par $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \ldots, \tilde{p}_{m-1}$, on obtient

$$\tilde{p}_0 = \frac{mp_0}{\sum\limits_{k=0}^{m-1} (m-k)\, p_k}; \quad \tilde{p}_1 = \frac{(m-1)\, p_1}{\sum\limits_{k=0}^{m-1} (m-k)\, p_k};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{p}_k = \frac{(m-k)\, p_k}{\sum\limits_{k=0}^{m-1} (m-k)\, p_k};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{p}_{m-1} = \frac{p_{m-1}}{\sum\limits_{k=0}^{m-1} (m-k)\, p_k}. \tag{11.32.1}$$

La connaissance de ces probabilités permet de trouver l'espérance mathématique totale de la présence de la machine-outil défectueuse dans la file. Si la machine-outil tombe en panne à l'instant où le système se trouve à l'état s_0, elle n'a pas à prendre la file; si c'est à l'état s_1, elle y demeure un temps moyen $1/\mu$; si c'est à l'état s_2, le temps $2/\mu$, etc. En multipliant les probabilités (11.32.1) par ces nombres et en additionnant, on obtient

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m-1} k\tilde{p}_k. \tag{11.32.2}$$

11.33. Un ouvrier dessert quatre machines-outils ($m = 4$); chaque machine tombe en panne avec une densité $\lambda = 0{,}5$ défaillance/h; le temps moyen de la réparation $\bar{t}_{rep} = 1/\mu = 0{,}8$ h. Tous les flux d'événements sont simples. En utilisant les formules des problèmes 11.31, 11.32, trouver 1) les probabilités finales des états; 2) le débit A; 3) le temps moyen relatif du chômage de l'ouvrier P_{ch}; 4) le nombre moyen de machines-outils dans la file $\bar{r}$; 5) le nombre moyen de machines défectueuses $\bar{w}$; 6) le temps moyen $\bar{t}_f$ d'attente dans la file d'une machine-outil en panne; 7) la productivité moyenne du groupe des machines compte tenu de leur fiabilité insuffisante, si en état de travail une machine-outil produit par unité de temps l pièces.

Solution. $\mu = 1/\bar{t}_{rep} = 1{,}25$; $\rho = \lambda/\mu = 0{,}4$.

1) D'après les formules (11.31.1) on a $p_0 = \{1 + 1{,}6 + 1{,}92 + 1{,}53 + 0{,}61\}^{-1} = 6{,}66^{-1} \approx 0{,}150$; $p_1 = 1{,}6p_0 \approx 0{,}240$; $p_2 = 1{,}92p_0 \approx 0{,}288$; $p_3 = 1{,}53p_0 \approx 0{,}230$; $p_4 = 0{,}061p_0 \approx 0{,}092$;

2) $A = 0{,}850\ \mu \approx 1{,}06$ machine-outil par heure;

3) $P_{ch} = p_0 = 0{,}150$;

4) $\bar{r} \approx 4 - 0{,}850\,(1 + 2{,}5) \approx 1{,}03$;

5) $\bar{w} \approx 1{,}03 + \bar{k} \approx 1{,}03 + 0{,}85 = 1{,}88$;

6) d'après les formules (11.32.1) et (11.32.2) on a $\tilde{p}_0 = \dfrac{4p_0}{4p_0 + 3p_1 + 2p_2 + p_3} \approx 0{,}283$; $\tilde{p}_1 \approx 0{,}340$; $\tilde{p}_2 = 0{,}270$; $\tilde{p}_3 = 0{,}108$; $\bar{t}_f = 0{,}8\,(\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3) \approx 0{,}964$ h;

7) la productivité d'un groupe de machines est égale à $(m - \bar{w})\,l \approx \approx 2{,}12\ l$.

11.34. *Système d'attente simple fermé à canaux multiples.* Une équipe de n ouvriers dessert m machines-outils ($n < m$). Le flux de défaillances de chaque machine-outil a une densité λ; le temps moyen de réglage d'une machine $\bar{t}_{ser} = 1/\mu$. Tous les flux d'événements sont simples. Trouver: les probabilités limites des états du système; le débit absolu A; le nombre moyen de machines-outils défectueuses $\bar{w}$.

Solution. Les états du système sont numérotés suivant le nombre de machines-outils défectueuses:

s_0, toutes les machines en bon état, les ouvriers disponibles;

s_1, une machine-outil défectueuse, un ouvrier occupé, les autres disponibles;

. . . . . .

s_k, k machines défectueuses, k ouvriers occupés, les autres disponibles ($k < m$);

. . . . . .

s_n, n machines défectueuses, tous les ouvriers occupés;

s_{n+1}, $n+1$ machines défectueuses, dont n subissent le réglage, une se tient dans la file;

. . . . . .

s_{n+r}, $n + r$ machines-outils défectueuses, dont n subissent le réglage, r attendent leur tour ($n + r < m$);

. . . . . .

s_m, toutes les m machines-outils défectueuses, dont n subissent le réglage, $m - n$ attendent leur tour.

Proposons au lecteur de construire lui-même le graphe des états du système; donnons seulement les formules définitives des probabilités de ces états:

$$p_0 = \Big\{1 + \frac{m}{1!}\rho + \frac{m(m-1)}{2!}\rho^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\rho^k + \\ + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!\,n}\rho^{n+1} + \\ + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n+r-1)]}{n!\,n^r}\rho^{n+r} + \cdots + \frac{m!}{n!\,n^{m-n}}\rho^m\Big\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{m}{1!}\rho p_0; \quad p_2 = \frac{m(m-1)}{2!}\rho^2 p_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\rho^k p_0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\rho^n p_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n+r} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n+r-1)]}{n!\,n^r}\rho^{n+r} p_0 \quad (1 \leqslant r \leqslant m-1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_m = \frac{m!}{n!\,n^{m-n}}\rho^m p_0, \quad \text{où} \quad \rho = \lambda/\mu. \qquad (11.34.1)$$

Ces probabilités permettent de calculer le nombre moyen d'ouvriers occupés:

$$\bar{k} = 0\cdot p_0 + 1p_1 + 2p_2 + \ldots + (n-1)\,p_{n-1} + \\ + n\,(p_n + p_{n+1} + \ldots + p_m) = p_1 + 2p_2 + \ldots \\ \ldots + (n-1)\,p_{n-1} + n\,(1 - p_0 - p_1 - \ldots - p_{n-1}). \qquad (11.34.2)$$

Le débit absolu: $A = \bar{k}\mu$ (11.34.3)

et le nombre moyen de machines-outils défectueuses

$$\bar{w} = m - \bar{k}\mu/\lambda = m - \bar{k}/\rho. \qquad (11.34.4)$$

11.35. Deux ouvriers ($n = 2$) desservent six machines ($m = 6$). Une machine-outil impose le réglage à peu près toutes les demi-heures. Le réglage prend en moyenne 10 mn. Tous les flux d'événements sont simples. 1) Déterminer les caractéristiques de l'efficacité du système d'attente: le nombre moyen d'ouvriers occupés $\bar{k}$; le débit absolu A; le nombre moyen de machines-outils défectueuses $\bar{w}$. 2) Etablir si les caractéristiques du système s'améliorent lorsque les ouvriers assurent le réglage en commun, cette opération prenant en moyenne 5 minutes pour une machine.

Solution. Résolvons le problème dans la première variante (le réglage d'une machine assuré par un ouvrier). Soit: $m = 6$; $n = 2$; $\lambda = 2$; $\mu = 6$; $\rho = \lambda/\mu = 1/3$. D'après les formules (11.34.1)

$$p_0 = \left\{1 + \frac{6}{1}\frac{1}{3} + \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\frac{1}{3^2} + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot2}\frac{1}{3^3} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot2^2}\frac{1}{3^4} + \right. \\ \left. + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot2^3}\frac{1}{3^5} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot2^4}\frac{1}{3^6}\right\} \approx 0{,}153;$$

$$p_1 = 6/1\cdot 1/3\cdot p_0 \approx 0{,}306.$$

Le nombre moyen d'ouvriers occupés se trouve d'après la formule (11.34.2); $\bar{k} = 1 \cdot p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) \approx 1{,}235$. Le débit absolu $A = \bar{k}\mu \approx 7{,}41$. Le nombre moyen de machines-outils défectueuses $\bar{w} = 6 - 7{,}41/2 \approx 2{,}30$.

2) Si les ouvriers procèdent ensemble au réglage des machines-outils, le système se transforme en un système à un canal ($m = 6$; $n = 1$) avec $\mu = 12$. Faisons les calculs pour $\rho = \lambda/\mu = 1/6$. D'après les formules (11.31.1)

$$p_0 = \left\{1 + 1 + \frac{6\cdot5}{6^2} + \frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6}\right\}^{-1} \approx$$

$$\approx 0{,}264; \quad p_1 \approx 0{,}264;$$

$$p_2 \approx 0{,}220; \quad p_3 \approx 0{,}147; \quad p_4 \approx 0{,}076;$$

$$p_5 \approx 0{,}024; \quad p_6 \approx 0{,}004; \quad \bar{w} = 6 - \frac{0{,}736}{1/6} \approx 1{,}59.$$

Le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k} = 1 - p_0 = 0{,}736$. Pourtant, compte tenu que le « canal » de service se compose dans notre cas de deux ouvriers, le nombre moyen d'ouvriers occupés est

$$\bar{k}' = 2 \cdot 0{,}736 \approx 1{,}47; \quad A = \bar{k}\mu = 0{,}736 \cdot 12 \approx 8{,}8.$$

Ainsi, l'entraide des ouvriers (canaux de service) a poussé l'occupation moyenne de 1,23 à 1,47, a diminué le nombre moyen de machines défectueuses de 2,30 à 1,59 et a augmenté le débit de 7,4 à 8,8.

11.36. Soit un système d'attente simple à trois canaux à demandes refusées; dans ce système arrive un flux de demandes de densité $\lambda = 4$ demandes/mn; le temps de service d'une demande par un canal $\bar{t}_{ser} = 1/\mu = 0{,}5$ mn. On demande s'il est avantageux du point de vue du débit d'engager les demandes en même temps suivant trois canaux? Dans ces conditions, le temps de service moyen devient trois fois plus petit. Comment changerait alors le temps moyen de la présence de la demande dans le système?

Solution. 1) Calculons d'après les formules d'Erlang (11.0.6) les probabilités des états du système sans l'entraide entre les canaux

$$p_0 = \left\{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right\}^{-1} \approx 0{,}158;$$

$$P_{ref} = p_3 = \frac{2^3}{3!} p_0 \approx 0{,}21; \quad Q = 1 - P_{ref} \approx 0{,}79; \quad A = \lambda Q \approx 3{,}16$$

Le temps moyen de séjour de la demande dans le système se calcule comme la probabilité Q pour que la demande soit admise au service, multipliée par le temps moyen de service $\bar{t}_{ser} \approx 0{,}79 \cdot 0{,}5 \approx$ $\approx 0{,}395$ mn.

2) Réunissons les trois canaux en un seul de paramètre $\mu =$ $= 3 \cdot 2 = 6$. On obtient

$$p_0 = \frac{1}{(1+2/3)^{-1}} = 0{,}6\,; \quad p_1 = (2/3)\,0{,}6 = 0{,}4\,;$$

$$P_{ref} = p_1 = 0{,}4\,; \quad Q = 1 - P_{ref} = 0{,}6\,; \quad A = \lambda Q = 4{,}06 = 2.4.$$

En comparant ce débit avec celui de la variante initiale, on voit qu'il n'augmente pas, comme dans le problème précédent, mais diminue. On comprend sans peine pourquoi: la réunion de deux canaux en un seul a augmenté la probabilité du refus, du fait que la demande arrivée trouve les deux canaux occupés et quitte le système sans être servie.

Le temps moyen de la présence de la demande dans le système est plus petit dans la deuxième variante que dans la première: $\bar{t}_{sys} = Q\ (1/6) = 0{,}1$ mn. Pourtant, cette diminution est payée « trop cher »: plusieurs demandes ne sont pas servies du tout et, par suite, passent dans le système un temps nul.

Pourquoi alors dans le problème précédent la réunion de deux canaux a-t-elle accru l'efficacité du service? Laissons le lecteur réfléchir sur cette question et expliquer la contradiction apparente. N'est-ce pas du fait que dans un système d'attente à demandes refusées les demandes ne prennent pas la file?

11.37. Soit un système d'attente simple à trois canaux à file illimitée. La densité du flux de demandes $\lambda = 4$ demandes/h; le temps de service moyen $\bar{t}_{ser} = 1/\mu = 0{,}5$ h. Est-il avantageux de réunir les trois canaux en un seul, en rendant ainsi le temps de service trois fois plus petit, du point de vue: 1) de la longueur moyenne de la file; 2) du temps moyen de la présence de la demande dans la file; 3) du temps moyen de la présence de la demande dans le système?

Solution. 1) Dans la première variante (système d'attente à trois canaux) $n = 3$; $\lambda = 4$; $\mu = 1/0{,}5 = 2$; $\rho = \lambda/\mu = 2$; $\varkappa = \rho/n =$ $= 2/3 < 1$. Les probabilités limites existent. Calculons p_0 d'après les formules (11.0.21)

$$p_0 = \left\{1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \frac{2^3}{3\,!} + \frac{2^4 \cdot (1/3)}{3\,!\,(1-2/3)}\right\}^{-1} = \frac{1}{9}\,;$$

$$\bar{r} = \frac{2^4 \cdot 1/9}{3 \cdot 3\,!\,(1/3)^2} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889\,; \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222\ \text{h}\,;$$

$$\bar{t}_{sys} = \bar{t}_f + \bar{t}_{ser} \approx 0{,}722.$$

2) En réunissant les trois canaux en un seul: $n = 1$; $\lambda = 4$; $\mu = 6$; $\rho = 2/3$. D'après les formules (11.0.12) à (11.0.14), on a

$$\bar{r} = \frac{(2/3)^2}{1 \cdot 3} \approx 1{,}333\,; \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx 0{,}333\ \text{h}\,;$$

$$\bar{t}_{sys} = \bar{t}_f + \bar{t}_{ser} = 1/3 + 1/6 = 0{,}500.$$

Ainsi, la réunion de trois canaux en un seul, en réduisant quelque peu le temps moyen de séjour de la demande dans le système (de 0,722 à 0,500), augmente la longueur moyenne de la file et le temps moyen d'attente dans la file. Il en est ainsi du fait que tant que les trois canaux desservent ensemble une demande, d'autres demandes arrivées doivent prendre la file.

L'amélioration de l'efficacité du service obtenue par la réunion des canaux d'un système d'attente fermé est due au fait que lors de la mise hors service des sources des demandes (des machines-outils) la densité de leur flux diminue.

11.38. On considère un système d'attente sous la forme d'un stationnement de taxis auquel arrivent un flux simple de clients de densité λ et un flux simple de voitures de densité μ. Les clients forment une file qui diminue d'une unité lorsqu'une voiture s'approche

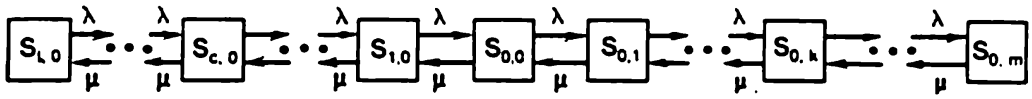


Fig. 11.38

du stationnement. Dans le cas où au stationnement il n'y a pas de clients, les voitures forment une file. Le nombre m de taxis au stationnement est limité; le nombre l de clients dans la file est limité lui aussi. Tous les flux d'événements sont simples. La montée dans une voiture est instantanée. Construire le graphe des états du système, trouver les probabilités limites des états, la longueur moyenne $\bar{r}_c$ de la file de clients; la longueur moyenne $\bar{r}_v$ de la file de voitures, le temps moyen $\bar{t}_{fc}$ d'attente des clients dans la file, le même temps $\bar{t}_{fv}$ pour les voitures, et établir comment changent ces caractéristiques avec $m \to \infty$; $l \to \infty$.

Solution. Numérotons par deux indices les états du système d'attente conformément au nombre de clients et de voitures au stationnement, le premier indiquant le nombre de clients, et le deuxième, le nombre de taxis. L'état $s_{0,0}$ signifie qu'il n'y a ni clients, ni voitures au stationnement; l'état $s_{0,k}$, aucune voiture, k clients; l'état $s_{c,0}$, c voitures, aucun client. Le graphe des états du système est représenté sur la figure 11.38. Ce graphe correspond au schéma

de naissance et de mort. En appliquant les formules générales (11.0.4) de ce schéma et en introduisant la notation $\lambda/\mu = \rho$, on obtient

$$\begin{aligned}
&p_{l-1,0} = \rho p_{l,0}\,; \quad p_{l-2,0} = \rho^2 p_{l,0}\,;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_{c,0} = \rho^{l-c} p_{l,0}\,;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_{0,0} = \rho^{l} p_{l,0}\,;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_{0,k} = \rho^{l+k} p_{l,0}\,;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_{0,m} = \rho^{l+m} p_{l,0}\,;\\
&p_{l,0} = \{1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{l+m}\}^{-1}
\end{aligned} \tag{11.38.1}$$

ou en sommant la progression géométrique à raison ρ:

$$p_{l,0} = (1-\rho)/(1-\rho^{l+m+1}). \tag{11.38.2}$$

Les probabilités (11.38.1) forment une progression géométrique à premier terme $p_{l,0}$ et à raison ρ. Si $\rho > 1$, l'état le plus probable du système est $s_{0,m}$, aucune voiture, toutes les unités de la file de clients occupées; si $\rho < 1$, l'état le plus probable est $s_{l,0}$, aucun client, toutes les unités de la file des voitures occupées.

Pour $m \to \infty$, $l \to \infty$, les probabilités limites n'existent pas; pour $\rho > 1$, la file des clients, et pour $\rho < 1$, la file des voitures ont une tendance de croître à l'infini (cette tendance est réduite par le fait que dans une ville le nombre de clients, tout comme celui de voitures, ne peut pas être infini).

11.39*. Une cantine self-service possède une seule distribution qui livre les potages et les plats de résistance. Le flux de clients est un flux simple de densité λ; le temps nécessaire pour livrer un potage ou un plat de résistance, est aléatoire, sa répartition suit la loi exponentielle de même paramètre μ. Certains clients prennent le potage et le plat de résistance (leur part est q), d'autres se contentent du plat de résistance (leur part est $1 - q$). Trouver: 1) les conditions susceptibles d'assurer un régime permanent du travail de la cantine; 2) la longueur moyenne de la file et le temps moyen de la présence des clients dans la cantine, s'ils mettent en moyenne un temps τ pour manger un plat, et un temps 2τ pour les manger tous les deux.

Solution. Le temps nécessaire pour servir un client est une variable aléatoire T répartie avec une probabilité q d'après la loi d'Erlang d'ordre 2, la valeur moyenne du temps de service étant $\overline{t}_{ser} = 2/\mu$, et avec une probabilité $1 - q$ d'après la loi exponentielle de paramètre μ. Cherchons l'espérance mathématique de la variable aléatoire

T. A cet effet utilisons la formule de l'espérance mathématique totale (4.0.20) à deux hypothèses: H_1 = {le client prend seulement le plat de résistance}; H_2, {le client prend les deux plats}. Les probabilités de ces hypothèses sont $P(H_1) = 1 - q$; $P(H_2) = q$.

L'espérance mathématique totale de la variable aléatoire T est

$$M[T] = P(H_1) M[T \mid H_1] + P(H_2) M[T \mid H_2] = \\ = (1 - q)(1/\mu) + q(2/\mu) = (q + 1)/\mu,$$

donc la cantine peut assurer en moyenne le service de $\mu/(q + 1)$ clients par unité de temps; si $\lambda \geqslant \mu/(q + 1)$, le système est surchargé et les probabilités limites n'existent pas; si $\lambda < \mu/(q + 1)$, elles existent. Supposons que $\lambda < \mu/(q + 1)$.

Pour trouver la longueur moyenne $\bar{r}$ de la file, les temps moyens $\bar{t}_f$ d'attente de la demande dans la file et $\bar{t}_{sys}$, d'attente dans le système (dans la cantine) utilisons la formule de Pollaczek-Khintchine (11.0.31). A cet effet il faut connaître le coefficient de variation de la variable aléatoire T, qui est le temps de service. Cherchons d'abord le moment initial d'ordre deux de cette variable $M[T^2]$. D'après la formule de l'espérance mathématique totale (sous les mêmes hypothèses H_1 et H_2), on obtient

$$M[T^2] = (1 - q) M[T^2 \mid H_1] + qM[T^2 \mid H_2]. \qquad (11.39.1)$$

Sous l'hypothèse H_1 la variable aléatoire T est répartie d'après la loi exponentielle de paramètre μ:

$$M[T^2 \mid H_1] = D[T \mid H_1] + (M[T \mid H_1])^2 = \\ = 1/\mu^2 + (1/\mu)^2 = 2/\mu^2.$$

Calculons sous l'hypothèse H_2 d'après la formule qui suit le moment initial d'ordre deux de la variable T:

$$M[T^2 \mid H_2] = D[T \mid H_2] + (M[T \mid H_2])^2.$$

Mais $M[T \mid H_2] = 2/\mu$; $(M[T \mid H_2])^2 = 4/\mu^2$; la variance $D[T \mid H_2]$ est deux fois plus grande que $D[T \mid H_1]$ comme la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes T_1 et T_2 de même loi de répartition, c'est-à-dire $D[T \mid H_2] = 2/\mu^2$. Donc

$$M[T^2 \mid H_2] = 2/\mu^2 + 4/\mu^2 = 6/\mu^2,$$

on en tire d'après (11.39.1)

$$M[T^2] = (1 - q) 2/\mu^2 + q6/\mu^2 = 2(1 + 2q)/\mu^2.$$

La variance de la variable aléatoire T

$$D[T] = M[T^2] - (M[T])^2 = (1 + 2q - q^2)/\mu^2,$$

d'où le coefficient de variation de T:

$$v_\mu = \sqrt{1+2q-q^2}/(q+1).$$

En portant cette expression et $\rho = \lambda(q+1)/\mu$ dans la formule de Pollaczek-Khintchine (11.0.31), on obtient

$$\bar{r} = \frac{(\lambda^2/\mu^2)(q+1)^2\left[1+\frac{1+2q-q^2}{(q+1)^2}\right]}{2[1-(\lambda/\mu)(q+1)]} - \frac{(\lambda^2/\mu^2)(1+2q)}{1-(\lambda/\mu)(q+1)}.$$

Ensuite $\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda$; $\bar{t}_{sys} = \bar{t}_f + (q+1)/\mu + (q+1)\tau = \bar{t}_f + (q+1)(\tau + 1/\mu)$.

11.40. *Exemple d'un système d'attente simple à demandes refusées avec priorité.* Soit un système d'attente à deux canaux à demandes refusées, dans lequel arrivent deux flux de demandes simples: I de densité λ_1 et II de densité λ_2 (abrégeons en les appelant « demande I » et « demande II »). Les demandes I sont prioritaires devant les demandes II et voici en quoi cela consiste: si la demande I arrive à l'instant où tous les canaux sont occupés et au moins un d'entre eux assure le service d'une demande II, la demande I arrivée fait sortir cette dernière du service, et prend sa place et la demande II quitte le système sans être servie. Si la demande I arrive à l'instant où tous les canaux sont occupés par le service des demandes I, elle est refusée et quitte le système. Une demande II est refusée si elle se présente à l'instant où les deux canaux sont occupés par n'importe quelle demande.

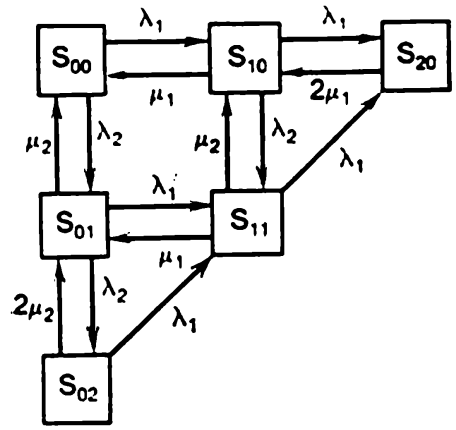


Fig. 11.40

Construire le graphe marqué des états du système en numérotant ces derniers par deux indices (i, j); le premier indique le nombre de demandes I dans le système, le deuxième, le nombre de demandes II. Ecrire les équations des probabilités limites des états et les résoudre pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Exprimer par p_{ij} $(i + j \leqslant 2)$ les caractéristiques suivantes de l'efficacité du système:

$P^{(1)}_{\text{réf}}$ $(P^{(2)}_{\text{réf}})$, la probabilité du refus à l'instant de l'arrivée de la demande I (II);

A_1 (A_2), le nombre moyen de demandes I (II) servies par le système par unité de temps;

$\bar{k}_1$ $(\bar{k}_2)$, le nombre moyen de canaux occupés par le service des demandes I (II);

P_{ref}, A, $\bar{k}$, les mêmes caractéristiques pour le système dans son ensemble sans rapport à la catégorie des demandes.

Solution. Les états du système: s_{00}, aucune demande dans le système; s_{10}, une demande I et aucune demande II; s_{01} aucune demande I et une demande II; s_{20}, deux demandes I et aucune demande II; s_{11}, une demande I et une demande II; s_{02}, aucune demande I et deux demandes II. Le graphe marqué des états du système est représenté sur la figure 11.40.

Les équations des probabilités limites des états;

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01};$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{10} = \lambda_1 p_{00} + 2\mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11};$$
$$2\mu_1 p_{20} = \lambda_1 p_{10} + \lambda_1 p_{11};$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\, p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_1 p_{11} + 2\mu_2 p_{02};$$
$$(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)\, p_{11} = \lambda_2 p_{10} + \lambda_1 p_{01} + \lambda_1 p_{02};$$
$$(\lambda_1 + 2\mu_2)\, p_{02} = \lambda_2 p_{01};$$
$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{01} + p_{11} + p_{02} = 1.$$

En les résolvant pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, on obtient

$$p_{00} = 0{,}20; \quad p_{10} = 0{,}25; \quad p_{20} = 0{,}20; \quad p_{01} = 0{,}15;$$
$$p_{11} = 0{,}15; \quad p_{02} = 0{,}05;$$
$$P_{ref}^{(1)} = p_{20} = 0{,}2; \quad P_{ref}^{(2)} = p_{20} + p_{11} + p_{02} = 0{,}40;$$
$$A_1 = \lambda_1 (1 - P_{ref}^{(1)}) = 0{,}8.$$

La quantité A_2 se calcule en tenant compte que certaines demandes II admises au service sont supplantées par les demandes I et quittent le système sans être servies. Le nombre moyen de telles demandes par unité de temps est égal à $\lambda_{11}(p_{11} + p_{02})$; donc

$$A_2 = \lambda_2 [1 - (p_{20} + p_{11} + p_{02})] - \lambda_1 (p_{11} + p_{02}) = 0{,}4;$$
$$\bar{k}_1 = A_1/\mu_1, \quad \bar{k}_2 = A_2/\mu_2.$$

La probabilité P_{ref} pour qu'une demande arrivée dans le système et choisie arbitrairement reçoive un refus, se trouve d'après la formule de probabilités totales à hypothèses: H_1 = {arrivée de la demande I}; H_2 = {arrivée de la demande II}. Les probabilités de ces hypothèses

$$\mathrm{P}(H_1) = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2); \quad \mathrm{P}(H_2) = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Par conséquent,

$$P_{ref} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{ref}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{ref}^{(2)} = 0{,}3.$$

Notons que pour les demandes I toutes les caractéristiques pourraient s'obtenir en négligeant totalement les demandes II et en considérant le problème comme si dans le système d'attente à deux canaux à demandes refusées arrivaient seulement les demandes I. Proposons au lecteur de le vérifier lui-même en calculant toutes les caractéristiques d'un tel système dans lequel arrive seulement un flux de demandes I.

11.41. L'énoncé du problème précédent est modifié de façon que le nombre de canaux du système à demandes refusées est $n = 3$.

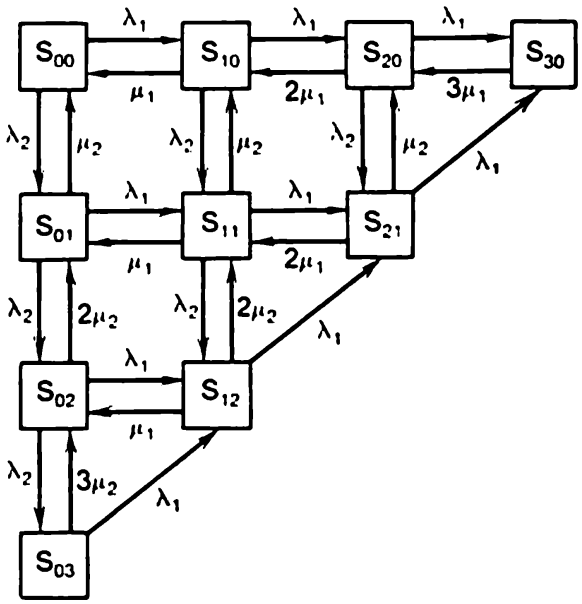


Fig. 11.41

Construire le graphe des états du système. Ecrire les équations des probabilités limites p_{ij} $(i + j \leqslant 3)$, où i est le nombre de demandes I, j, le nombre de demandes II, présentes dans le système. En considérant ces équations comme déjà résolues, exprimer par l'intermédiaire de p_{ij} les mêmes caractéristiques de l'efficacité que dans le problème précédent.

Solution. Le graphe des états est représenté sur la figure 11.41. Les équations des probabilités finales des états :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{10} = \lambda_1 p_{00} + 2\mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1)\, p_{20} = \lambda_1 p_{10} + 3\mu_1 p_{30} + \mu_2 p_{21};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\, p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_2 p_{11} + 2\mu_2 p_{02};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\, p_{11} = \lambda_1 p_{01} + \lambda_2 p_{10} + 2\mu_1 p_{21} + 2\mu_2 p_{12};$$

$$(\lambda_1 + \mu_2 + 2\mu_1)\, p_{21} = \lambda_1 (p_{11} + p_{12}) + \lambda_2 p_{20};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_2)\, p_{02} = \lambda_2 p_{01} + \mu_1 p_{12} + 3\mu_2 p_{03};$$
$$(\lambda_1 + \mu_1 + 2\mu_2)\, p_{12} = \lambda_1 (p_{02} + p_{03}) + \lambda_2 p_{11};$$
$$(\lambda_1 + 3\mu_2)\, p_{03} = \lambda_2 p_{02};$$
$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{01} + p_{11} + p_{21} + p_{02} + p_{12} + p_{03} = 1;$$
$$P_{\text{réf}}^{(1)} = p_{30}; \quad P_{\text{réf}}^{(2)} = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03};$$
$$A_1 = \lambda_1 (1 - p_{30}); \quad A_2 = \lambda_2 [1 - (p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03})] - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{03});$$
$$\bar{k}_1 = A_1/\mu_1; \quad \bar{k}_2 = A_2/\mu_2; \quad \bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2;$$
$$P_{\text{réf}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{\text{réf}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{\text{réf}}^{(2)}.$$

11.42. *Exemple d'un système d'attente à file avec priorité absolue.* Soit un système à un canal et deux unités dans la file ($m = 2$). A l'entrée du système arrivent deux flux simples de demandes I et II de densités λ_1, λ_2. Le temps de service est réparti d'après la loi exponentielle de paramètres μ_1, μ_2. La demande I arrivée dans le système fait sortir la demande II si elle est en cours de service et prend une place devant elle, si elle se tient dans la file. La demande II supplantée quitte le système sans être servie, si dans la file il n'y a plus de disponibilités, ou prend une place dans la file si les disponibilités existent. En numérotant les états du système par deux indices i, j conformément au nombre de demandes I et II présentes dans le système, construire le graphe marqué des états et écrire les équations de leurs probabilités limites. En considérant que ces équations sont déjà résolues, exprimer à l'aide de p_{ij} ($i + j \leqslant 3$) les caractéristiques suivantes de l'efficacité du système:

$P_{\text{réf}}^{(1)}$, ($P_{\text{réf}}^{(2)}$), la probabilité pour que la demande I (II) soit refusée dès l'arrivée;

Q_1 (Q_2), la probabilité pour que la demande I (II) soit servie;

$\bar{z}_1$ ($\bar{z}_2$), le nombre moyen de demandes I (II) associées au système;

$\bar{r}_1$ ($\bar{r}_2$), le nombre moyen de demandes I (II) présentes dans la file;

$\bar{t}_{\text{sys}}^{(1)}$ ($\bar{t}_{\text{sys}}^{(2)}$), le temps moyen de la présence de la demande I (II) dans le système;

$\bar{t}_{\text{f}}^{(1)}$ ($\bar{t}_{\text{f}}^{(2)}$), le temps moyen de la présence de la demande I (II) dans la file;

$\bar{t}_{\text{sys}}$, le temps moyen de la présence d'une demande quelconque dans le système;

$\bar{t}_{\text{f}}$, le temps moyen de la présence d'une demande quelconque dans la file.

Solution. L'état du système : s_{ij}, la présence dans le système de i demandes I et de j demandes II ($i + j \leqslant 3$). Le graphe des états marqué est donné par la figure 11.42.

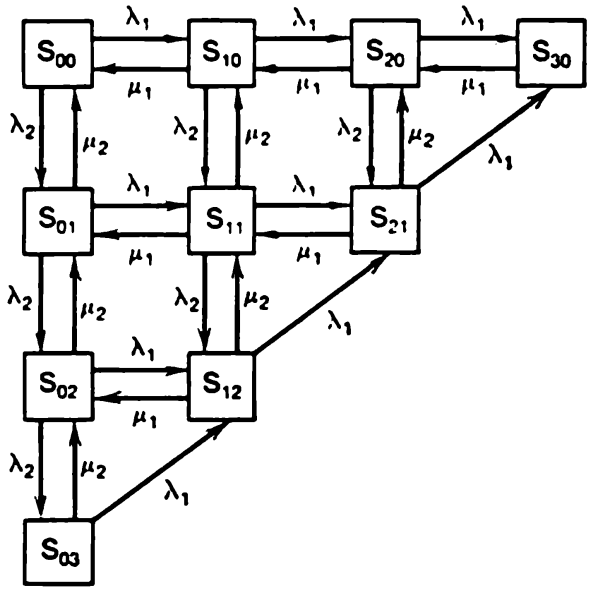


Fig. 11.42

Les équations des probabilités limites des états :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{10} = \lambda_1 p_{00} + \mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{20} = \lambda_1 p_{10} + \mu_1 p_{30} + \mu_2 p_{21};$$

$$\mu_1 p_{30} = \lambda_1 (p_{20} + p_{21}); \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\, p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_{02};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\, p_{11} = \lambda_2 p_{10} + \lambda_1 p_{01} + \mu_1 p_{21} + \mu_2 p_{12};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\, p_{02} = \lambda_2 p_{01} + \mu_1 p_{12} + \mu_2 p_{03};$$

$$(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)\, p_{12} = \lambda_1 p_{02} + \lambda_2 p_{11} + \lambda_1 p_{03};$$

$$(\lambda_1 + \mu_2)\, p_{03} = \lambda_2 p_{02};$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{01} + p_{11} + p_{21} + p_{02} + p_{12} + p_{03} = 1;$$

$$P_{\text{réf}}^{(1)} = p_{30}; \quad P_{\text{réf}}^{(2)} = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03}; \quad Q_1 = 1 - P_{\text{réf}}^{(1)} = 1 - p_{30}.$$

Pour trouver Q_2 calculons d'abord A_2, le nombre moyen de demandes II servies par unité de temps :

$$A_2 = \lambda_2 (1 - P_{\text{réf}}^{(2)}) - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{21}) =$$
$$= \lambda_2 [1 - (p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03})] - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{21}).$$

En divisant cette expression par λ_2 calculons la part moyenne des demandes II servies (la probabilité pour que la demande II soit servie): $Q_2 = A_2/\lambda_2$. Alors

$$\bar{z}_1 = 1\cdot(p_{10} + p_{11} + p_{12}) + 2\,(p_{20} + p_{21}) + 3p_{30};$$
$$\bar{z}_2 = 1\cdot(p_{01} + p_{11} + p_{21}) + 2\,(p_{02} + p_{12}) + 3p_{03};$$
$$\bar{r}_1 = 1\cdot(p_{20} + p_{21}) + 2p_{30};$$
$$\bar{r}_2 = 1\cdot(p_{11} + p_{21}) + 2p_{12}.$$

D'après les formules de Little:

$$\bar{t}_{\text{sys}}^{(1)} = \bar{z}_1/\lambda_1\,; \quad \bar{t}_{\text{sys}}^{(2)} = \bar{z}_2/\lambda_2\,; \quad \bar{t}_{\text{f}}^{(1)} = \bar{r}_1/\lambda_1\,; \quad \bar{t}_{\text{f}}^{(2)} = \bar{r}_2/\lambda_2\,;$$
$$\bar{t}_{\text{sys}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,\bar{t}_{\text{sys}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,\bar{t}_{\text{sys}}^{(2)}\,;$$
$$\bar{t}_{\text{f}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,\bar{t}_{\text{f}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,\bar{t}_{\text{f}}^{(2)}.$$

Toutes les caractéristiques qui se rapportent aux demandes I peuvent se calculer également sans résoudre les équations (11.42), en négligeant simplement la présence des demandes II, en considérant le système d'attente avec un nombre limité d'unités dans la file ($m = 2$) et cherchant ses caractéristiques d'après les formules du point 3 de la section 11.0.

11.43. *Système d'attente simple sans file avec « préparation » des canaux.* A l'entrée d'un système d'attente à n canaux arrive un flux de demandes simple de densité λ. Le temps de service obéit à la loi exponentielle de paramètre μ. Avant de commencer le service de la demande le canal doit être préparé. Le temps de « préparation » T_{ch} est réparti d'après la loi exponentielle de paramètre ν et ne dépend pas du temps depuis lequel le canal chôme. La demande qui a trouvé le canal disponible l'occupe et attend qu'il se chauffe, après quoi elle se présente au service. La demande qui a trouvé tous les canaux occupés par les demandes servies ou attendant le service, quitte le système et reste non servie. Trouver les probabilités limites du système et les caractéristiques de son efficacité: la probabilité du refus P_{ref}, le débit relatif Q, le débit absolu A, le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$.

Solution. Admettons qu'une demande est servie en deux phases: attente de la « préparation » et service lui-même: $\tilde{T}_{\text{ser}} = T_{\text{ch}} + T_{\text{ser}}$. La variable aléatoire $\tilde{T}_{\text{ser}}$ est répartie d'après la loi d'Erlang généralisée d'ordre 2 (voir problème 8.39) de paramètres μ, ν. Nous savons que les formules d'Erlang (11.0.6) sont valides non seule-

ment pour une loi exponentielle, mais pour n'importe quelle répartition de temps de service. Cherchons la grandeur $\tilde{\mu} = 1/\mathrm{M}\,[\tilde{T}_{\mathrm{ser}}]$. Soit

$$\mathrm{M}\,[\tilde{T}_{\mathrm{ser}}] = \mathrm{M}\,[T_{\mathrm{ch}}] + \mathrm{M}\,[T_{\mathrm{ser}}] = 1/\mu + 1/\nu = (\mu+\nu)/(\mu\nu),$$

d'où $\tilde{\mu} = (\mu\nu)/(\mu + \nu)$. Après avoir calculé $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu}$ et en portant cette valeur de $\tilde{\rho}$ dans les formules d'Erlang (11.0.6), on obtient

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\tilde{\rho}}{1\,!} + \cdots + \frac{\tilde{\rho}^k}{k\,!} + \cdots + \frac{\tilde{\rho}^n}{n\,!}\right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\tilde{\rho}^k}{k\,!}\,p_0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n);$$

$$P_{\mathrm{ref}} = p_n = \frac{\tilde{\rho}^n}{n\,!}\,p_0; \quad Q = 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n\,!}\,p_0; \quad A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n\,!}\,p_0\right).$$

Pour trouver le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$ il faut diviser A par $\tilde{\mu}$:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n\,!}\right)p_0 = \tilde{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n\,!}\right)p_0.$$

11.44. *Système d'attente simple à un canal à file avec « préparation » du canal.* Dans un système d'attente à un canal à file illimitée arrive un flux de demandes simple de densité λ. Le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > \lambda$). Avant de procéder au service, le canal, disponible jusqu'à cet instant, doit être préparé. Le temps de « préparation » suit la loi exponentielle de paramètre ν et ne dépend pas du temps depuis lequel le canal a cessé le service. Si le service commence dès la fin du service de la demande précédente, la « préparation » est inutile. Composer le graphe des états et écrire les équations de leurs probabilités limites; exprimer à l'aide de ces probabilités les caractéristiques de l'efficacité du système: les nombres moyens des demandes dans le système $\bar{z}$ et dans la file $\bar{r}$, les temps moyens de la présence de la demande dans le système $\bar{t}_{\mathrm{sys}}$ et dans la file $\bar{t}_f$.

Solution. Les états du système (fig. 11.44):

s_{00}, le canal est disponible, non préparé;

s_{01}, une demande arrivée attend que le canal soit préparé;

s_{11}, le canal est préparé, une demande est servie, pas de file;

s_{02}, le canal est préparé, deux demandes dans la file;

. . . . . .

s_{0l}, le canal est préparé, l demandes dans la file;

s_{1l}, une demande servie par le canal, $l - 1$ demandes dans la file;

. . . . . .

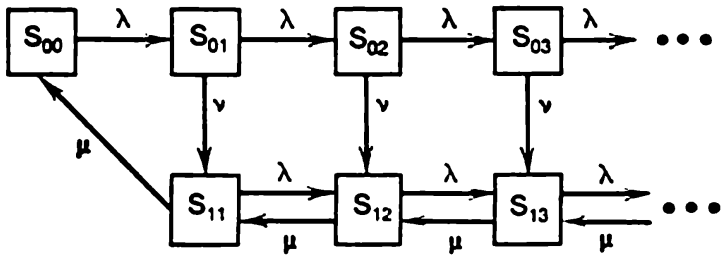


Fig. 11.44

Les équations des probabilités limites:

$$\lambda p_{00} = \mu p_{11}; \quad (\lambda + \nu)\, p_{01} = \lambda p_{00};$$

$$(\lambda + \mu) p_{11} = \nu p_{01} + \mu p_{12};$$

$$(\lambda + \nu)\, p_{02} = \lambda p_{01}; \quad (\lambda + \mu)\, p_{12} = \nu p_{02} + \lambda p_{11} + \mu p_{13};$$

. . . . . .

$$(\lambda + \nu)\, p_{0,l} = \lambda p_{0,l-1};$$

$$(\lambda + \mu)\, p_{1,l} = \nu p_{0,l} + \lambda p_{1,l-1} + \mu p_{1,l+1};$$

. . . . . .

$$\bar{z} = \sum_{l=0}^{\infty} l\,(p_{0,l} + p_{1,l}); \quad \bar{r} = \sum_{l=1}^{\infty} l\,(p_{0,l} + p_{1,l+1}).$$

D'après la formule de Little $\bar{t}_{sys} = \bar{z}/\lambda$; $\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda$.

11.45*. Soit un système d'attente à un canal à file à nombre d'unités limité $m = 2$. A l'entrée du système arrive un flux de demandes simple de densité λ. Le temps de service est réparti d'après la loi d'Erlang généralisée de paramètres μ_1, μ_2 (voir problème 8.39). Trouver les probabilités des états du système:

s_0, aucune demande dans le système;

s_1, une demande dans le système, pas de file;

s_2, deux demandes dans le système (une est servie, l'autre attend son tour);

s_3, trois demandes dans le système (une est servie, deux attendent leur tour).

1) Trouver les caractéristiques de l'efficacité du système: P_{ref}, Q, A, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_f$. Calculer-les pour les valeurs $\lambda = 2$; $\mu_1 = 6$; $\mu_2 = 12{,}2$.

2) Comparer-les avec celles qu'on obtiendrait pour un système simple avec la même valeur de λ et la valeur de μ égale à $1/\bar{t}_{ser}$, où $\bar{t}_{ser}$ est le temps moyen de service de la demande dans le système donné.

Solution. Le flux de service n'est pas poissonien, donc le système n'est pas markovien, et il est impossible de trouver les probabilités des états d'après la méthodologie usuelle employée pour les processus de Markov à états discrets et temps continu. Pourtant, le processus qui se déroule dans le système peut être ramené artificiellement au processus de Markov, en appliquant ce qu'on appelle la «méthode des phases».

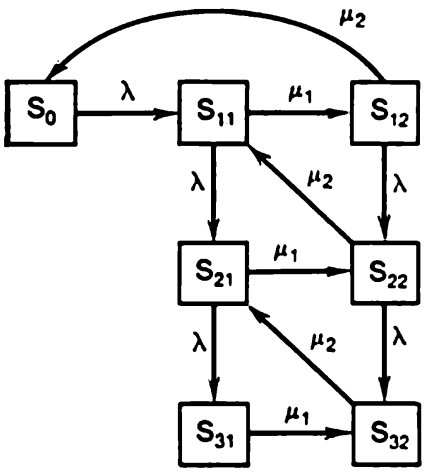


Fig. 11.45

Imaginons que le service se compose de deux phases (I et II) de durées respectives T_1 et T_2; le temps de service total $T_{ser} = T_1 + T_2$, où T_1 est réparti d'après la loi exponentielle de paramètre μ_1, T_2, d'après la loi exponentielle de paramètre μ_2. Alors, T_{ser} est réparti d'après la loi d'Erlang généralisée de paramètres μ_1 et μ_2 (voir problème 8.39).

Introduisons les états suivants du système:

s_0, le système est libre;

s_{11}, une demande dans le système, service d'après la première phase;

s_{12}, une demande dans le système, service d'après la deuxième phase;

s_{21}, deux demandes dans le système: une servie, l'autre dans la file; service d'après la première phase;

s_{22}, deux demandes dans le système, service d'après la deuxième phase;

s_{31}, trois demandes dans le système; service d'après la première phase;

s_{32}, trois demandes dans le système; service d'après la deuxième phase.

Les états ultérieurs n'existent pas du fait que (par condition $m = 2$) le système ne peut admettre plus de trois demandes. Le graphe des états marqué est représenté sur la figure 11.45. Avec une telle approche nous partitionnons l'état s_1 en deux: s_{11} et s_{12} (ou en abrégeant $s_1 = s_{11} + s_{12}$); d'une façon analogue, $s_2 = s_{21} + s_{22}$; $s_3 = s_{31} + s_{32}$. Les équations des probabilités limites qui correspondent au graphe de la figure 11.45 sont

$$\lambda p_0 = \mu_2 p_{12}; \quad (\lambda + \mu_1)\, p_{11} = \lambda p_0 + \mu_2 p_{22};$$
$$(\lambda + \mu_2)\, p_{12} = \mu_1 p_{11}; \quad (\lambda + \mu_1)\, p_{21} = \mu_2 p_{32} + \lambda p_{11};$$
$$(\lambda + \mu_2)\, p_{22} = \mu_1 p_{21} + \lambda p_{12};$$
$$\mu_1 p_{31} = \lambda p_{21}; \quad \mu_2 p_{32} = \mu_1 p_{31} + \lambda p_{22}.$$

La condition de normalisation: $p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$.

En résolvant ces équations, on obtient

$$p_0 = \left\{1 + \frac{(\lambda+\mu_2)\lambda}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2)+\lambda^2\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^2} + \right.$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2^2} + \frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2)+\lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^3} +$$
$$\left. + \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2^3} + \frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2)+\lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^3\mu_2^2}\right\}^{-1};$$
$$p_{11} = \frac{(\lambda+\mu_2)\lambda}{\mu_1\mu_2}\, p_0; \quad p_{12} = \frac{\lambda}{\mu_2}\, p_0; \quad p_{21} = \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2)+\lambda^2\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^2}\, p_0;$$
$$p_{22} = \frac{\lambda^2(\mu_1+\mu_2+\lambda)}{\mu_1\mu_2^2}\, p_0; \quad p_{31} = \frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2)+\lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^3\mu_2^2}\, p_0;$$
$$p_{32} = \left[\frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2)+\lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^3\mu_2^3} + \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2^3}\right] p_0. \qquad (11.45.1)$$

Ensuite on trouve les probabilités limites des états s_1, s_2, s_3:

$$p_1 = p_{11} + p_{12} = \frac{\lambda}{\mu_1\mu_2}(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\, p_0;$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} = \frac{\lambda^2}{\mu_1^2\mu_2^2}[(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \mu_2(\lambda+\mu_2)]\, p_0;$$
$$p_3 = p_{31} + p_{32} =$$
$$= \frac{\lambda^3}{\mu_1^3\mu_2^3}[(\lambda\mu_2 + \lambda\mu_1 + \mu_1^2)(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \mu_2(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_2)]\, p_0, \qquad (11.45.2)$$

où p_0 est déterminée par la première des formules (11.45.1).

Les caractéristiques de l'efficacité du système peuvent être trouvées à l'aide des probabilités p_0, p_1, p_2, p_3 d'après les formules:

$$P_{\text{réf}} = p_3; \quad Q = 1 - p_3; \quad A = \lambda(1 - p_3);$$
$$\bar{z} = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3; \quad \bar{r} = 1p_2 + 2p_3;$$
$$\bar{t}_{\text{sys}} = \bar{z}/\lambda; \quad t_f = \bar{r}/\lambda. \qquad (11.45.3)$$

En portant dans les formules (11.45.1) les valeurs numériques $\lambda = 2$; $\mu_1 = 6$; $\mu_2 = 12$, on obtient $p_0 = 0{,}540$; $p_{11} = 0{,}182$;

$p_{12} = 0{,}090$; $p_{21} = 0{,}087$; $p_{22} = 0{,}050$; $p_{31} = 0{,}029$; $p_{32} = 0{,}022$. En revenant au système initial (non markovien), on obtient: $p_0 = 0{,}540$; $p_1 = 0{,}272$; $p_2 = 0{,}137$; $p_3 = 0{,}051$.

Ensuite, d'après les formules (11.45.3) $P_{\text{réf}} = 0{,}051$; $Q = 0{,}949$; $A = 1{,}89$; $\bar{z} = 0{,}705$; $\bar{r} = 0{,}243$; $\bar{t}_{\text{sys}} = 0{,}352$; $\bar{t}_f = 0{,}122$.

2) Calculons les mêmes caractéristiques pour un système simple avec les mêmes $\lambda = 2$; $\mu = (1/\mu_1 + 1/\mu_2)^{-1} = 4$. D'après les formules (11.0.12) à (11.0.15), on a: $\rho = 0{,}5$; $p_0 \approx 0{,}533$; $\bar{k} = 1 - p_0 \approx 0{,}467$; $p_1 = \rho p_0 \approx 0{,}267$; $p_2 = \rho^2 p_0 \approx 0{,}133$; $p_3 = \rho^3 p_0 \approx 0{,}067$; $P_{\text{réf}} = p_3 \approx 0{,}067$; $Q = 1 - p_3 \approx 0{,}933$; $A \approx 1{,}866$; $\bar{z} \approx 0{,}733$; $\bar{r} = 0{,}267$; $\bar{t}_{\text{sys}} \approx 0{,}367$; $\bar{t}_f \approx 0{,}133$.

On voit que notre système non markovien présente par rapport à un système simple un certain avantage quant à son débit et s'en distingue très peu (dans un meilleur sens) suivant la durée de la présence de la demande dans le système et la longueur de la file.

11.46*. Soit un système à un canal à file à deux unités. Sur son entrée arrive un flux de Palma de demandes séparées par un intervalle T réparti d'après la loi d'Erlang généralisée de paramètres λ_1, λ_2; le temps de service est régi par une loi exponentielle de paramètre μ. 1) En appliquant la méthode des phases écrire les équations des probabilités limites des états p_0, p_1, p_2, p_3. Exprimer à l'aide de ces probabilités les caractéristiques du système $P_{\text{réf}}$, Q, A, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{sys}}$, $\bar{t}_f$. 2) Calculer les probabilités limites et les caractéristiques de l'efficacité pour les données de départ suivantes: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 6$; $\mu = 4$, et les comparer avec celles qui correspondent au système simple de paramètres $\lambda = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)^{-1} = 2$; $\mu = 4$, examiné dans le problème 11.45.

Solution. 1) Si l'on envisage, comme nous le faisons d'habitude, les états du système en les numérotant suivant le nombre de demandes dans le système: s_0, s_1, s_2, s_3, alors le système n'est pas markovien. Pour le rendre markovien divisons en deux phases (I et II) non pas le temps de service, mais l'intervalle T entre les demandes: $T = T_1 + T_2$, où les variables aléatoires T_1 et T_2 sont réparties d'après la loi exponentielle de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.

Les états du système sont numérotés d'après le nombre de demandes dans le système et le numéro de la phase entre les demandes:

s_{01}, aucune demande dans le système; l'intervalle entre les demandes dans la première phase;

s_{02}, aucune demande dans le système; l'intervalle entre les demandes dans la deuxième phase;

s_{11}, une demande dans le système (subit le service); l'intervalle entre les demandes dans la première phase;

s_{12}, une demande dans le système (subit le service); l'intervalle entre les demandes dans la deuxième phase;

s_{21}, deux demandes dans le système (une subit le service, l'autre attend son tour); l'intervalle entre les demandes dans la première phase;

s_{22}, deux demandes dans le système (une subit le service, l'autre attend son tour); l'intervalle entre les demandes dans la deuxième phase;

s_{31}, trois demandes dans le système (une subit le service, deux attendent leur tour); l'intervalle entre les demandes dans la première phase;

s_{32}, trois demandes dans le système (une subit le service, deux attendent leur tour); l'intervalle entre les demandes dans la deuxième phase.

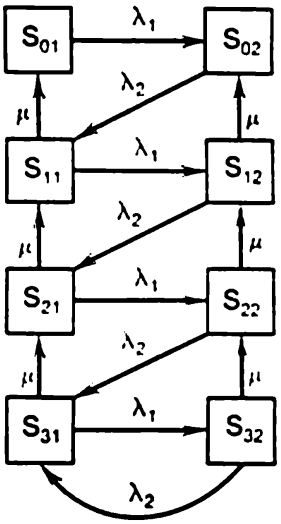


Fig. 11.46

Le graphe des états est représenté sur la figure 11.46.

Les équations des probabilités limites:

$$\lambda_1 p_{01} = \mu p_{11};\ \lambda_2 p_{02} = \lambda_1 p_{01} + \mu p_{12};\ (\lambda_1 + \mu)\, p_{11} = \lambda_2 p_{02} + \mu p_{21};$$
$$(\lambda_2 + \mu)\, p_{12} = \lambda_1 p_{11} + \mu p_{22};\quad (\lambda_1 + \mu)\, p_{21} = \lambda_2 p_{12} + \mu p_{31};$$
$$(\lambda_2 + \mu)\, p_{22} = \lambda_1 p_{21} + \mu p_{32};\quad (\lambda_1 + \mu)\, p_{31} = \lambda_2 p_{22} + \lambda_2 p_{32};$$
$$(\lambda_2 + \mu)\, p_{32} = \lambda_1 p_{31}.$$

La condition de normalisation: $p_{01} + p_{02} + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$.

Il est plus commode de résoudre ces équations en exprimant les probabilités p_{ij} à l'aide de la dernière probabilité p_{32}. Les expressions des probabilités p_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) sont de la forme

$$p_{32} = \left\{1 + \frac{\mu+\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\mu(\mu+\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{\mu(\mu^2+\lambda_1\mu+2\lambda_2\mu+\lambda_2^2)}{\lambda_1^2\lambda_2} + \right.$$
$$+ \frac{\mu^2(\mu^2+2\lambda_1\mu+2\lambda_2\mu+\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} +$$
$$+ \frac{\mu^2(\mu^3+2\lambda_1\mu^2+3\lambda_2\mu^2+\lambda_1^2\mu+2\lambda_1\lambda_2\mu+3\lambda_2^2\mu+\lambda_2^3)}{\lambda_1^3\lambda_2^2} +$$
$$+ \frac{\mu^3(\mu^3+3\lambda_1\mu^2+3\lambda_2\mu^2+3\lambda_1^2\mu+4\lambda_1\lambda_2\mu+3\lambda_2^2\mu+\lambda_1^3+\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_2^3)}{\lambda_1^3\lambda_2^3} +$$
$$\left. + \frac{\mu^3(\mu^3+2\lambda_1\mu^2+3\lambda_2\mu^2+\lambda_1^2\mu+2\lambda_1\lambda_2\mu+3\lambda_2^2\mu+\lambda_2^3)}{\lambda_1^4\lambda_2^2}\right\}^{-1};$$

$$p_{31} = \frac{\mu+\lambda_2}{\lambda_1}\, p_{32};\quad p_{22} = \frac{\mu(\mu+\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\, p_{32};$$

$$p_{21} = \frac{\mu(\mu^2 + \lambda_1\mu + 2\lambda_2\mu + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2\lambda_2} p_{32};$$

$$p_{12} = \frac{\mu^2(\mu^2 + 2\lambda_1\mu + 2\lambda_2\mu + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{11} = \frac{\mu^2(\mu^3 + 2\lambda_1\mu^2 + 3\lambda_2\mu^2 + \lambda_1^2\mu + 2\lambda_1\lambda_2\mu + 3\lambda_2^2\mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3\lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{02} = \frac{\mu^3(\mu^3 + 3\lambda_1\mu^2 + 3\lambda_2\mu^2 + \lambda_1^2\mu + 4\lambda_1\lambda_2\mu + 3\lambda_2^2\mu + \lambda_1^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2^3}{\lambda_1^3\lambda_2^3} p_{32};$$

$$p_{01} = \frac{\mu^3(\mu^3 + 2\lambda_1\mu^2 + 3\lambda_2\mu^2 + \lambda_1^2\mu + 2\lambda_1\lambda_2\mu + 3\lambda_2^2\mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^4\lambda_2^2} p_{32}.$$

En revenant au système initial (non markovien), on obtient $p_0 = p_{01} + p_{02}$; $p_1 = p_{11} + p_{12}$; $p_2 = p_{21} + p_{22}$; $p_3 = p_{31} + p_{32}$.

Ensuite $P_{ref} = p_3$; $Q = 1 - p_3$; $A = Q\lambda$; $\bar{z} = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3$; $\bar{r} = 1p_2 + 2p_3$; $\bar{t}_{sys} = \bar{z}/\lambda$; $\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda$.

Les probabilités limites des états $p_{01} \approx 0{,}308$; $p_{02} \approx 0{,}208$; $p_{11} \approx 0{,}231$; $p_{12} \approx 0{,}082$; $p_{21} \approx 0{,}091$; $p_{22} \approx 0{,}032$; $p_{31} \approx 0{,}037$; $p_{32} \approx 0{,}011$.

Pour le système initial (non markovien): $p_0 \approx 0{,}616$; $p_1 \approx 0{,}313$; $p_2 \approx 0{,}123$; $p_3 \approx 0{,}048$; $P_{ref} \approx 0{,}048$; $Q \approx 0{,}952$; $A \approx 1{,}904$; $\bar{z} \approx 0{,}703$; $\bar{r} \approx 0{,}219$; $\bar{t}_{sys} \approx 0{,}352$; $\bar{t}_f \approx 0{,}110$.

La comparaison de ces valeurs avec les résultats du problème 11.45 permet de conclure que le système du problème 11.46 présente un certain avantage suivant toutes les caractéristiques de l'efficacité et un avantage plus grand par rapport au système simple de mêmes λ, μ.

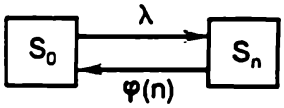


Fig. 11.47

11.47. *Système d'attente simple sans file avec entraide illimitée entre les canaux.* Un flux simple de densité λ arrive dans un système d'attente à n canaux à demandes refusées. Les canaux travaillent avec « entraide »: si à l'instant où la demande courante se présente dans un canal le système comporte des canaux disponibles, ils s'engagent tous au service de la demande donnée. La densité du flux de service simple de la demande est une certaine fonction $\mu = \varphi(k)$ du nombre k de canaux qui la desservent simultanément. Construire le graphe des états du système et trouver les probabilités limites des états. Exprimer par l'intermédiaire de ces probabilités les caractéristiques de l'efficacité du système: la probabilité du refus P_{ref}, le débit relatif Q; le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k}$. Calculer ces caractéristiques pour $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu(k) = k\mu$, $\mu = 0{,}5$, et les comparer aux mêmes caractéristiques du système en l'absence de l'entraide entre les canaux.

Solution. Puisque dès l'instant d'arrivée de la première demande tous les n canaux s'engagent à la servir, cela signifie qu'ils travaillent

toujours tous comme un seul. Le système se transforme en un système à un canal à demandes refusées; ses états: s_0, tous les canaux disponibles; s_n, tous les n canaux occupés. Le graphe des états marqué est représenté sur la figure 11.47. On utilise ce graphe pour obtenir les probabilités limites des états

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda}{\varphi(n)}\right\}^{-1} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n)+\lambda}; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\varphi(n)} p_0 = \frac{\lambda}{\varphi(n)+\lambda}.$$

Pour $\varphi(n) = n\mu$ on a $p_0 = (n\mu)/(n\mu + \lambda)$; $p_1 = \lambda/(n\mu + \lambda)$.

Pour $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 0{,}5$, on a $p_0 = 2/3$, $p_1 = 1/3$, $P_{\text{réf}} = p_1 = 1/3$, $Q = 1 - p_1 = 2/3$; $A = \lambda Q = 2/3 \approx 0{,}667$.

Le nombre moyen de canaux occupés $\bar{k} = 4 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3 = 4/3 \approx 1{,}333$. Ce même résultat s'obtient en divisant A par μ: $\bar{k} = (2/3)/0{,}5 = 4/3$.

Pour comparer calculons les mêmes caractéristiques de l'efficacité d'un système à quatre canaux sans entraide [voir formules d'Erlang (11.0.6) et la formule qui en découle (11.0.7)]; pour $\rho = \lambda/\mu = 2$

$$p_0 = \{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6 + \rho^4/24\}^{-1} = 1/7;$$

$$P_{\text{réf}} = p_4 = (2/3)(1/7) = 2/21; \quad A = \lambda(1 - 2/21) \approx 0{,}905;$$

$$Q = A; \quad \bar{k} = A/\mu \approx 1{,}81.$$

En comparant ces caractéristiques avec celles obtenues précédemment pour les systèmes à canaux avec entraide, on tire la conclusion que dans ces conditions l'entraide ne présente pas d'avantage. C'est ce qui se produit en fait: pour un système à demandes refusées une entraide illimitée (lorsque tous les canaux se « précipitent » à servir une demande, alors que les demandes qui se présentent ensuite sont refusées) est toujours désavantageuse.

11.48. *Système d'attente simple sans file à entraide régulière entre les canaux.* Soit un système d'attente simple à n canaux à demandes refusées dans lequel arrive un flux de demandes de densité λ. Les canaux font preuve d'entraide, mais non pas par leur réunion en un seul, comme dans le problème précédent, mais en la « régularisant » de la façon suivante. Si la demande arrive à l'instant où tous les n canaux sont disponibles, tous les canaux se mettent à assurer son service; si pendant son service arrive encore une demande, une partie des canaux passent au service de cette dernière; si pendant le service de ces deux demandes arrive encore une, une partie des canaux se mettent à assurer son service à elle, etc., tant que ne soient occupés tous les n canaux; s'ils sont tous occupés, une demande nouvellement arrivée est refusée. La fonction $\varphi(k) = k\mu$, c'est-à-dire que le service assuré par k canaux est k fois plus rapide que le service réalisé par un canal.

Composer le graphe marqué des états du système, déterminer les probabilités limites des états et les caractéristiques de l'efficacité

Q, A, $\bar{k}$. Calculer-les pour $n = 4$; $\lambda = 1$; $\mu = 0{,}5$, c'est-à-dire pour les conditions du problème 11.47, et comparer ces résultats avec ce qu'on obtient sans entraide *).

Solution. Les états du système sont numérotés d'après le nombre de demandes présentes dans le système. Le graphe des états est représenté sur la figure 11.48. Ce graphe est le même que pour un sys-

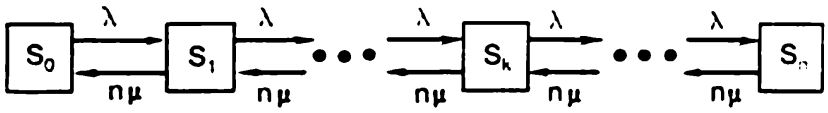


Fig. 11.48

tème simple à un canal, à productivité $\mu^* = n\mu$ et à file limitée à $n - 1$ unités. Pour déterminer ses caractéristiques on peut utiliser les formules (11.0.16) à (11.0.19); en posant $\rho = \rho^* = \lambda/\mu^* = \lambda/(n\mu) = 0{,}5$, on a pour $m = 3$:

$$p_0 = \frac{1-\rho^*}{1-(\rho^*)^5} = \frac{0{,}5}{1-0{,}5^5} \approx 0{,}514\,; \quad p_4 = (\rho^*)^4 p_0 \approx 0{,}032\,;$$

$$A = \lambda\,(1 - p_4) \approx 0{,}968\,; \; Q = 1 - p_4 \approx 0{,}968\,; \; \bar{k} = A/\mu^* \approx 1{,}936.$$

Dans les mêmes conditions (voir problème 11.47) on a en l'absence de l'entraide: $A \approx 0{,}905$; $Q \approx 0{,}905$; $\bar{k} \approx 1{,}81$, c'est-à-dire que l'entraide « régulière » augmente quelque peu le débit du système. Dans notre cas cette augmentation est négligeable du fait que le système est peu chargé.

11.49. Pour un système simple à trois canaux à demandes refusées, de paramètres: $\lambda = 4$ demandes/mn; le temps de service moyen d'une demande par un canal $1/\mu = 0{,}5$ mn; la densité de service d'une demande par k canaux $\varphi(k) = k\mu$, déterminer les caractéristiques de l'efficacité du système: Q, A, $\bar{k}$ pour trois variantes de son utilisation: 1) en l'absence de l'entraide entre les canaux; 2) avec entraide illimitée; 3) avec entraide régulière.

Réponse. 1) $Q \approx 0{,}79$; $A \approx 3{,}16$; $\bar{k} \approx 1{,}58$; 2) $Q = 0{,}6$; $A = 2{,}4$; $\bar{k} = 1{,}2$; 3) $Q \approx 0{,}877$; $A \approx 3{,}51$; $\bar{k} \approx 1{,}76$.

11.50. *Système simple à file illimitée avec entraide entre les canaux.* Soit un système d'attente simple à n canaux dans lequel arrive un flux de demandes de densité λ; le temps de service de la demande par un canal suit la loi exponentielle de paramètre μ. La densité du flux de services de la demande par k canaux est proportionnelle

*) Dans notre position du problème il n'importe pas quelle part des canaux passe au service de la demande nouvellement arrivée; il importe que les n canaux soient occupés tout le temps et aucune des demandes nouvellement venues ne soit refusée tant que dans le système se trouvent n demandes et tous les n canaux les desservent une à une.

à leur nombre : $\varphi(k) = k\mu$. Parmi les demandes présentes dans le système les canaux sont répartis d'une façon arbitraire, mais sous la condition que si dans le système se trouve au moins une demande, tous les canaux sont affectés à son service.

En numérotant les états du système d'après les numéros des demandes présentes dans le système, construire le graphe des états marqué, trouver les probabilités limites des états et calculer les caractéristiques de l'efficacité $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_f$.

Solution. Le graphe des états du système coïncide avec celui d'un système simple à un canal à file illimitée, à flux de demandes de densité λ et flux de services de densité $n\mu$ (voir paragraphe 2 de la section 11.0). En posant dans les formules (11.0.12) à (11.0.15) $\rho = \varkappa = \lambda/(n\mu)$, on obtient $p_0 = 1 - \varkappa$; $p_k = \varkappa^k(1 - \varkappa)$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\bar{z} = \varkappa/(1 - \varkappa)$; $\bar{r} = \varkappa^2/(1 - \varkappa)$; $\bar{t}_{sys} = \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa)}$; $\bar{t}_f = \frac{\varkappa}{(1-\varkappa)}$.

Dans notre cas les caractéristiques de l'efficacité du système ne dépendent absolument pas du fait si les canaux assurent le service des demandes « tous comme un seul » ou « régulièrement », puisque les demandes ne sont pas refusées (notons que seules les valeurs moyennes des variables aléatoires Z, R, T_{sys}, T_f ne changent pas, et non pas leurs répartitions).

11.51. *Système d'attente simple à file limitée et entraide régulière entre les canaux.* On considère un système simple à n canaux et entraide régulière entre les canaux. Dans le système arrive un flux simple de demandes de densité λ, le flux de services d'un canal est un flux simple de densité μ; k canaux assurant le service d'une demande forment un flux de services global de densité $\varphi(k) = k\mu$. Les canaux sont distribués entre les demandes « régulièrement » dans ce sens que chaque nouvelle demande commence à être servie seulement s'il est possible à cet effet de rendre disponible un canal. La demande arrivée à l'instant lorsque tous les n canaux sont occupés prend la file. Le nombre d'unités dans la file est m; si elles sont toutes occupées, la demande est refusée.

En numérotant les états du système d'après le nombre de demandes qui s'y trouvent, composer le graphe des états marqué du système et calculer les probabilités limites des états; trouver les caractéristiques de l'efficacité du système P_{ref}, Q, A, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{sys}$, $\bar{t}_f$.

Solution. Les états du système :

s_0, le système est disponible;

s_1, une demande est servie par tous les n canaux;

. . . . . .

s_k, k demandes sont servies par tous les n canaux $(1 < k < n)$;

. . . . . .

s_n, n demandes sont servies par n canaux, pas de file;

s_{n+1}, n demandes sont servies par n canaux ; une demande attend son tour ;

. . . . . .

s_{n+m}, n demandes sont servies par n canaux ; m demandes attendent leur tour.

Le graphe des états du système est représenté sur la figure 11.51. Ce graphe coïncide avec celui d'un système simple à un canal à nombre limité d'unités m dans la file, à flux de demandes de densité λ et flux de services de densité $\eta\mu$ (voir section 11.0, paragraphe 3).

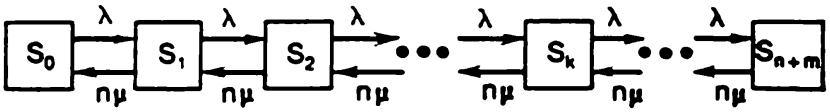


Fig. 11.51

En portant dans les formules (11.0.16) à (11.0.20) $\varkappa = \lambda/(n\mu)$ au lieu de ρ, et $n + m$ au lieu de m, on obtient

$$p_0 = (1-\varkappa)/(1-\varkappa^{n+m+2}); \quad p_k = \varkappa^k p_0 \quad (k = 1, \ldots, n+m);$$

$$P_{\text{réf}} = p_{n+m}; \; Q = 1 - p_{n+m}; \; A = \lambda Q;$$

$$\bar{r} = \frac{\varkappa^2 [1 - \varkappa^{n+m} (n+m+1-(n+m)\varkappa)]}{(1-\varkappa^{n+m+2})(1-\varkappa)};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}; \quad \bar{t}_{\text{sys}} = \bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_f = \bar{r}/\lambda.$$

11.52. A l'entrée d'une banque de données automatisée on amène en moyenne $\lambda = 335$ articles/h. La première opération du traitement du flux d'entrée de documents d'information primaires consiste dans le choix des articles qui doivent être introduits dans la banque. La sélection est réalisée par 6 personnes ; la productivité moyenne de chacune d'elles est $\mu = 60$ articles/h. On sait qu'en moyenne on retient du flux d'entrée pour introduire dans la banque 61,3 % des documents d'information primaires. Tous les flux d'événements sont simples. En considérant le système de sélection des documents d'information primaires comme un système à six canaux ($n = 6$) à file illimitée, déterminer ses caractéristiques d'efficacité A, Q, $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{sys}}$, $\bar{t}_f$.

Solution. La file étant illimitée, $Q = 1$; $A = \lambda$. La densité du flux de documents d'information primaires retenus pour être introduits dans la banque $\lambda_0 = \lambda p$, où $p \approx 0{,}613$, c'est-à-dire $\lambda_0 = 335 \times \times 0{,}613 \approx 205$ articles/h.

La densité du flux de documents d'information primaires non introduits dans la banque est $\lambda_{\text{non}} = \lambda (1 - p) \approx 130$ articles/h.

Le nombre moyen de personnes chargées de sélectionner les documents est $\bar{k} = \lambda/\mu = \rho = 5{,}58$ et ne dépend pas du nombre de canaux (personnes). Le régime permanent du système s'établit si l'on observe

la condition $\varkappa = \lambda/(\eta\mu) < 1$; dans notre cas elle est observée ($\varkappa = 0{,}93$).

La probabilité pour que dans le système soient occupés tous les n personnes [voir formule (11.0.22)] vaut

$$p_n = P(n, \rho)/\left[R(n, \rho) + P(n, \rho)\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right].$$

En utilisant les tables données par les annexes 1, 2, on obtient

$$p_6 = 0{,}1584 \Big/ \left(0{,}6703 + 0{,}1584\,\frac{0{,}93}{0{,}07}\right) \approx 0{,}0569.$$

Le nombre moyen de documents primaires dans la file [voir (11.0.23)] $\bar{r} = p_n\varkappa/(1-\varkappa)^2 \approx 10{,}8$. Le temps moyen d'attente dans la file $\bar{t}_f = \bar{r}/\lambda \approx 1{,}87$ mn. Le nombre moyen de documents présents dans le système (dans la file et en cours de traitement) $\bar{z} = r + \rho \approx 15{,}38$. Le temps moyen de séjour des documents d'information primaires dans le système $\bar{t}_{sys} = \bar{t}_f + 1/\mu \approx 2{,}87$ mn.

11.53. A l'entrée d'un système d'attente (fig. 11.53) on amène un flux simple de demandes de densité λ. Le service se compose de

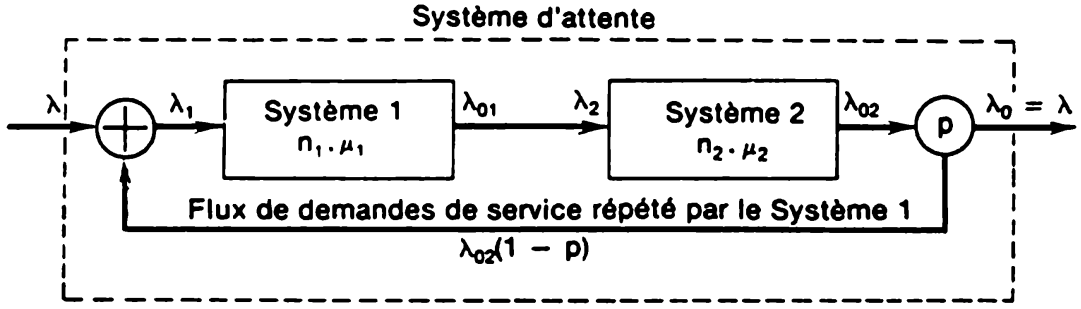


Fig. 11.53

deux phases consécutives réalisées dans le système 1 et le système 2. Le système 1 assure le service, et le système 2, le contrôle de la qualité du service réalisé par le système 1. Si le système 2 ne découvre pas de défauts, la demande est considérée comme servie ; si le système 2 révèle des défauts, la demande est renvoyée dans le système 1 pour le service répété (voir figure 11.53). La probabilité pour que la demande servie dans le système 1 soit, par suite du contrôle dans le système 2, renvoyée dans le système 1 pour un service répété est égale à $1 - p$, et ne dépend pas du nombre de fois que la demande a été traitée dans le système 1.

Le système 1 et le système 2 sont des systèmes d'attente à n_1 et n_2 canaux à file illimitée, à densité du flux de services dans chaque canal μ_1 et μ_2 respectivement. Le temps du service répété de la demande dans un canal du système 1 et du contrôle répété de la qualité du service de la demande dans un canal du système 2 est réparti,

tout comme lors de la réalisation de ces opérations pour la première fois, d'après la loi exponentielle de paramètres μ_1 et μ_2 respectivement. Déterminer les conditions de l'établissement d'un régime permanent du travail du système considéré en admettant que les flux de demandes qui arrivent dans le système 1 et le système 2 sont simples.

Solution. Désignons par λ_1 la densité du flux de demandes se présentant à l'entrée du système 1. Il est clair que $\lambda_1 > \lambda$, puisqu'à l'entrée du système 1 arrivent le flux de demandes dirigées pour la première fois pour être servies par le système 1 (densité du flux λ), plus le flux de demandes dirigées pour le service répété (voir figure 11.53). Si le régime permanent existe, la densité λ_{01} du flux de demandes servies dans le système 1 est égale à la densité λ_1. Le flux de demandes servies dans le système 1 arrive dans le système 2; donc à l'entrée du système 2 se présente le flux de demandes de densité $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_{01}$. En vertu de régime permanent dans le système 2, la densité du flux de demandes à la sortie du système 2 (λ_{02}) est également égale à λ_2. Ainsi,

$$\lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_2 = \lambda_{02}. \tag{11.53.1}$$

Il est clair que la densité λ_0 du flux de demandes servies à la sortie du système en régime permanent sera égale à la densité du flux d'entrée λ.

La densité λ_0 du flux de demandes servies dans le système est égale à la densité λ_{02} du flux de demandes à la sortie du système 2, multipliée par la probabilité p pour que la demande ne soit pas renvoyée dans le système 1 pour un service répété:

$$\lambda_{02}p = \lambda_0 = \lambda, \tag{11.53.2}$$

d'où

$$\lambda_{02} = \lambda/p. \tag{11.53.3}$$

Ainsi [voir formules (11.53.1) à (11.53.3)],

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda/p. \tag{11.53.4}$$

Pour que le régime permanent du système d'attente existe il faut que le système 1 aussi bien que le système 2 suffisent au flux de demandes se présentant à leurs entrées; par conséquent il faut que soient observées deux conditions:

$$\varkappa_1 = \lambda_1/(n_1\mu_1) = \lambda/(pn_1\mu_1) < 1; \tag{11.53.5}$$

$$\varkappa_2 = \lambda_2/(n_2\mu_2) = \lambda/(pn_2\mu_2) < 1. \tag{11.53.6}$$

Elles s'ensuivent du fait que le système 1 tout comme le système 2 constituent des systèmes à n_1 et n_2 canaux de densités de services dans les canaux μ_1 et μ_2 respectivement, à files illimitées (voir paragraphe 4 du début de ce chapitre).

11.54. Déterminer pour l'énoncé du problème précédent le temps moyen de séjour d'une demande dans le système et le nombre moyen de demandes qui y sont présentes.

Solution. Le temps moyen $\bar{t}_1$ de séjour unique de la demande dans le système 1 (voir figure 11.53) est déterminé à partir de la condition qu'à l'entrée de ce système arrive un flux simple de demandes de densité $\lambda_1 = \lambda/p$, le nombre de canaux de service étant n_1, la densité de service, μ_1, et le nombre d'unités dans la file étant illimité. Pour ces conditions, en vertu de (11.0.21) à (11.0.25), on a

$$\bar{t}_1 = (\rho_1 + \bar{r}_1)\,\lambda_1^{-1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\rho_1^{n_1+1} p_{01}}{n_1 \cdot n_1!\,(1-\varkappa_1)^2 \lambda_1}, \qquad (11.54.1)$$

où

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{p\mu_1}; \quad \varkappa_1 = \frac{\rho_1}{n_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{p};$$

$$p_{01} = \left[1 + \frac{\rho_1}{1!} + \frac{\rho_1^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} + \frac{\rho_1^{n_1+1}}{n_1 \cdot n_1!}\,\frac{1}{1-\varkappa_1}\right]^{-1}.$$

D'une façon analogue on calcule la grandeur $\bar{t}_2$ qui est le temps moyen de séjour unique de la demande dans le système 2 pour les conditions $\lambda_2 = \lambda/p$; n_2; μ_2:

$$\bar{t}_2 = (\rho_2 + \bar{r}_2)\lambda_2^{-1} = \frac{1}{\mu^2} + \frac{\rho_2^{n_2+1} p_{02}}{n_2 \cdot n_2!\,(1-\varkappa_2)^2 \lambda_2}, \qquad (11.54.2)$$

où

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{p\mu_2}; \quad \varkappa_2 = \frac{\rho_2}{n_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{p};$$

$$p_{02} = \left[1 + \frac{\rho_2}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} + \frac{\rho_2^{n_2+1}}{n_2 \cdot n_2!}\,\frac{1}{1-\varkappa_1}\right]^{-1}.$$

Par conséquent, le temps moyen de séjour unique de la demande dans le système 1 et le système 2 est

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2. \qquad (11.54.3)$$

L'énoncé du problème 11.53 implique que la variable aléatoire X qui est le nombre de cycles de service d'une demande dans le système 1 et le système 2, est répartie d'après une loi géométrique qui commence par l'unité, de paramètre p:

$$X: \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \hline p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{k-1} & \ldots \end{array}\right|. \qquad (11.54.4)$$

Désignons par $T_1, T_2, \ldots, T_k$ la durée du premier, deuxième k-ième cycle du traitement de la demande dans le système 1 et le

système 2. D'après l'énoncé du problème, les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_k, \ldots$ sont indépendantes, réparties de la même façon et possèdent l'espérance mathématique $\bar{\tau}_{12}$.

Le temps de séjour de la demande dans le système (compte tenu des renvois éventuels de la demande pour le service répété) peut se mettre sous la forme $T = \sum_{k=1}^{X} T_k$, c'est-à-dire qu'il représente la somme d'un nombre aléatoire de termes aléatoires, où le nombre de termes X ne dépend pas des variables aléatoires $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Conformément à la solution du problème 7.64, on trouve l'espérance mathématique de la variable T:

$$\bar{t} = \mathrm{M}\,[T] = \mathrm{M}\,[T_k]\,\mathrm{M}\,[X] = \bar{\tau}_{12}/p. \qquad (11.54.5)$$

Pour le système d'attente considéré la formule de Little est également vraie; le nombre moyen de demandes présentes dans le système est donc déterminé par la formule:

$$\bar{z} = \bar{t}\lambda. \qquad (11.54.6)$$

11.55. L'énoncé du problème 11.53 est modifié de façon que le système 1 et le système 2 assurent seulement le service primaire et son contrôle; si la demande ne passe pas le contrôle par le système 2,

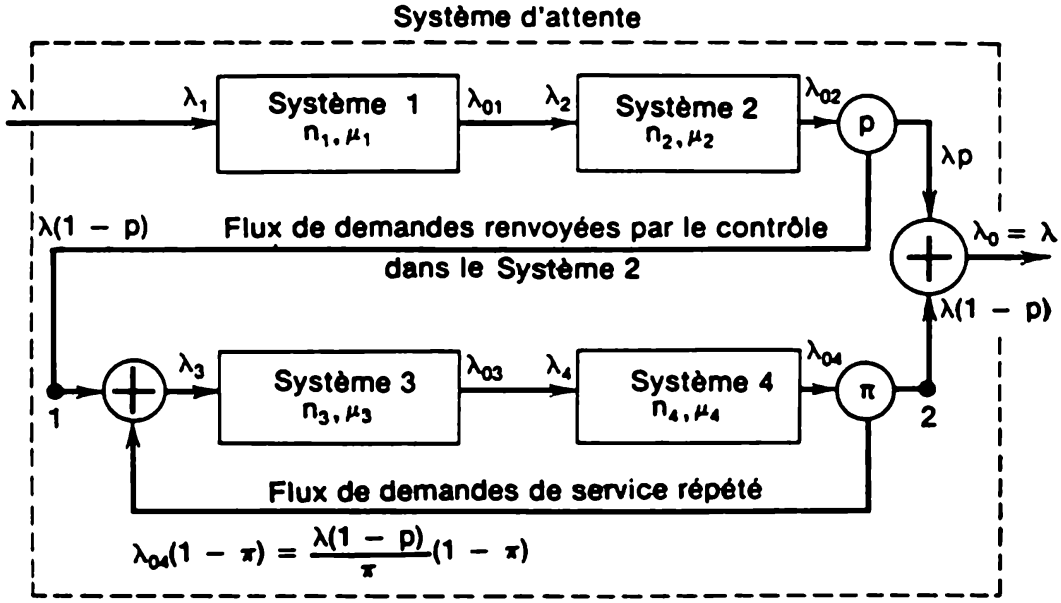


Fig. 11.55

elle est dirigée pour le service répété dans le système 3 et le contrôle répété dans le système 4 (fig. 11.55). Ces derniers systèmes sont à n_3 et n_4 canaux, à temps de service des demandes dans les canaux répartis d'après les lois exponentielles de paramètres μ_3 et μ_4 respective-

ment. La probabilité pour que la demande servie dans le système 3 soit renvoyée après le contrôle dans le système 4 pour un service répété dans le système 3 est égale à $1 - \pi$. Déterminer les conditions dans lesquelles le régime de ce système est permanent, en admettant que les flux de demandes qui arrivent dans le système 1, le système 2, le système 3 et le système 4 sont simples.

Solution. Dans le cas d'un régime permanent le système considéré donne lieu à l'égalité évidente:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_2 = \lambda_{02}. \qquad (11.55.1)$$

Par conséquent, la densité du flux de demandes qui ont subi une fois le service et le contrôle dans le système 1 et le système 2 est λp. Le flux de demandes renvoyées par le contrôle dans le système 2 et dirigées pour un service répété dans le système 3 et le système 4, est d'une densité $\lambda(1 - p)$. Le travail du système de service répété (système 3 et système 4) (du point 1 au point 2 de la figure 11.55) ne se distingue en principe en rien de celui du système étudié au problème 11.53.

Tout ce qui vient d'être dit entraîne que pour assurer au système considéré dans ce problème un régime permanent il faut que soient remplies ensemble des conditions suivantes:

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda}{n_1\mu_1} < 1; \quad \varkappa_2 = \frac{\lambda}{n_2\mu_2} < 1; \quad \varkappa_3 = \frac{\lambda(1-p)}{\pi n_3\mu_3} < 1;$$

$$\varkappa_4 = \frac{\lambda(1-p)}{\pi n_4\mu_4} < 1. \qquad (11.55.2)$$

D'autre part, il faut qu'aient lieu les égalités (voir fig. 11.55):

$$\lambda_3 = \lambda_{03} = \lambda_4 = \lambda_{04} = \lambda(1 - p)\pi^{-1}. \qquad (11.55.3)$$

11.56. Dans l'énoncé du problème précédent déterminer le temps moyen $\bar{t}$ de séjour d'une demande dans le système d'attente et le nombre moyen de demandes $\bar{z}$ dans ce système.

Solution. Le temps moyen de séjour d'une demande dans le système 1 est déterminé par la condition qu'à l'entrée de ce système arrive un flux simple de demandes de densité $\lambda_1 = \lambda$ [voir figure 11.55 et formule (11.55.1)], le nombre de canaux de service est n_1, la densité du service dans le canal, μ_1, le nombre d'unités dans la file est illimité. Alors, conformément à (11.0.21) à (11.0.25), on a

$$\bar{t}_1 = (\rho + \bar{r}_1)\lambda^{-1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\rho_1^{n_1+1} p_{01}}{n_1 n_1!(1-\varkappa_1)^2\lambda}, \qquad (11.56.1)$$

où

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}; \quad \varkappa_1 = \frac{\rho_1}{n_1};$$

$$p_{01} = \left[1 + \frac{\rho_1}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2} + \cdots + \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} + \frac{\rho_1^{n_1+1}}{n_1 n_1!}\frac{1}{1-\varkappa_1}\right]^{-1}.$$

Calculons d'une façon analogue la grandeur $\bar{t}_2$ pour le système 2 avec $\lambda_2 = \lambda$; n_2; μ_2:

$$\bar{t}_2 = (\rho_2 + \bar{r}_2)\,\lambda^{-1} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{\rho_2^{n_2+1} p_{02}}{n_2 n_2!\,(1-\varkappa_2)^2 \lambda}, \qquad (11.56.2)$$

où

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}; \quad \varkappa_2 = \frac{\rho_2}{n_2};$$

$$p_{02} = \left[1 + \frac{\rho_2}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} + \frac{\rho_2^{n_2+1}}{n_2 n_2!}\,\frac{1}{1-\varkappa_2}\right]^{-1}.$$

Le temps moyen de séjour de la demande dans le système 1 et le système 2 est égal à

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2. \qquad (11.56.3)$$

Le temps moyen $\bar{t}_3$ de séjour unique de la demande dans le système 3 est déterminé par les conditions suivantes: à l'entrée de ce système arrive un flux simple de demandes de densité $\lambda_3 = \lambda(1 - p)/\pi$ [voir figure 11.55 et formule (11.55.3)], le nombre de canaux de service est n_3, la densité du service dans le canal, μ_3, le nombre d'unités dans la file est illimité. Alors, conformément à (11.0.21) à (11.0.25)

$$\bar{t}_3 = (\rho_3 + \bar{r}_3)\,\lambda_3^{-1} = 1/\mu_3 + \rho_3^{n_3+1} p_{03}/[n_3 n_3!\,(1-\varkappa_3)^2 \lambda_3], \qquad (11.56.4)$$

où

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{\lambda(1-p)}{\pi\mu_3}; \quad \varkappa = \frac{\rho_3}{n_3};$$

$$p_{03} = \left[1 + \frac{\rho_3}{1!} + \frac{\rho_3^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^{n_3}}{n_3!} + \frac{\rho^{n_3+1}}{n_3 n_3!}\,\frac{1}{1-\varkappa_3}\right]^{-1}.$$

D'une façon analogue on calcule la grandeur $\bar{t}_4$ pour le système 4 avec $\lambda_4 = \lambda(1 - p)/\pi$; n_4; μ_4:

$$\bar{t}_4 = (\rho_4 + \bar{r}_4)\,\lambda_4^{-1} = 1/\mu_4 + \rho_4^{n_4+1} p_{04}/[n_4 n_4!\,(1-\varkappa_4)^2 \lambda_4], \qquad (11.56.5)$$

où

$$\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{\lambda(1-p)}{\pi\mu_3}; \quad \varkappa_4 = \frac{\rho_4}{n_4};$$

$$p_{04} = \left[1 + \frac{\rho_4}{1!} + \frac{\rho_4^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} + \frac{\rho_4^{n_4+1}}{n_4 n_4!}\,\frac{1}{1-\varkappa_4}\right]^{-1}.$$

Par conséquent, le temps moyen d'un service unique d'une demande dans le système 3 et le système 4 est

$$\bar{\tau}_{34}^{(1)} = \bar{t}_3 + \bar{t}_4. \qquad (11.56.6)$$

En vertu de la formule (11.54.6), l'espérance mathématique du temps de séjour de la demande dans le système 3 et le système 4 (voir figure 11.55), compte tenu du service répété éventuel, est

$$\bar{\tau}_{34} = \bar{\tau}_{34}^{(1)}/\pi. \qquad (11.56.7)$$

Pour calculer le temps moyen de séjour de la demande dans le système d'attente considérons deux hypothèses: 1) H_1, la demande a subi un traitement unique; $P(H_1) = p$; 2) H_2, la demande a subi un traitement multiple; $P(H_2) = 1 - p$.

Sous l'hypothèse H_1 l'espérance mathématique du temps de séjour de la demande dans le système est déterminé d'après la formule (11.56.3); sous l'hypothèse H_2, d'après les formules (11.56.7) et (11.56.3). L'espérance mathématique totale du temps de présence de la demande dans le système est

$$\bar{t} = \bar{\tau}_{12} + \bar{\tau}_{34}^{(1)}(1-p)/\pi. \qquad (11.56.8)$$

Le nombre moyen de demandes dans le système se calcule d'après la formule de Little:

$$\bar{z} = \bar{t}\lambda. \qquad (11.56.9)$$

11.57. Considérons l'énoncé du problème 11.53 en l'appliquant au traitement multiple de l'information dans deux phases. Dans le but du contrôle de la perforation elle est réalisée deux fois: par le perforateur et par le perforateur de contrôle qui permet de déceler l'erreur. L'opérateur fait en moyenne une erreur par 1000 signes (lettres, chiffres, etc.). Chaque carte perforée compte en moyenne 80 signes. Si pendant le contrôle on découvre sur la carte perforée ne serait-ce qu'une erreur, cette carte est renvoyée pour refaire la perforation. En une année il faut traiter 50 000 documents, dont chacun compte en moyenne 400 signes.

Trouver le nombre minimal nécessaire d'opérateurs à affecter au perforateur et au perforateur de contrôle, si par an un opérateur perfore $4{,}2 \cdot 10^6$ signes, et déterminer les caractéristiques de ce système.

Solution. D'après l'énoncé il faut en moyenne perforer et contrôler par an $50\,000 \cdot 400/80 = 250\,000$ cartes. Par conséquent, $\lambda = 250\,000$ perforations/an $= 125$ perforations/h $= 2{,}083$ perforations/mn. La productivité des opérateurs affectés au perforateur ou au perforateur de contrôle est $\mu_1 = \mu_2 = 4{,}2 \cdot 10^6/80 = 52 \cdot 5000$ perforations/an $= 26{,}25$ perforations/h $= 0{,}438$ perforation/mn. La probabilité de ne découvrir aucune erreur sur la carte perforée est égale à $p = 0{,}999^{80} \approx 0{,}9$. Nous négligeons là la probabilité pour que l'opérateur et le contrôleur se trompent de la même façon pour le même signe. Cette probabilité est beaucoup plus petite que $(0{,}001)^2 = 10^{-6}$, du fait que le clavier du perforateur et du perforateur de

contrôle compte près de 50 signes différents. Si l'on admet que l'un des 50 signes du clavier peut être poussé par erreur, on obtient que la probabilité de réaliser la même erreur est égale à $10^{-6}/2500$. Si l'on admet que sur le clavier on peut pousser par erreur seulement le signe le plus proche du signe nécessaire (on en compte de 5 à 8), alors cette probabilité est égale de $10^{-6}/25$ à $10^{-6}/64$.

La condition d'un régime permanent de travail des opérateurs est donc [voir (11.53.5), (11.53.6)]

$$\lambda/(n_1\mu_1 p) = \varkappa_1 < 1; \quad \lambda/(n_2\mu_2 p) = \varkappa_1 < 1,$$

d'où $n_1 > \lambda/(\mu_1 p) = 250\,000/(52\cdot 500\cdot 0{,}9) = 5{,}29$; $n_2 > 5{,}29$.

Ainsi, il faut avoir six opérateurs et six contrôleurs.

Caractéristiques du travail des opérateurs: $\lambda_{en1} = \lambda/p = 25\,000 : 0{,}9 = 278\,000$ perforations/an; $n_1 = 6$; $\mu_1 = 52 \times 500$ perforations/an; $\varkappa_1 = \lambda/(n_1 p\mu) = 0{,}882$; $\rho_1 = \lambda/(p\mu_1) = 5{,}29$.

D'après la formule (11.0.22) on trouve la probabilité pour que tous les six opérateurs soient occupés et pour qu'il n'y ait pas de « files » de documents à perforer

$$p_{n1} = \frac{P(n_1, \rho_1)}{R(n_1, \rho_1) + P(n_1, \rho_1)\dfrac{\varkappa_1}{1-\varkappa_1}} = \frac{0{,}152}{0{,}282 + 0{,}152\dfrac{0{,}882}{1-0{,}882}} = 0{,}107.$$

Le nombre moyen de cartes qui attendent dans la file de perforation: $\bar{r}_1 = p_{n1}\varkappa_1/(1-\varkappa_1)^2 = 6{,}78$.

Le temps moyen d'attente d'une carte dans la file: $\bar{t}_f = \bar{r}_1 p\lambda^{-1} = 2{,}92$ mn; $\bar{t}_1 = \bar{t}_{f1} + 1/\mu_1 = 5{,}21$ mn.

Le nombre total de cartes à perforer dans la première phase $\bar{z}_1 = \bar{r}_1 + \bar{k}_1 = \bar{r}_1 + \rho_1 = 12{,}07$.

Les caractéristiques de la deuxième phase (du contrôle) étant les mêmes que celles de la première phase, on peut écrire les caractéristiques générales du travail du système compte tenu du renvoi des cartes pour un nouveau traitement. Le nombre moyen total des cartes présentes dans le système $\bar{z} = 2\bar{z}_1 = 24{,}14$; parmi elles, dans la file il y a $\bar{r} = 2\bar{r}_1 = 13{,}56$. Le temps moyen total de traitement d'une carte compte tenu de son renvoi éventuel pour le traitement répété est égal à $\bar{t} = \bar{\tau}_{12}/p = (\bar{t}_1 + \bar{t}_2)/p = 2\bar{t}_1/p = 11{,}57$ mn.

ANNEXES

ANNEXE 1

Répartition de Poisson $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0.1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

m \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0101	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

ANNEXE 2

Valeurs de la probabilité *)

$$\overline{R}(m, a) = 1 - R(m, a) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

m	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$
0	$9,5163^{-2}$	$1,8127^{-1}$	$2,5918^{-1}$	$3,2968^{-1}$	$8,9347^{-1}$
1	$4,6788^{-3}$	$1,7523^{-2}$	$3,6936^{-2}$	$6,1552^{-2}$	$9,0204^{-2}$
2	$1,5465^{-4}$	$1,1485^{-3}$	$3,5995^{-3}$	$7,9263^{-3}$	$1,4388$
3	$3,8468^{-6}$	$5,6840^{-5}$	$2,6581^{-4}$	$7,7625^{-4}$	$1,7516^{-3}$
4		$2,2592^{-6}$	$1,5785^{-5}$	$6,1243^{-5}$	$1,7212^{-4}$
5				$4,0427^{-6}$	$1,4165^{-5}$
6					$1,0024^{-6}$

m	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$	
0	$4,5119^{-1}$	$5,0341^{-1}$	$5,5067^{-1}$	$5,9343^{-1}$	
1	$1,2190$	$1,5580$	$1,9121$	$2,2752$	
2	$2,3115^{-2}$	$3,4142^{-2}$	$4,7423^{-2}$	$6,2857^{-2}$	
3	$3,3581^{-3}$	$5,7535^{-3}$	$9,0799^{-3}$	$1,3459$	
4	$3,9449^{-4}$	$7,8554^{-4}$	$1,4113$	$2,3441^{-3}$	
5	$3,8856^{-5}$	$9,0026^{-5}$	$1,8434^{-4}$	$3,4349^{-4}$	
6	$3,2931^{-6}$	$8,8836^{-6}$	$2,0747^{-5}$	$4,3401^{-5}$	
7			$2,0502^{-6}$	$4,8172^{-6}$	

m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
0	$6,3212^{-1}$	$8,6466^{-1}$	$9,5021^{-1}$	$9,8168^{-1}$	$9,9326^{-1}$
1	$2,6424$	$5,9399$	$8,0085$	$9,0842$	$9,5957$
2	$8,0301^{-2}$	$3,2332$	$5,7681$	$7,6190$	$8,7535$
3	$1,8988$	$1,4288$	$3,5277$	$5,6653$	$7,3497$
4	$3,6598^{-3}$	$5,2653^{-2}$	$1,8474$	$3,7116$	$5,5951$
5	$5,9418^{-4}$	$1,6564$	$8,3918^{-2}$	$2,1487$	$3,8404$
6	$8,3241^{-5}$	$4,5338^{-3}$	$3,3509$	$1,1067$	$2,3782$

*) La probabilité $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ peut s'obtenir par l'intermédiaire de la probabilité $\overline{R}(m, a)$ de la façon suivante

$$P(m, a) = \overline{R}(m-1, a) - \overline{R}(m, a) \quad (m > 0), \quad P(0, a) = 1 - \overline{R}(0, a).$$

Suite

m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
7	1,0249	1,0967	1,1905	$5,1134^{-2}$	1,3337
8	$1,1252^{-6}$	$2,3745^{-4}$	$3,8030^{-3}$	2,1363	$6,8094^{-2}$
9		$4,6498^{-5}$	1,1025	$8,1322^{-3}$	3,1828
10		$8,3082^{-6}$	$2,9234^{-4}$	2,8398	1,3695
11		1,3646	$7,1387^{-5}$	$9,1523^{-4}$	$5,4531^{-3}$
12			1,6149	2,7372	2,0189
13			$3,4019^{-6}$	$7,6328^{-5}$	$6,9799^{-4}$
14				1,9932	2,2625
15				$4,8926^{-6}$	$6,9008^{-5}$
16				1,1328	1,9869
17					$5,4163^{-6}$
18					1,4017

m	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
0	$9,9752^{-1}$	$9,9909^{-1}$	$9,9966^{-1}$	$9,9988^{-1}$	$9,9995^{-1}$
1	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
2	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
3	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
4	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
5	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
6	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
7	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
8	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718
9	$8,3924^{-2}$	$1,6950^{-1}$	$2,8338^{-1}$	$4,1259^{-1}$	$5,4207^{-1}$
10	4,2621	$9,8521^{-2}$	1,8411	2,9401	4,1696
11	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
12	$8,8275^{-3}$	2,7000	$6,3797^{-2}$	1,2423	2,0844
13	3,6285	1,2811	3,4181	$7,3851^{-2}$	1,3554
14	1,4004	$5,7172^{-3}$	1,7257	4,1466	$8,3458^{-2}$
15	$5,0910^{-4}$	2,4066	$8,2310^{-3}$	2,2036	4,8740
16	1,7488	$9,5818^{-4}$	3,7180	1,1106	2,7042
17	$5,6917^{-5}$	3,6178	1,5943	$5,3196^{-3}$	1,4278
18	1,7597	1,2985	$6,5037^{-4}$	2,4264	$7,1865^{-3}$
19	$5,1802^{-6}$	$4,4402^{-5}$	2,5294	1,0560	3,4543
20	1,4551	1,4495	$9,3968^{-5}$	$4,3925^{-4}$	1,5883
21		$4,5263^{-6}$	3,3407	1,7495	$6,9965^{-4}$
22		1,3543	1,1385	$6,6828^{-5}$	2,9574
23			$3,7255^{-6}$	2,4519	1,2012
24			1,1722	$8,6531^{-6}$	$4,6949^{-5}$
25				2,9414	1,7680
26					$6,4229^{-6}$
27					2,2535

m	$a = 11$	$a = 12$	$a = 13$	$a = 14$	$a = 15$
0	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$			
1	9,9980	9,9992	$9{,}9997^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	
2	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	$9{,}9996^{-1}$
3	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
4	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
5	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
6	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
7	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
8	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
9	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
10	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
11	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
12	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
13	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
14	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
15	$9{,}2604^{-2}$	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
16	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
17	3,2191	$6{,}2966^{-2}$	1,0954	1,7280	2,5114
18	1,7687	3,7416	$6{,}9833^{-2}$	1,1736	1,8053
19	$9{,}2895^{-3}$	2,1280	4,2669	$7{,}6505^{-2}$	1,2478
20	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	$8{,}2972^{-2}$
21	2,2519	$6{,}0651^{-3}$	1,4081	2,8844	5,3106
22	1,0423	3,0474	$7{,}6225^{-3}$	1,6712	3,2744
23	$4{,}6386^{-4}$	1,4729	3,9718	$9{,}3276^{-3}$	1,9465
24	1,9871	$6{,}8563^{-4}$	1,9943	5,0199	1,1165
25	$8{,}2050^{-5}$	3,0776	$9{,}6603^{-4}$	2,6076	$6{,}1849^{-3}$
26	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
27	1,2584	$5{,}5836^{-5}$	2,0435	$6{,}3513^{-4}$	1,7158
28	$4{,}6847^{-6}$	2,2616	$8{,}9416^{-5}$	2,9837	$8{,}6072^{-4}$
29	1,6882	$8{,}8701^{-6}$	3,7894	1,3580	4,1843
30		3,3716	1,5568	$5{,}9928^{-5}$	1,9731
31		1,2432	$6{,}2052^{-6}$	2,5665	$9{,}0312^{-5}$
32			2,4017	1,0675	4,0155
33				$4{,}3154^{-6}$	1,7356
34				1,6968	$7{,}2978^{-6}$
35					2,9871
36					1,1910

m	$a = 16$	$a = 17$	$a = 18$	$a = 19$	$a = 20$
0					
1					
2	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$			
3	9,9991	9,9996	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	
4	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	$9{,}9998^{-1}$
5	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974

Suite

m	$a = 16$	$a = 17$	$a = 18$	$a = 19$	$a = 20$
7	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
11	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
13	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
14	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
15	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
16	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
17	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
18	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858
19	1,8775	2,6368	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
21	$8,9227^{-2}$	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
22	5,8241	$9,5272^{-2}$	1,4491	2,0687	2,7939
23	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
24	2,2315	4,0646	$6,8260^{-2}$	1,0675	1,5677
25	1,3119	2,5245	4,4608	$7,3126^{-2}$	1,1218
26	$7,4589^{-3}$	1,5174	2,8234	4,8557	$7,7887^{-2}$
27	4,1051	$8,8335^{-3}$	1,7318	3,1268	5,2481
28	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334
29	1,1312	2,7272	$5,9443^{-3}$	1,1850	2,1818
30	$5,6726^{-4}$	1,4484	3,3308	$6,9819^{-3}$	1,3475
31	2,7620	$7,4708^{-4}$	1,8133	3,9982	$8,0918^{-3}$
32	1,3067	3,7453	$9,5975^{-4}$	2,2267	4,7274
33	$6,0108^{-5}$	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
34	2,6903	$8,6644^{-5}$	2,4767	$6,3674^{-4}$	1,4890
35	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	$8,0366^{-4}$
36	$4,9772^{-6}$	1,8025	$5,7519^{-5}$	1,6401	4,2290
37	2,0599	$7,9123^{-6}$	2,6684	$8,0154^{-5}$	2,1708
38		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
39		1,4162	$5,3365^{-6}$	1,7797	$5,3202^{-5}$
40			2,3030	$8,0940^{-6}$	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	$5,4252^{-6}$
43					2,4243
44					1,0603

Exemple. Déterminer la probabilité pour que l'événement A apparaisse pas plus de deux fois (si $a = 7$). Soit

$$R(2,\ 7) = 1 - \bar{R}(2,\ 7) = 1 - 9{,}7036^{-1} = 1 - 0{,}97036 = 0{,}02964.$$

Notes. 1. Si le nombre du tableau ne comporte pas d'exposant, celui-ci sera l'exposant du nombre le plus proche d'en haut possédant un exposant. Par exemple: $\bar{R}(33;\ 19) = 1{,}2067 \cdot 10^{-3}$.

2. Pour $a > 20$ la probabilité $R(m,\ a)$ peut se calculer d'après la formule approchée

$$R(m,\ a) \approx \Phi\left(\frac{m + 0{,}5 - a}{\sqrt{a}}\right) + 0{,}5,$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de Laplace (Annexe 5).

ANNEXE 3

Valeurs de la fonction e^{-x}

x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ
0,00	1,000	10	0,40	0,670	7	0,80	0,449	4	3,00	0,050	5
0,01	0,990	10	0,41	0,664	7	0,81	0,445	5	3,10	0,045	4
02	980	10	42	657	7	82	440	4	3,20	41	4
03	970	9	43	650	6	83	436	4	3,30	37	4
04	961	10	44	644	6	84	432	5	3,40	33	3
05	951	9	45	638	7	85	427	4	3,50	30	3
06	942	10	46	631	6	86	423	4	3,60	27	2
07	932	9	47	625	6	87	419	4	3,70	25	3
08	923	9	48	619	6	88	415	4	3,80	22	2
09	914	9	49	613	7	89	411	4	3,90	20	2
0,10	0,905	9	0,50	0,606	6	0,90	0,407	4	4,00	0,0183	17
11	896	9	51	600	5	91	403	4	4,10	166	16
12	887	9	52	595	6	92	399	4	4,20	150	14
13	878	9	53	589	6	93	395	4	4,30	136	13
14	869	8	54	583	6	94	391	4	4,40	123	12
15	861	9	55	577	6	95	387	4	4,50	111	10
16	852	8	56	571	6	96	383	4	4,60	101	10
17	844	9	57	565	5	97	379	4	4,70	0,0091	9
18	835	8	58	560	6	98	375	3	4,80	82	8
19	827	8	59	554	5	99	372	4	4,90	74	7
0,20	0,819	8	0,60	0,549	6	1,00	0,368	35	5,00	0,0067	6
21	811	8	61	543	5	1,10	333	31	5,10	61	6
22	803	8	62	538	5	1,20	302	29	5,20	55	5
23	795	8	63	533	6	1,30	273	26	5,30	50	5
24	787	8	64	527	5	1,40	247	24	5,40	45	4
25	779	8	65	522	5	1,50	223	21	5,50	41	4
26	771	8	66	517	5	1,60	202	19	5,60	37	4
27	763	7	67	512	5	1,70	183	18	5,70	33	3
28	756	8	68	507	5	1,80	165	15	5,80	30	3
29	748	7	69	502	5	1,90	150	15	5,90	27	2
0,30	0,741	8	0,70	0,497	5	2,00	0,135	13	6,00	0,0025	3
31	733	7	71	492	5	2,10	122	11	6,10	22	2
32	726	7	72	487	5	2,20	111	11	6,20	20	2
33	719	7	73	482	5	2,30	100	9	6,30	18	1
34	712	7	74	477	5	2,40	0,091	9	6,40	17	2
35	705	7	75	472	4	2,50	82	8	6,50	15	1
36	698	7	76	468	5	2,60	74	7	6,60	14	2
37	691	7	77	463	5	2,70	67	6	6,70	12	1
38	684	7	78	458	4	2,80	61	6	6,80	11	1
39	677	7	79	454	5	2,90	55	5	6,90	10	1
0,40	0,670		0,80	0,449		3,00	0,050		7,00	0,0009	

ANNEXE 4

Densité de probabilité de la loi normale $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ANNEXE 5

Valeurs de la fonction de Laplace $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

ANNEXE 6

Certaines propriétés des fonctions généralisées

Pour résoudre des problèmes liés aux fonctions aléatoires il est souvent commode de réaliser des transformations à l'aide de diverses fonctions en saut, ainsi que des fonctions généralisées du type fonction delta.

Nous donnons les définitions et les propriétés principales de telles fonctions de l'argument réel τ.

1. $|\tau|$, module (valeur absolue)

$$|\tau| = \begin{cases} \tau & \text{pour } \tau \geqslant 0 \\ -\tau & \text{pour } \tau < 0. \end{cases}$$

2. $1(\tau)$, fonction unité (saut unitaire):

$$1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \tau > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } \tau = 0, \\ 0 & \text{pour } \tau < 0. \end{cases}$$

3. sign τ, signe de la grandeur τ (signum)

$$\operatorname{sign} \tau = \begin{cases} 1 & \text{pour } \tau > 0, \\ 0 & \text{pour } \tau = 0, \\ -1 & \text{pour } \tau < 0. \end{cases}$$

4. $\delta(\tau)$, fonction delta

$$\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau} 1(\tau).$$

La fonction delta est une fonction paire de τ. Ses propriétés principales sont:

a) $\tau\delta(\tau) = 0$ et en général $\varphi(\tau)\,\delta(\tau) = 0$, si $\varphi(\tau)$ est une fonction impaire continue pour $\tau = 0$;

b) $\int\limits_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \psi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \psi(0)$, si la fonction $\psi(\tau)$ est continue au point $\tau = 0$ $(\varepsilon > 0)$:

$$\int\limits_{0-\varepsilon}^{0} \psi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{0+\varepsilon} \psi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\psi(0),$$

si la fonction $\psi(\tau)$ est continue au point $\tau = 0$.

Ces définitions entraînent les propriétés suivantes qui ont lieu pour des τ quelconques et la fonction impaire $\varphi(\tau)$:

1) $|\tau| = \tau \operatorname{sign} \tau$;
2) $\tau = |\tau| \operatorname{sign} \tau$;
3) $\varphi(\tau) = \varphi(|\tau|) \operatorname{sign} \tau$;
4) $\varphi(|\tau|) = \varphi(\tau) \operatorname{sign} \tau$;
5) $\varphi^2(|\tau|) = \varphi^2(\tau)$;
6) $\operatorname{sign} \tau = 2 \cdot 1(\tau) - 1$;
7) $1(\tau) = \dfrac{\operatorname{sign} \tau + 1}{2}$;
8) $|\tau| = \tau[2 \cdot 1(\tau) - 1]$;
9) $\dfrac{d|\tau|}{d\tau} = \operatorname{sign} \tau$;
10) $\dfrac{d^2|\tau|}{d\tau^2} = \dfrac{d \operatorname{sign} \tau}{d\tau} = 2\delta(\tau)$;
11) $1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d(\operatorname{sign} \tau)$.

BeatriceGloria_personal library

ANNEXE 7

Correspondance des fonctions de corrélation $k_x(\tau)$ et des densités spectrales $S_x^*(\omega)$

$k_x(\tau)$	$S_x^*(\omega)$
1. $D\delta(\tau)$ où $\delta(t)$ est la fonction delta	$D/(2\pi)$
2. D	$D\delta(\omega)$
3. $D\cos\beta\tau$	$(D/2)[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)]$
4. $\sum_{i=1}^{n} D_i\cos\beta_i\tau$	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D_i[\delta(\omega+\beta_i)+\delta(\omega-\beta_i)]$
5. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$(D\alpha/\pi)(\alpha^2+\omega^2)^{-1}$
6. $\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-\alpha_i\lvert\tau\rvert}$	$\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\omega^2}$
7. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cos\beta\tau$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{[\alpha^2+(\beta-\omega)^2][\alpha^2+(\beta+\omega)^2]}$
8. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\lvert\tau\rvert\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$
9. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\cos\beta\tau-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\lvert\tau\rvert\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2\omega^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2}$
10. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\operatorname{ch}\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta\lvert\tau\rvert\right)$ $(\alpha\geqslant\beta)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{[(\alpha-\beta)^2+\omega^2][(\alpha+\beta)^2+\omega^2]}$
11. $D(1-\lvert\tau\rvert)1(1-\lvert\tau\rvert)$, où $1(x)$ est la fonction unité	$\frac{D}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$
12. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}(1+\alpha\lvert\tau\rvert)$	$(D\alpha/\pi)[2\alpha^3/(\omega^3+\alpha^3)^2]$
13. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1+\alpha\lvert\tau\rvert+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{\alpha^4}{3(\omega^2+\alpha^2)^3}$
14. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1+\alpha\lvert\tau\rvert-2\alpha^2\tau^2+\frac{1}{3}\alpha^3\lvert\tau\rvert^3\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{16\alpha^3\omega^4}{(\omega^2+\alpha^2)^4}$
15. $2\alpha\sin\beta\tau/\tau$	$\alpha 1(1-\lvert\omega\rvert/\beta)$
16. $2\alpha^2(2\cos\beta\tau-1)\frac{\sin\beta\tau}{\tau}$	$\begin{cases}0 & \text{pour } 0\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant\beta,\\ \alpha^2 & \text{pour } \beta<\lvert\omega\rvert\leqslant 2\beta,\\ 0 & \text{pour } 2\beta<\lvert\omega\rvert\end{cases}$
17. $De^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{D}{2\alpha\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2\right]$
18. $De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}[2\delta(\tau)-\alpha(\operatorname{sign}\tau)^2]$	$(D\alpha/\pi)[\omega^2/(\alpha^2+\omega^2)]$

BIBLIOGRAPHIE

1. **Ventsel H.** Théorie des probabilités. — Editions Mir, Moscou, 1987.
2. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей (Théorie des probabilités) — М.: Наука, 1973. — 366 с.
3. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике (Manuel de résolution des problèmes de la théorie des probabilités et de la mathématique statistique) — М.: Высшая школа, 1979. — 477 с.
4. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей (Théorie des probabilités) — М.: Физматгиз, 1961 — 406 с.
5. **Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.** Введение в теорию массового обслуживания (Introduction à la théorie des systèmes d'attente) — М.: Наука, 1966 — 431 с.
6. **Коваленко И. М., Филиппова А. А.** Теория вероятностей и математическая статистика (Théorie des probabilités et statistique mathématique) — М.: Высшая школа, 1973 — 368 с.
7. **Kaufmann A., Cruon R.** Les phénomènes d'attente. — Paris, 1961.
8. **Мешалкин Л. Д.** Сборник задач по теории вероятностей (Recueil de problèmes de la théorie des probabilités) — Изд. МГУ, 1963. — 131 с.
9. **Овчаров Л. А.** Прикладные задачи теории массового обслуживания (Problèmes appliqués de la théorie des systèmes d'attente) — М.: Машиностроение, 1969. — 324 с.
10. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций (Théorie des fonctions aléatoires) — М.: Физматгиз, 1962. — 659 с.
11. **Пугачев В. С.** Введение в теорию вероятностей (Introduction à la théorie des probabilités) — М.: Наука, 1968. — 368 с.
12. **Pugachev V.** Théorie des probabilités et statistique mathématique. — Editions Mir, Moscou, 1982.
13. **Сборник** задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (Recueil des problèmes de la théorie des probabilités, de la statistique mathématique et de la théorie des fonctions aléatoires)./Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1965. — 656 с.
14. **Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.** Теория вероятностей и математическая статистика в механике (Théorie des probabilités et statistique mathématique en mécanique). — М. Физматгиз, 1965. — 554 с.
15. **Тараканов К. В., Овчаров Л. А., Тырышкин А. Н.** Аналитические методы исследования систем (Méthodes analytiques de l'exploration des systèmes). — М.: Сов. радио, 1975. — 240 с.
16. **Feller W.** An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1, 2. — New York, 1966.
17. **Хинчин А. Я.** Работы по математической теории массового обслуживания (Ouvrages sur la théorie mathématique des systèmes d'attente). — М.: Физматгиз, 1963. — 127 с.

TABLE DES MATIÈRES

Preface à l'édition française 5

Avant-propos 5

Chapitre premier. GÉNÉRALITÉS. APPROCHES DIFFÉRENTES DU CONCEPT « PROBABILITÉ » 7

Chapitre II. AXIOMATIQUE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS. SOMME ET PRODUIT DES PROBABILITÉS 31

Chapitre III. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES. FORMULE DE BAYES 69

Chapitre IV. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES 93

Chapitre V. VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES ET MIXTES (NON DISCRÈTES) 131

Chapitre VI. SYSTÈMES DE VARIABLES ALÉATOIRES (VECTEURS ALÉATOIRES) 172

Chapitre VII. CARACTÉRISTIQUES NUMÉRIQUES DES FONCTIONS DES VARIABLES ALÉATOIRES 196

Chapitre VIII. LOIS DE RÉPARTITION DES FONCTIONS DES VARIABLES ALÉATOIRES. THÉORÈMES LIMITES DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS 252

Chapitre IX. FONCTIONS ALÉATOIRES 300

Chapitre X. FLUX D'ÉVÉNEMENTS. PROCESSUS ALÉATOIRES DE MARKOV 372

Chapitre XI. THÉORIE DES PHÉNOMÈNES D'ATTENTE 483

Annexes 483

Bibliographie 494